

文章编号 1004-924X(2017)04-1112-06

多项式函数的实时水波模拟算法

王志强*, 马海波

(深圳大学 计算机与软件学院, 广东 深圳 518060)

摘要: 本文通过分析三角函数的泰勒展开式, 提出了一种利用多项式函数优化三角函数的计算方法, 用于改善虚拟系统中水波模拟的实时性。本算法中, 通过引入多种控制波形的参数, 实现了水波波形的多样性。在此基础上, 还提出了一种计算表面法向量的方法, 以便更好地与周围环境及光线进行交互。选用自然水波图像作为参考, 并与当前典型算法 Gerstner 和 FFT 算法进行性能对比。实验结果表明, 本文算法能生成丰富、自然的水波运动, 且一定程度上减少了水波模拟过程中的计算量(约 13%), 适用于实时性要求较高的系统。

关键词: 多项式函数, Gerstner 波, 泰勒展开式, 三角函数, 实时渲染

中图分类号: TH703 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20172504.1112

Real-time water wave simulation algorithm by polynomial function

WANG Zhi-qiang*, MA Hai-bo

(College of Computer Science & Software Engineering, Shenzhen University Shenzhen 518060, China)

* Corresponding author, E-mail: wangzq@szu.edu.cn

Abstract: Through analyzing the Taylor expansion in trigonometric function, a calculation scheme by using polynomial function was proposed to optimize the Taylor expansion in trigonometric function. By doing that, the real-time performance of water wave simulation in virtual system was improved. Otherwise, the diversity of water wave was obtained through introducing various control parameters in polynomial function. Meanwhile, the surface normal vector calculation method was applied to achieve better results in light interaction between water surface and surrounding environment. The experimental on natural water wave indicates that the water wave movement generated by proposed algorithm is natural and diversification. It also can reduce the computational complexity in some degree (about 13%), which was more suitable for virtual scenes with high real-time requirement.

Key words: Polynomial function; Gerstner wave; Taylor expansion; Trigonometric functions; real-time rendering

1 引言

近年来虚拟现实越来越受到人们的关注,为

了提高虚拟现实设备的真实感,往往需要对自然景物进行比较真实的模拟。而水作为自然景物的一部分,可以增强虚拟环境中画面的真实感。但由于水的形态和光学特性比较复杂,因此创建和

收稿日期:2016-12-09;修订日期:2017-01-04.

基金项目:本课题得到科技部国家科技支撑计划项目(2014BAH28F05)资助

渲染一个逼真的水面效果并不容易^[1,2]。针对水的模拟方法大致可分为两类:一类是基于物理的方法,该方法一般通过求解 N-S 方程来描述水的运动;另一类是基于构造的方法,该方法采用数学函数构造水波外形,然后通过改变时间参数来描述水的运动^[3]。

基于物理的方法效果比较真实、适用范围广泛,但该方法计算过程复杂,需要消耗大量的计算资源,效率较低^[4,5]。因此,在需要对水进行实时模拟的场合中往往采用基于构造的方法。该方法常将水面作为一个高度场,并借助三角函数对水的运动进行建模^[6-9]。然而,对于大型水面,特别是海面,有时会形成卷浪,此时高度场的方法不能很好地模拟水面,且三角函数的计算较复杂。虽然当前 PC 的计算能力有了很大提升,但移动设备的计算能力还比较有限,随着虚拟现实(VR)技术以及 3D 游戏更多的应用于移动设备上,因此采用一种近似方法模拟水面,以提高 VR 系统的实时性。

基于上述原因以及应用需求,本文提出一种实时水波模拟算法,它能在保证一定的水波模拟效果的前提下达到实时性,且能较好地模拟卷浪效果。

2 水波算法

根据小振幅波理论可知,水的波形呈正弦分布,因此在模拟水波时可以使用正弦函数或者余弦函数。由于目前计算机的计算能力有限,往往只会通过将若干个正弦函数或余弦函数叠加的方式模拟水波运动。而正弦函数或者余弦函数本身又可进一步展开成泰勒级数,泰勒级数通过用给定次数的多项式对曲线进行近似,选择多项式函数可更加快速地计算,并易于使用。

2.1 二维水波算法

由于正弦函数和余弦函数只是简单的平移关系,因此以下的推导过程仅选用余弦函数进行讨论。数学意义上余弦函数的范围为 $(-\infty, +\infty)$,其基本波形可认为在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 之间,其它位置的波形可通过该段波形的平移和翻转得到,如图 1 所示。

