

文章编号 1004-924X(2017)08-2195-09

## 多终端五阶强跟踪容积卡尔曼滤波实时定轨

李兆铭<sup>1</sup>, 杨文革<sup>2\*</sup>, 丁丹<sup>2</sup>, 廖育荣<sup>2</sup>

(1. 装备学院 研究生院, 北京 101416;

2. 装备学院 光电装备系, 北京 101416)

**摘要:** 为了提高多手持终端对卫星脉冲机动轨道的实时确定精度, 并降低定轨精度对滤波初值的敏感性, 提出一种五阶强跟踪球面单形-径向容积卡尔曼滤波(5-STSSRCKF)方法。采用  $n$  维正则单形变换群和矩匹配法推导五阶球面单形-径向容积准则, 并将该准则嵌入强跟踪滤波(STF)框架。利用 STF 的等价表示计算次优渐消因子, 实现了在滤波稳定时在线实时调整增益矩阵, 克服了残差增大时增益矩阵仍保持极小值的缺点, 提高了对系统突变状态的跟踪能力。进行了仿真实验, 结果表明, 当滤波初值误差增大时, 已有方法的定轨精度降低为 1 798.199 m, 而提出的 5-STSSRCKF 的定轨精度可以维持在 8.688 m; 当卫星进行脉冲机动时, 已有方法不具备对机动轨道状态的跟踪能力, 而 5-STSSRCKF 的定轨精度仍然维持在 8.976 m。实验显示, 5-STSSRCKF 对滤波初值不敏感, 并且对卫星脉冲机动轨道的实时确定精度更高。

**关键词:** 手持终端; 实时定轨; 五阶球面单形-径向准则; 五阶强跟踪球面单形-径向容积卡尔曼滤波

**中图分类号:** V249.3; TH76 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20172508.2195

## Fifth-degree strong tracking cubature Kalman filter for real-time orbit determination by multiple terminals

LI Zhao-ming<sup>1</sup>, YANG Wen-ge<sup>2\*</sup>, DING Dan<sup>2</sup>, LIAO Yu-rong<sup>2</sup>

(1. Graduate School, Academy of Equipment, Beijing 101416, China;

2. Department of Optical and Electrical Equipment, Academy of Equipment, Beijing 101416, China)

\* Corresponding author, E-mail: wengeyang\_3@163.com

**Abstract:** To improve real-time determination accuracy of hand-held terminal for a satellite impulse maneuver orbit and to decrease the sensibility of orbit determination precision for an initial filtering value, a Fifty-degree Strong Tracking Spherical Simplex-radial Cubature Kalman Filter (5-STSSRCKF) method was proposed.  $N$ -dimensional regular simplex transformation group and moment matching method were used to deduce fifth-degree spherical simplex-radial cubature criterion, then the criterion was embedded into the Strong Tracking Filter Framework(STF). Equivalent representation of the STF was used to calculate suboptimal fading factors. By which, the gain matrix could be online adjusted in real time when the filter was stable. Thus, the disadvantage that gain matrix still maintained small minimal value at the time of increasing residual error was overcome and the tracking capacity for sudden change of system was improved. The simulation were performed, and the experi-

收稿日期: 2017-03-06; 修订日期: 2017-04-13.

基金项目: 国家 863 高技术研究发展计划资助项目(No. 2015AA7026085)

ments experimental results show that if the error of the initial filtering value is increased the orbit determination accuracy of the existing method decreases, while that of to 1 798.199 m; 5-STSSRCKF can be maintained at 8.688 m; when the satellite is subject to impulse maneuver, these existing methods can not be used to track the maneuver orbit, the orbit determination accuracy of 5-STSSRCKF is still maintained at 8.976 m. These results show that 5-STSSRCKF is not sensitive to initial filtering value and has higher real-time determination accuracy for satellite impulse maneuver orbits.

**Key words:** handheld terminal; real-time orbit determination; fifth-degree spherical simplex-radial cubature rule; strong tracking

## 1 引言

实时确定低轨卫星轨道状态是航天测控的一项重要任务。传统的地基测控设备一般较为庞大复杂,而且机动性较弱,因此使用便携式手持终端(下文简称终端)对低轨卫星进行测控便成为对传统测控设备的一种有效补充,同时也是测控设备小型化发展的一种趋势<sup>[1-2]</sup>。受限于终端的体积,终端仅具有多普勒测速功能,单一的测量元素使得多终端必须联合使用才能实现定轨精度要求,进而完成测控任务。

利用终端的测速值实时确定卫星轨道状态在本质上属于非线性滤波问题,滤波初值一般由地面测控中心提供,并外推至滤波起始时刻。然而,由于低轨卫星所受摄动力复杂,当外推时间较长时可能导致滤波初值与真实值的偏差较大。同时,低轨卫星执行不同任务时经常需要进行脉冲轨道机动,因此要求滤波方法具有对初值的低敏感性和对突变状态的强跟踪能力。扩展卡尔曼滤波<sup>[3]</sup>(Extended Kalman Filter, EKF)是目前应用最广的非线性滤波方法,但 EKF 对初值较为敏感,而且会在滤波稳定时失去对突变状态的跟踪能力。周东华<sup>[4-5]</sup>在 EKF 的基础上,通过在状态误差协方差阵中引入渐消因子来实时调整增益矩阵,强迫输出残差序列保持相互正交,提出了强跟踪滤波(Strong Tracking Filter, STF),但是 STF 仅具有一阶滤波精度,且需要计算非线性函数的雅克比矩阵。基于对非线性高斯概率密度加权函数近似的思想,Julier<sup>[6]</sup>和 Arasaratnam<sup>[7]</sup>先后提出无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)和容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter, CKF)。两者在本质上都属于确定性采样滤波,在采样点的选择上,前者采用 Sigma 点的分

布近似高斯加权积分<sup>[8-10]</sup>,后者基于三阶球面-径向容积准则,采用  $2n$  个权重相同的容积点的数值积分结果来逼近高斯加权积分,具有严密的数学证明<sup>[11-12]</sup>。利用统计线性误差传播的方法,将 UKF 和 CKF 嵌入 STF,可以分别得到 STUKF<sup>[13]</sup>和 STCKF<sup>[14-15]</sup>。相比 STF,这两种方法无需计算雅克比矩阵,并且结合了 STF 的强鲁棒性与 UKF、CKF 的优点。但是 STUKF 对于高维系统可能存在滤波计算不稳定的情况,而 STCKF 采用的三阶球面-径向容积准则限制了其精度的进一步提高。Jia<sup>[16]</sup>等利用任意阶全对称球面插值准则和矩匹配原理提出了五阶容积卡尔曼滤波(Fifth-degree Cubature Kalman Filter, 5-CKF),具有比 CKF 更高的滤波精度<sup>[17]</sup>。Wang<sup>[18]</sup>等利用球面单形变换群计算球面积分,提出了五阶球面单形-径向容积卡尔曼滤波(Fifth-degree Spherical Simplex-radial Cubature Kalman Filter, 5-SSRCKF),并指出在高维条件下,5-SSRCKF 具有比 5-CKF 更高的精度。然而,这两种五阶滤波方法尚不具备强跟踪的能力。

为了提高多终端对卫星脉冲机动轨道的实时确定精度,并降低定轨精度对滤波初值的敏感性,本文提出一种五阶强跟踪球面单形-径向容积卡尔曼滤波(Fifth-degree Strong Tracking Spherical Simplex-Radial Cubature Kalman Filter, 5-STSSRCKF)。该方法兼具五阶非线性滤波精度和 STF 的强鲁棒性等优点,并且可以在系统维数不大于 7 时保证数值计算的稳定性,仿真结果验证了该方法的有效性。

## 2 五阶球面单形-径向容积准则

为了在  $n$  维笛卡尔坐标系中求解任意非线性

函数  $g(x)$  的积分  $I(g) = \int_{R^n} g(x) e^{-x^T x} dx$ , 令  $x = ry$ , 其中,  $y$  为方向矢量, 满足  $y^T y = 1$ , 构成单位球体表面  $U_n = \{y \in R^n | y^T y = 1\}$ ,  $r$  为半径。由文献 [7] 知,  $I(g)$  可分解为球面积分  $S(r) = \int_{U_n} g(ry) d\sigma(y)$  和径向积分  $R = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr$ 。一般的, 该积分难以求得解析解, 因此可以使用如下五阶球面单形准则对球面积分  $S(r)$  进行数值逼近<sup>[18-19]</sup>:

$$S(r) = A_n \left\{ \frac{(7-n)n}{2(n+1)^2(n+2)} \sum_{i=1}^{n+1} [g(ra_i) + g(-ra_i)] + \frac{2(n-1)^2}{n(n+1)^2(n+2)} \sum_{i=1}^{n(n+1)/2} [g(rb_i) + g(-rb_i)] \right\}, \quad (1)$$