本文认为使用和余弦函数相似的波形也可以

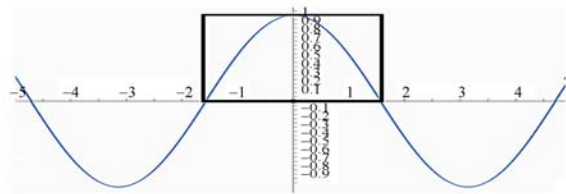


图 1 余弦函数波形

Fig. 1 Waveform of cosine function

模拟水波的运动。余弦函数的泰勒展开式为:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-1^{(n+1)} \cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad (1)$$

其中 x 的定义域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,在该区间内,可认为余弦函数的近似表达式为:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

为了描述公式(2)的拟合度,需要对其进行误差分析,误差值如图 2 所示。

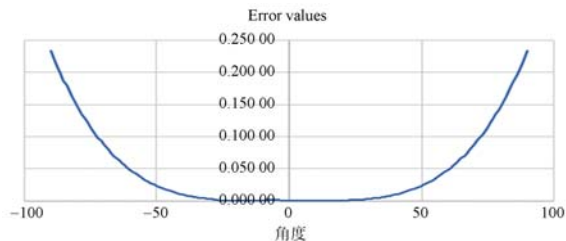


图 2 误差图(1)

Fig. 2 Error map(1)

在图 2 中,大部分区间的误差值都较小,而在边缘外,误差值却较大,误差值最大约为 0.23。经过多次试验进一步将公式(2)修正为:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2.3}. \quad (3)$$

对其进行误差分析,误差值如图 3 所示。

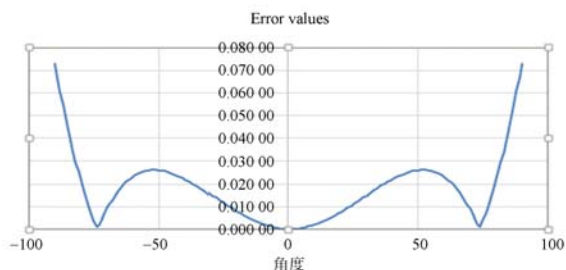


图 3 误差图(2)

Fig. 3 Error map(2)

由图 3 可知,误差值在整个区间上都比较小,

最大误差值仅为 0.073,相比公式(2),拟合度有了明显提高。模拟水面时,较小的误差值所对应的水波的高度差非常小,人眼很难辨别两者之间的差异。综上,利用多项式函数构造水波的方式是合理的。

将公式(3)所对应的波形通过翻转平移拓展后,可以构造出如图 4 所示波形。

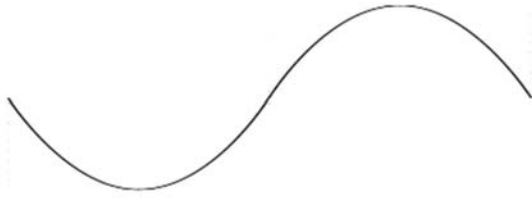


图 4 二次函数构造的波形

Fig. 4 Waveform constructed by quadratic function from cosine function wave

该波形看起来比较圆滑,适合绘制平静池塘里的水波,但对于粗犷的海洋,具有较尖的浪头和较宽的浪槽,因此使用单个函数构造的波形不能满足要求。

对于这个问题,可通过引入另一个函数,来控制波峰的尖锐程度。假设插入波峰处的函数为 $y = -4 * x^2$,且选择 $y = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 的部分作为水波波形的浪槽。为使两个函数在衔接处平滑过渡,经过求导对于 $y = -4 * x^2$,选择在 $[-0.25, 0.25]$ 的部分插入浪头处,经过平移后,可以得到一个分段函数,其表达式为:

$$y_o = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -4 * (x - 1.25)^2 + 1.25 & 1 < x \leq 1.5 \end{cases} \quad (4)$$

图 5 为公式(4)的波形图,它的波形符合浪头尖、浪槽宽的特性,由此可知,算法达到了预期的模拟要求。但也存在一些不足之处,如波的尖锐程度不能改变,波的长度是固定的,等等。

为解决上述问题,假设选用的两个多项式函数为:

$$y_1 = k * x_1^2, \quad (5)$$

$$y_2 = -k * s * x_2^2, \quad (6)$$

其中 k 为参数, s 为控制波尖锐程度的参数。选择公式(5)在区域 $[-a, a]$ 的部分作为水波函数



图 5 合成波形

Fig. 5 Synthetic waveform

的一部分,则应选择公式(6)中 $[-\frac{1}{s}a, \frac{1}{s}a]$ 部分作为水波函数的另一部分。经过平移,得到最终的水波函数为:

$$y_o = \begin{cases} k * x^2 & -a \leq x \leq a \\ -k * s * (x - a - \frac{1}{s}a)^2 + (1 + \frac{1}{s}) * k * a^2, & a < x \leq (1 + \frac{2}{s}) * a \end{cases} \quad (7)$$