式中,  $A_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$  为  $n$  维单位球面的表面积,  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  为 Gamma 函数,  $n$  维单形的顶点  $a_j = (a_{j,1} \ a_{j,2} \ \dots \ a_{j,n})^T, j = 1, 2, \dots, n+1$  其元素为<sup>[19]</sup>:

$$a_{j,i} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{n+1}{n(n-i+2)(n-i+1)}}, & i < j \\ 0, & i > j \\ \sqrt{\frac{(n+1)(n-j+1)}{n(n-j+2)}}, & i = j \end{cases} \quad (2)$$

将  $a_j$  间的中点投到球体  $U_n$  的表面得到  $b_j$  为:

$$b_j = \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}} (a_i + a_l), i < l, l = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3)$$

求解五阶径向准则  $R$ , 由广义高斯-拉盖尔公式可得<sup>[16]</sup>:

$$\int_0^\infty S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr = \sum_{j=1}^{L_r} \omega_{r,j} S(r_j). \quad (4)$$

采用矩匹配法对式(4)进行求解, 令  $S(r) = r^l$ , 代入式(4)的左边得到  $\int_0^\infty r^l r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left[\frac{n+l}{2}\right]$ , 为达到五阶精度, 式(4)只需要对偶数阶  $l$  成立, 且积分点个数  $L_r = 2$ <sup>[16]</sup>。为此, 令  $l = 0, 2, 4, r_1 = 0$ , 解得五阶径向准则为:

$$R = \frac{1}{n+2} \Gamma\left[\frac{n}{2}\right] S(0) + \frac{n\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}{2(n+2)} S\left[\sqrt{\frac{n}{2}+1}\right]. \quad (5)$$

非线性卡尔曼滤波的核心是计算高斯加权积分  $\int_{R^n} g(x) N(x; \bar{x}, P_x) dx$ 。其中,  $N(\cdot)$  为高斯概率密度函数, 且变量  $x$  的均值为  $\bar{x}$ , 协方差矩阵为  $P_x$ 。该积分具有如下恒等关系式<sup>[7]</sup>:

$$\int_{R^n} g(x) N(x; \bar{x}, P_x) dx = \frac{1}{\sqrt{n^n}} \int_{R^n} g(\sqrt{2P_x}x + \bar{x}) e^{-x^T x} dx. \quad (6)$$

将式(1)、(5)与式(6)相结合, 同时代入  $A_n$  的表达式便可得到如下五阶球面单形-径向容积准则:

$$\int_{R^n} g(x) N(x; \bar{x}, P_x) dx = \frac{2}{n+2} g(\bar{x}) + \frac{(7-n)n^2}{2(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{i=1}^{n+1} [g(\sqrt{(n+2)P_x}a_i + \bar{x}) + g(-\sqrt{(n+2)P_x}a_i + \bar{x})] + \frac{2(n-1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{i=1}^{n(n+1)/2} [g(\sqrt{(n+2)P_x}b_i + \bar{x}) + g(-\sqrt{(n+2)P_x}b_i + \bar{x})]. \quad (7)$$

该准则采用  $n^2 + 3n + 3$  个容积点对高斯加权积分进行近似, 其容积点  $\hat{x}^{(i)}$  和权值  $\omega_i$  分别为:

$$\hat{x}^{(i)} = \begin{cases} \bar{x}, & i=1 \\ \bar{x} + \sqrt{(n+2)P_x}[a_i - a_{i-1}], & i=2, 3, \dots, 2n+3 \\ \bar{x} + \sqrt{(n+2)P_x}[b_i - b_{i-2n-3}], & i=2n+4, \dots, n^2+3n+3 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{2}{n+2}, & i=1 \\ \frac{(7-n)n^2}{2(n+1)^2(n+2)^2}, & i=2, 3, \dots, 2n+3 \\ \frac{2(n-1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}, & i=2n+4, \dots, n^2+3n+3 \end{cases}, \quad (9)$$

式中, 矩阵  $[\cdot]_i$  的下标  $i$  表示矩阵的第  $i$  列,  $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n+1})$ ,  $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n(n+1)/2})$ 。负权值的存在会降低数值计算的稳定性, 从式(9)可以看出, 只有当  $n > 7$  时才会出现负权值, 因此五阶球面单形-径向容积准则可以保证 7 维以下系统的滤波数值计算的稳定性。

### 3 五阶强跟踪容积卡尔曼滤波方法

考虑如下离散非线性动态系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k : (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k), \mathbf{v}_k : (\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \end{cases}, \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x}$  为状态向量,  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^{n_z}$  为量测向量, 系统噪声  $\mathbf{w}_k$  和量测噪声  $\mathbf{v}_k$  相互独立, 噪声协方差矩阵分别为  $\mathbf{Q}_k$  和  $\mathbf{R}_k$ 。

### 3.1 次优渐消因子的计算方法

利用统计线性误差传播方法可以得到先验误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,k}^-$ , 量测协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,z}$  和交叉协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,xz}$  的等价表达式为  $\mathbf{P}_{l,k}^- = \mathbf{F}\mathbf{P}_{l,k-1}^+ \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{l,z} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{l,k}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$ ,  $\mathbf{P}_{l,xz} = \mathbf{P}_{l,k}^- \mathbf{H}^T$ 。式中, 下标  $l$  表示尚未引入渐消因子时的矩阵,  $\mathbf{F} = \partial f / \partial \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{H} = \partial h / \partial \mathbf{x}$  为雅克比矩阵, 由于  $\mathbf{Q}_{k-1}$  正定, 故  $\mathbf{P}_{l,k}^-$  可逆, 进而可得  $\mathbf{H} = \mathbf{P}_{l,xz}^T (\mathbf{P}_{l,k}^-)^{-1}$ , 将上述推导与 STF<sup>[3-4]</sup> 相结合, 给出适用于本文方法的次优渐消因子  $\lambda_k$  的计算步骤如下:

步骤 1: 计算滤波新息  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  的协方差矩阵  $\mathbf{V}_k$ 。

$$\mathbf{V}_k = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T & k=1 \\ \frac{\rho \mathbf{V}_{k-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T}{1+\rho} & k \geq 2 \end{cases}, \quad (11)$$

式中,  $0 < \rho \leq 1$  为遗忘因子, 通常取  $\rho = 0.95$ ;

步骤 2: 计算矩阵  $\mathbf{M}_k$  和  $\mathbf{N}_k$ 。

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{P}_{l,z} - \mathbf{V}_k + \mathbf{N}_k + (\beta - 1) \mathbf{R}_k, \quad (12)$$

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{V}_k - \mathbf{P}_{l,xz}^T (\mathbf{P}_{l,k}^-)^{-1} \mathbf{Q}_k (\mathbf{P}_{l,k}^-)^{-1} \mathbf{P}_{l,xz} - \beta \mathbf{R}_k, \quad (13)$$

式中,  $\beta \geq 1$  为弱化因子, 其目的是为了使得状态估计更加平滑, 避免渐消因子引起过调节作用;

步骤 3: 计算  $\lambda_k$  的次优解。

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_0, \lambda_0 \geq 1 \\ 1, \lambda_0 < 1 \end{cases}, \lambda_0 = \frac{\text{tr}[\mathbf{N}_k]}{\text{tr}[\mathbf{M}_k]}. \quad (14)$$

### 3.2 五阶强跟踪球面单形-径向容积卡尔曼滤波

利用 3.1 节中的次优渐消因子可以将五阶球面单形-径向容积准则与 STF 相结合, 在 CKF 框架下得到兼具二者优点的 5-STSSRCKF 方法, 具体步骤如下:

步骤 1: 滤波器初始化。

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \end{cases}, \quad (15)$$

循环  $k=1, 2, \dots$ , 完成以下步骤;

步骤 2: 时间更新。

分别用  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  和  $\mathbf{P}_{k-1}^+$  代替式(8)中的  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{P}_x$ , 计算容积点  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}$ , 并用  $f(\cdot)$  计算  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}$  的非线性传递:

$$\mathbf{X}_k^{(i)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}). \quad (16)$$

对  $\mathbf{X}_k^{(i)}$  进行加权求和计算先验状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ,  $\omega_i$  按照式(9)取值, 以下相同:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i \mathbf{X}_k^{(i)}. \quad (17)$$

计算无渐消因子时的先验协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,k}^-$ :

$$\mathbf{P}_{l,k}^- = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (18)$$

步骤 3: 引入渐消因子前的量测更新。

用  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  和  $\mathbf{P}_{l,k}^-$  计算容积点  $\hat{\mathbf{x}}_{l,k}^{(i)}$ , 并用  $h(\cdot)$  计算  $\hat{\mathbf{x}}_{l,k}^{(i)}$  的非线性传递:

$$\mathbf{Z}_{l,k}^{(i)} = h(\hat{\mathbf{x}}_{l,k}^{(i)}). \quad (19)$$

对  $\mathbf{Z}_{l,k}^{(i)}$  进行加权求和计算量测估计  $\hat{\mathbf{z}}_{l,k}$ :

$$\hat{\mathbf{z}}_{l,k} = \omega_i \mathbf{Z}_{l,k}^{(i)}. \quad (20)$$

计算量测协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,z}$ :

$$\mathbf{P}_{l,z} = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\mathbf{Z}_{l,k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{l,k})(\mathbf{Z}_{l,k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{l,k})^T + \mathbf{R}_k. \quad (21)$$