定义波的长度 L 为:

$$L = (1 + \frac{1}{s}) * 2a, \quad (8)$$

波的高度 H 为:

$$H = (1 + \frac{1}{s}) * k * a^2, \quad (9)$$

则参数 k, a 为:

$$k = \frac{4(1 + \frac{1}{s}) * H}{L^2}, \quad (10)$$

$$a = \frac{L}{2(1 + \frac{1}{s})}. \quad (11)$$

2.2 三维水波算法

以上的水波模拟是在二维空间中进行的,现推广到三维空间。假设水平面为 $X-Z$ 平面,高度为 Y 轴方向,水的传播方向为 D_i ,波长为 L_i ,波的高度为 H_i ,传播速度为 v_i ,波的尖锐程度为 s_i ,其中 i 代表第 i 个波,则在 t 时刻水平面上坐标为 (x, z) 的点的高度计算过程为:

$$w_i = \text{frac} \left\{ \frac{D_i \cdot (x, z)}{L_i} \right\} + v_i * t \quad (12)$$

$$y_i = \begin{cases} k_i * w_i^2 & -a_i \leq w_i \leq a_i \\ -k * s_i * (w_i - a_i - \frac{1}{s_i}a_i)^2 + H_i & a_i < w_i \leq (1 + \frac{2}{s_i})a_i \end{cases}$$

$$y_o = \sum y_i,$$

其中 $frac$ 为取一个数的小数部分。此时,水波函数可模拟水面在高度方向的动态变化。为模拟大型水面中的卷浪,需要在 X 和 Z 方向上产生位移。大致思路为:保持波峰处的点不变,离波峰越远的点处,产生的位移越大,其数学表达式为:

$$(x, z) = (x, z) + \sum \alpha_i (H_i - y_i) \cdot D_i, \quad (13)$$

其中 α_i 是对卷浪效果的控制。

2.3 法线的计算

对水进行模拟时,需要考虑其与周围环境以及光线的交互效果,因此需要法线信息^[10,11]。利用上述算法对水面建模,构建的水面为一个 3D 参数曲面,从而能计算任意给定点表面的法线,不必使用有限差分技术^[12,13]。副法线 B 和切线 T 分别是对 x 方向和 z 方向求偏倒数,2D 水平面上的任意点 (x, z) ,在表面上的三维位置 P 为,

$$P(x, z, t) = \begin{cases} x + \sum \alpha_i (H_i - y_i) \cdot D_i \cdot x \\ \sum y_i \\ z + \sum \alpha_i (H_i - y_i) \cdot D_i \cdot z \end{cases} \quad (14)$$

x 方向上的偏导数为,

$$B_i = \begin{cases} -\alpha_i * D_i \cdot x * dy_i/dx \\ dy_i/dx \\ -\alpha_i * D_i \cdot z * dy_i/dx \end{cases}, \quad (15)$$

z 方向上的偏导数为,

$$T_i = \begin{cases} -\alpha_i * D_i \cdot x * dy_i/dz \\ dy_i/dz \\ -\alpha_i * D_i \cdot z * dy_i/dz \end{cases}, \quad (16)$$

当 $\omega_i \in [-a_i, a_i]$ 时,

$$\begin{aligned} dy_i/dx &= 2 * k_i * \omega_i * D_i \cdot x \\ dy_i/dz &= 2 * k_i * \omega_i * D_i \cdot z, \end{aligned} \quad (17)$$

当 $\omega_i \in (a_i, \left[1 + \frac{2}{s_i}\right] * a_i]$ 时,

$$\begin{aligned} dy_i/dx &= -2 * k_i * s_i * (\omega_i - a_i - \frac{1}{s_i} a_i) * D_i \cdot x \\ dy_i/dz &= -2 * k_i * s_i * (\omega_i - a_i - \frac{1}{s_i} a_i) * D_i \cdot z \end{aligned} \quad (18)$$

则,

$$\begin{aligned} B &= \sum B_i \\ B \cdot x &= B \cdot x + 1 \\ T &= \sum T_i \\ T \cdot z &= T \cdot z + 1 \end{aligned} \quad (19)$$