计算交叉协方差矩阵  $\mathbf{P}_{l,xz}$

$$\mathbf{P}_{l,xz} = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\hat{\mathbf{x}}_{l,k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Z}_{l,k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{l,k})^T. \quad (22)$$

步骤 4: 计算渐消因子  $\lambda_k$ 。

利用  $\mathbf{P}_{l,k}^-$ ,  $\mathbf{P}_{l,z}$  和  $\mathbf{P}_{l,xz}$  的值, 按照 3.1 节中的方法计算  $\lambda_k$ , 进而可得  $\mathbf{P}_k^-$  为:

$$\mathbf{P}_k^- = \lambda_k \left\{ \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \right\} + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (23)$$

步骤 5: 引入渐消因子后的量测更新。

用  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  和  $\mathbf{P}_k^-$  计算容积点  $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ :

$$\mathbf{Z}_k^{(i)} = h(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}), \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i \mathbf{Z}_k^{(i)}, \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_z = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T + \mathbf{R}_k, \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \sum_{i=1}^{n^2+3n+3} \omega_i (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T. \quad (27)$$

步骤 6: 状态更新。

计算 Kalman 滤波增益  $\mathbf{K}_k$ :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_z^{-1}. \quad (28)$$

计算后验状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k). \quad (29)$$

计算后验误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k^+$ :

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{K}_k^T \quad (30)$$

## 4 实时定轨数学模型

### 4.1 系统状态方程

在地球固连坐标系(简称地固系)中,带  $J_2$  项非球形引力摄动的卫星轨道方程为<sup>[20]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{v}_x \\ \mathbf{y} = \mathbf{v}_y \\ \mathbf{z} = \mathbf{v}_z \\ \mathbf{v}_x = \frac{\mu \mathbf{x}}{r^3} \left[ \mathbf{J}_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left[ 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right] - 1 \right] + a_1^2 \mathbf{x} + 2\omega_e \cdot \mathbf{v}_y + f_x \\ \mathbf{v}_y = \frac{\mu \mathbf{y}}{r^3} \left[ \mathbf{J}_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left[ 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right] - 1 \right] + a_1^2 \mathbf{y} - 2\omega_e \cdot \mathbf{v}_x + f_y \\ \mathbf{v}_z = \frac{\mu \mathbf{z}}{r^3} \left[ \mathbf{J}_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left[ 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 4.5 \right] - 1 \right] + f_z \end{cases} \quad (31)$$

式中,  $(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z} \ \mathbf{v}_x \ \mathbf{v}_y \ \mathbf{v}_z)^T$  为地固系中卫星的位置和速度,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  为卫星地心距,  $\mu$  为地球引力常数,  $J_2$  为带谐项系数,  $R_e$  为地球半径,  $\omega_e$  为地球角速度,  $(f_x \ f_y \ f_z)^T$  为其余摄动力之和,可以等效成零均值高斯白噪声。式(31)可以写成如下离散状态方程的形式:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (32)$$

式中,  $\mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_k \ \mathbf{y}_k \ \mathbf{z}_k \ \mathbf{v}_{x,k} \ \mathbf{v}_{y,k} \ \mathbf{v}_{z,k})^T$  为  $k$  时刻的轨道状态,  $\mathbf{w}_k$  为系统噪声。

### 4.2 系统量测方程

使用  $n$  个终端进行定轨,第  $i$  个终端在地固系中的地心坐标用  $(x_{i,c} \ y_{i,c} \ z_{i,c})$  表示,由几何关系可得轨道状态与终端测速元  $\mathbf{R}_i$  之间的关系为:

$$\mathbf{R}_i = \frac{(x - x_{i,c}) \mathbf{v}_x + (y - y_{i,c}) \mathbf{v}_y + (z - z_{i,c}) \mathbf{v}_z}{\sqrt{(x - x_{i,c})^2 + (y - y_{i,c})^2 + (z - z_{i,c})^2}} \quad (33)$$

写成多终端量测方程的形式为:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (34)$$

式中,  $\mathbf{z}_k = (\mathbf{R}_{1,k} \ \mathbf{R}_{2,k} \ \dots \ \mathbf{R}_{n,k})^T$  为  $k$  时刻各终端测速值构成的集中量测值,  $\mathbf{v}_k$  为量测噪声。式(32)与(34)构成多终端实时定轨的状态方程和量测方程。

## 5 实验结果与分析

图 1 为某型号卫星地面实验模拟器,其上运

行的高精度轨道预报算法经过实际飞行任务的检验,是可靠的参考轨道实验数据来源。将该参考轨道输入地面测控模拟器,便可得到实验用模拟测速数据。基于 MATLAB 平台编写本文算法程序,实验考虑工程中常用的低轨太阳同步轨道卫星,轨道历元为 1 Jul 2015 16:00:00(UTCG),轨道半长轴为 6 778.137 km,偏心率为 0,轨道倾角为 97.035°,升交点赤径为 279.066°,近地点幅角为 0°,真近点角为 0°,将式(33)中 6 个终端的地心坐标换算成经纬度,如表 1 所示。

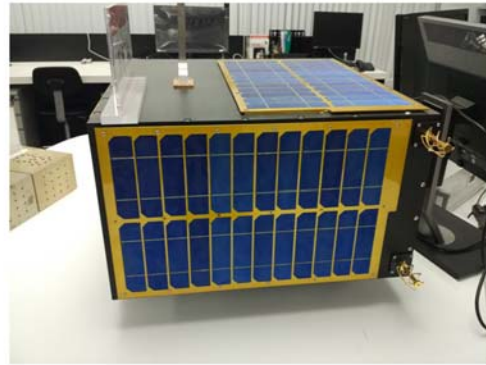


图 1 卫星地面实验模拟器

Fig. 1 Satellite simulator

表 1 六终端经纬度

Tab. 1 Longitude and latitude of six terminals (°)

终端	1	2	3	4	5	6
经度	107.99	117.27	111.18	115.09	111.21	114.54
纬度	25.77	27.51	25.97	25.05	23.58	27.84

终端对卫星的共视可见时间窗口为 1 Jul 2015 16:03:30(UTCG)到 1 Jul 2015 16:10:00(UTCG),量测方程(34)中的测速精度为 0.1 m/s。采用均方根误差(RMSE)来评价实时定轨结果, RMSE 定义如下:

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [(r_x^i - \hat{r}_x^i)^2 + (r_y^i - \hat{r}_y^i)^2 + (r_z^i - \hat{r}_z^i)^2]}{N}} \quad (35)$$

式中,  $N$  为 Monte-Carlo 实验次数。

(1)首先,比较本文提出的 5-STSSRCKF 与标准 CKF(3-CKF)和 5-SSRCKF 的定轨精度。取滤波周期为 1 s,运行 200 次 Monte-Carlo 实验。按照式(15)将滤波初值取为:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \begin{bmatrix} -3 & 032 & 370 & 5 & 879 & 052 & 1 & 576 & 819 \\ 2 & 112 & -915 & 7 & 394 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵初始值取为:

$$\mathbf{P}_0^+ = \text{diag}(10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 10^2 \ 10^2 \ 10^2)$$

分别设置式(11)和式(12)、(13)中的强跟踪滤波器参数为:

$$\rho = 0.95, \beta = 100.$$

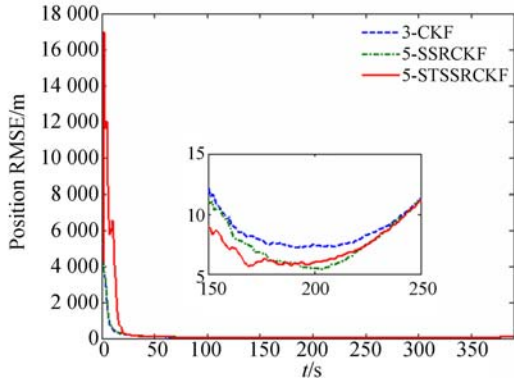


图 2 3 种方法定轨位置 RMSE 对比

Fig. 2 Position RMSE comparison of three methods

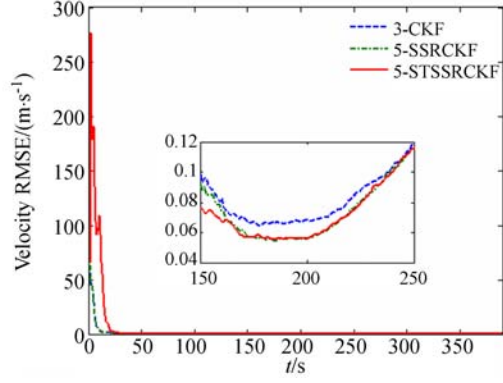


图 3 3 种方法定轨速度 RMSE 对比

Fig. 3 Velocity RMSE comparison of three methods

表 2 150~250 s 定轨 RMSE 统计结果

Tab. 2 Statistical RMSE during 150—250 s

方法	最大位置 RMSE/m	最小位置 RMSE/m	平均位置 RMSE/m	最大速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	最小速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	平均速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )
3-CKF	12.092	7.163	8.492	0.119	0.064	0.081
5-SSRCKF	11.195	5.385	7.532	0.116	0.054	0.073
5-STSSRCKF	11.125	5.598	7.208	0.116	0.055	0.072