法线由副法线和切线的叉积得到,

$$N = B \times T. \quad (20)$$

在法线的求解过程中,有部分特殊的点,其偏导并不存在,但由于这些点属于第一类间断点,也就是可去间断点,为方便讨论,可以补充这些点的偏导。

3 实验与分析

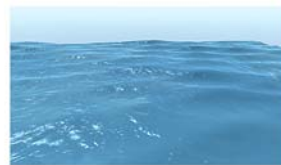
为了测试本文算法的实时性和模拟效果,选择 Gerstner 算法^[14] 和 FFT 算法^[15] 作为对比算法。Gerstner 算法由 Fournier 等人首次引入计算机图形学,由于其原理简单而且计算复杂性较低而被广泛应用于水的实时模拟。但 Gerstner 算法生成的波比较规整,与实际情况不符,为了改善这种情况,可以使用 FFT 算法进行优化。FFT 算法是基于统计学原理来模拟水波的运动,因此更加符合自然规律,但是它需要更多的计算量,同时实现难度也较大。

图 6 为本文算法与 FFT 以及 Gerstner 算法模拟水波的效果图。



(a)FFT

(b)Gerstner



(c)本文算法

(c) Proposed algorithm

图 6 波动效果图

Fig. 6 Water fluctuation effects

由图 6 可知,FFT 算法生成的波形具有较强的随机性,而本文算法与 Gerstner 算法虽然也能较好地模拟水波的运动,但是生成的波形却较为规整。其原因是 FFT 算法在模拟水波时加入了随机因子,因此生成的波形更加丰富。同时 Gerstner 算法在生成较为尖锐的波峰时可能会形成环,如图 7 所示。

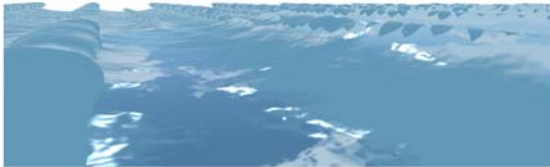


图 7 Gerstner 在波峰处形成环

Fig. 7 Forming a ring at the crest using Gerstner

虽然都可以形成尖锐波形但本文算法生成尖锐波形的原理与 Gerstner 波不同, Gerstner 波是将网格上的点向波峰处靠拢生成尖锐的波形,而本文算法是直接合成一个较尖锐的波形,因此避免了在波峰处形成环。

在大自然中,水不仅有比较尖锐的波峰,而且还会生成卷浪效果,如图 8 所示。



图 8 自然界中的卷浪效果

Fig. 8 Curved wave in nature

从原理上可以看出, Gerstner 算法和 FFT 算法都不能较好地模拟卷浪现象,而本文算法由于

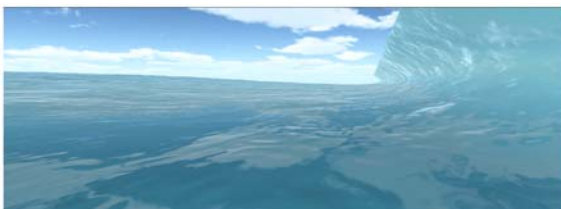


图 9 本文算法模拟卷浪效果图

Fig. 9 Curved wave using proposed algorithm

参考文献:

[1] LEE N, BAEK N, RYU K W. Real-time simulation of surface gravity ocean waves based on the

对波形的可控性更强,因此能够较好地模拟卷浪,模拟效果如图 9 所示。

图 10 为 3 种算法模拟水波时的渲染帧率,所有计算和绘制都是在 CPU i5-4210U,内存 4 G,显卡 AMD R7 M260 环境下进行的。

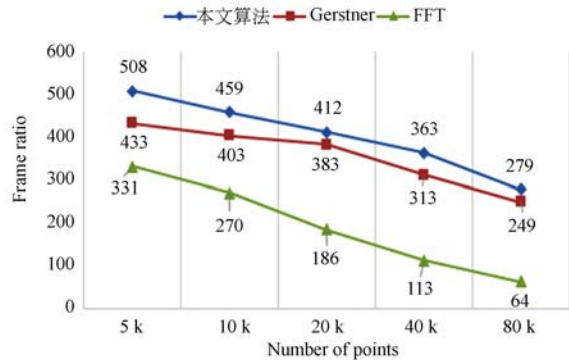


图 10 渲染帧率对比图

Fig. 10 The rendering frame rate

从图 10 以及渲染效果图可知, FFT 算法模拟的水波随机性较好,更加符合真实的水面运动情况,但计算量较大。本文算法以及 Gerstner 算法模拟的水波随机性一般,但能够发现水波运动的规律,而且两者的计算量较小。相较于 Gerstner 算法,本文算法一方面利用多项式函数简化了三角函数的计算过程,因此计算量更小;另一方面通过引入控制卷浪的参数,可较好地对比卷浪进行模拟。

4 结 论

本文通过分析三角函数的泰勒展开式,提出了多项式函数的水波模拟算法。利用多项式函数对三角函数的近似,减少了计算量,提高了渲染速率。同时,通过引入多种控制波形参数,实现了水面波形的可控性。相比于 Gerstner 算法,本文算法不仅能避免在波峰处形成环,而且还能较好地模拟卷浪效果,且拥有更高的渲染速率。

不足之处是不能生成较为随机的水波运动效果,这是下一步的工作重点。

TMA spectrum[C]. 7th International Conference on Computational Science (ICCS 2007), Springer Berlin Heidelberg, 2007:122-129.

[2] PREMOŽE S, ASHIKHMIN M. Rendering natural

- waters[J]. *Computer Natural Waters*, 2001, 20(4):189-199.
- [3] 杨怀平, 胡事民, 孙家广. 一种实现水波动画的新算法[J]. *计算机学报*, 2002, 25(6):612-617.
YANG H P, HU SH M, SUN J G. A new algorithm for water wave Animation[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2002, 25(6):612-617. (in Chinese)
- [4] 张思将, 白玉栋, 李志国. 动态海面红外视景仿真研究[J]. *激光与红外*, 2013, 43(6):636-638.
ZHANG S J, BAI Y D, LI ZH G. Infrared scene simulation of sea wave [J]. *Laser & Infrared*, 2013, 43(6):636-638. (in Chinese)
- [5] 罗玉, 钟玲. 基于海浪谱的3D海浪模拟[J]. *武汉理工大学学报(交通科学与工程版)*, 2008, 32(2):323-326.
LUO Y, ZHONG L. 3D sea wave simulation based on ocean wave spectrum[J]. *Journal of Wuhan University of Technology(Transportation Science & Engineering)*, 2008, 32(2):323-326. (in Chinese)
- [6] LU J, WANG D. An ocean wave simulation research based on controllable FBM model[C]. *International Conference on Wireless Communications NETWORKING and Mobile Computing*. IEEE, 2010:1-3.
- [7] LI Q, MENG X. A simple method to simulate waved water[C]. *International Conference on Image Analysis and Signal Processing*, IEEE, 2011:456-459.
- [8] LIANG Y J, GUO F L, CHEN X L. High-precision and large scale dynamic of real-time ocean waves simulation[C]. *International Conference on Computer Science & Network Technology*, 2013:165-169.
- [9] MAX N L. Vectorized procedural models for natural terrain: Waves and islands in the sunset[J]. *Acm Siggraph Computer Graphics*, 1981, 15(3):317-324.
- [10] 胡玲, 王霞, 延波, 等. 水下距离选通成像系统调制传递函数模型分析[J]. *红外与激光工程*, 2015, 44(11):3262-3269.
HU L, WANG X, YAN B, et al.. Analysis of underwater range-gated imaging system MTF[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(11):3262-3269. (in Chinese)
- [11] 夏润秋, 王霞, 金伟其, 等. 海面环境中红外偏振成像系统作用距离模型[J]. *红外与激光工程*, 2016, 45(3):64-68.
XIA R Q, WANG X, JIN W Q, et al.. Distance model of infrared polarization imaging system used in sea-surface environment [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, 45(3):64-68. (in Chinese)
- [12] MARSCHNER S, SHIRLEY P. *Fundamentals of Computer Graphics*[M]. Fourth Edition, A K Peters/CRC Press, 2015.
- [13] TOMAS A M, HAINES E, HOFFMAN N. *Third Edition, Real-Time Rendering* [M]. Third Edition A K Peters/CRC Press, 2008.
- [14] FOURNIER A, REEVES W T. A simple model of ocean waves [J]. *ACM Siggraph Computer Graphics*, 1986, 20(4):75-84.
- [15] TESSENDORF J. Simulating ocean water [J]. *Simulating Nature: Realistic and Interactive Techniques*, SIGGRAPH, 2001, 1(2):5.

作者简介:



王志强(1963—),男,江西南昌人,教授,1991年于湖北工学院获得硕士学位,现为深圳大学计算机与软件学院副院长,主要从事多媒体信息处理、计算机教育等方面的研究。E-mail: wang-zq@szu.edu.cn



马海波(1989—),男,湖北荆州人,硕士研究生,2013年于长江大学获得学士学位,主要从事计算机图形学方向的研究。E-mail: mahaibo_2013@163.com

(本栏目编辑:李自乐)