(2)为了验证本文方法对初值的低敏感性,增大滤波初值与真实值的偏差,将式(15)中的滤波初值改为:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \begin{bmatrix} -3 & 232 & 370 & 5 & 979 & 052 & 1 & 676 & 819 \\ 2 & 112 & 0 & 915 & 7 & 394 \end{bmatrix}$$

实验(1)中已经表明五阶方法的定轨精度高于三阶方法,故此处仿真不再考虑 3-CKF。将本

文提出的 5-STSSRCKF 与 5-SSRCKF 进行对比,实验结果如图 4~5 所示。统计 150~250 s 的定轨 RMSE 并列于表 3。从实验结果可以看出,当滤波初值误差增大时,5-SSRCKF 的平均定轨精度降低为 1 798.199 m,而 5-STSSRCKF 的定轨精度依然维持在 8.688 m,验证了该方法对滤波初值的低敏感性。

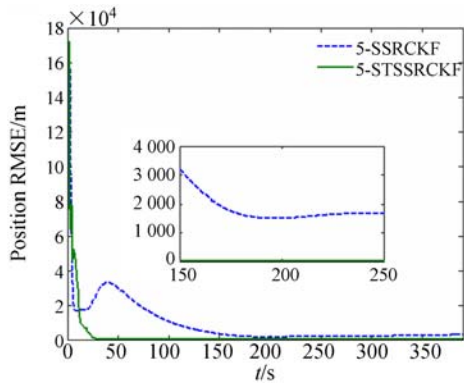


图 4 2 种方法定轨位置 RMSE 对比

Fig. 4 Position RMSE comparison of two methods

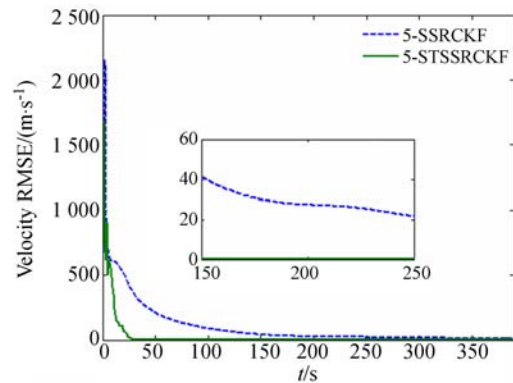


图 5 2 种方法定轨速度 RMSE 对比

Fig. 5 Velocity RMSE comparison of two methods

表 3 150~250 s 定轨 RMSE 统计结果

Tab. 3 Statistical RMSE during 150-250 s

方法	最大位置 RMSE/m	最小位置 RMSE/m	平均位置 RMSE/m	最大速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	最小速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	平均速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )
5-SSRCKF	3 224.420	1 492.931	1 798.199	41.302	21.490	28.522
5-STSSRCKF	13.135	6.779	8.688	0.121	0.062	0.079

(3)考虑对脉冲轨道机动卫星的实时定轨,卫星在 1 Jul 2015 16:05:30(UTCG)进行轨道机动,  $\Delta v=1.6$  km/s,对比 5-STSSRCKF 和 5-SSRCKF,实验结果如图 6~7 所示。统计 150~250 s 的定轨 RMSE 并列于表 4。从实验结果可以看出,5-SSRCKF 计算发散,说明该方法不具备对卫

星突变轨道状态的跟踪能力。而由式(23)可以看出,渐消因子  $\lambda_k$  可以实时调整  $P_k^-$ ,进而通过式(28)调整增益矩阵,使得 5-STSSRCKF 具备强跟踪能力,从而使得平均定轨精度仍然维持在 8.976 m,验证了该方法对突变轨道状态的强跟踪能力。

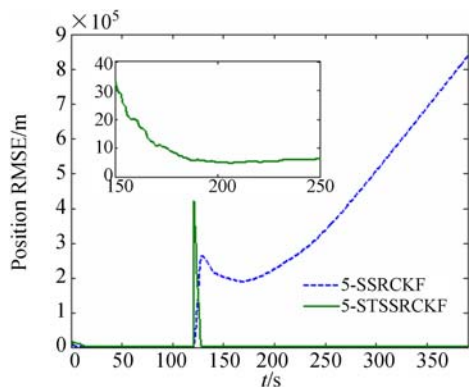


图 6 2 种方法定轨位置 RMSE 对比

Fig. 6 Position RMSE comparison of two methods

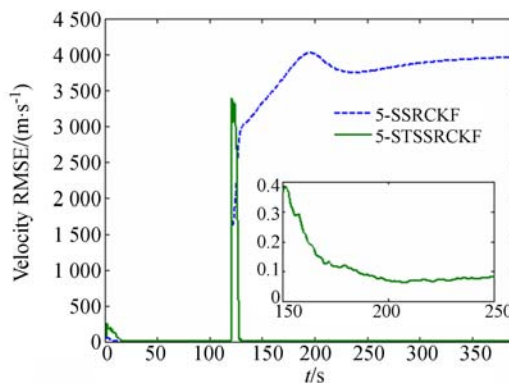


图 7 2 种方法定轨速度 RMSE 对比

Fig. 7 Velocity RMSE comparison of two methods

表 4 150~250 s 定轨 RMSE 统计结果

Tab. 4 Statistical RMSE during 150-250 s

方法	最大位置 RMSE/m	最小位置 RMSE/m	平均位置 RMSE/m	最大速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	最小速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	平均速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )
5-SSRCKF	338 618.932(发散)	189 397.341(发散)	238 681.766(发散)	4 020.053(发散)	3 327.401(发散)	3 775.282(发散)
5-STSSRCKF	32.989	4.694	8.976	0.385	0.063	0.116

## 6 结 论

本文将五阶球面单形-径向容积准则与强跟踪滤波相结合,提出了一种多终端实时定轨 5-STSSRCKF 方法。实验结果表明,五阶容积滤波

定轨精度高于三阶容积滤波。当滤波初值误差增大时,本文方法的定轨精度为 8.688 m,具有对滤波初值的低敏感性。当卫星进行脉冲机动时,本文方法具有对突变轨道状态的强跟踪能力,可以有效地将脉冲机动卫星轨道的实时确定精度维持在 8.976 m。

### 参考文献:

[1] 李志军, 侯黎强. 一种用于实时轨道确定的 NPF-

SRCKF 滤波算法[J]. 宇航学报, 2014, 35(7): 811-817.

LI ZH J, HOU L Q. An improved NPF-SRCKF based algorithm for spacecraft orbit determination

- [J]. *Journal of Astronautics*, 2014, 35(7): 811-817. (in Chinese)
- [2] 廖育荣, 丁丹, 柴黎, 等. 基于手持终端的天基侦察信息战术应用研究[J]. *装备学院学报*, 2016, 27(5): 64-67.  
LIAO Y R, DING D, CHAI L, *et al.*. Space-based information tactical application based on hand-held terminal [J]. *Journal of Equipment Academy*, 2016, 27(5): 64-67.
- [3] BOLOGNANI S, TUBIANA L, ZIGLIOTTO M. Extended Kalman filter tuning in sensorless PMSM drives[J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2003, 39(6): 1741-1747.
- [4] 周东华, 席裕庚, 张钟俊. 非线性系统带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波[J]. *控制与决策*, 1990(5): 1-6.  
ZHOU D H, XI Y G, ZHANG ZH J. Suboptimal fading extended Kalman filtering for nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 1990(5): 1-6. (in Chinese)
- [5] HU Y Y, ZHOU D H. Time-varying bias estimation for asynchronous multi-sensor multi-target tracking systems using STF[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2013, 22(3): 525-529.
- [6] JULIER S, UHLMANN J, DURRANT-WHYTE H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [7] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [8] 肖延国, 魏建明, 邢涛, 等. 分布式 Unscented 粒子滤波跟踪[J]. *光学精密工程*, 2009, 17(7): 1707-1713.  
XIAO Y G, WEI J M, XING T, *et al.*. Target tracking using distributed unscented particle filter in sensor network[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(7): 1707-1713. (in Chinese)
- [9] 张百强, 储海荣, 孙婷婷, 等. 应用 RB 无迹卡尔曼滤波组合导航提高 GPS 重获信号后的导航精度[J]. *光学精密工程*, 2016, 24(4): 835-843.  
ZHANG B Q, CHU H R, SUN T T, *et al.*. Precision improvement methodology for INS/GPS after GPS outage using RB-UKF [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(4): 835-843. (in Chinese)
- [10] 贾瑞才. 重力/地磁辅助的欧拉角无迹卡尔曼滤波姿态估计[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(12): 3280-3286.  
JIA R C. Attitude estimation base on gravity/magnetic assisted Euler angle UKF[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(12): 3280-3286. (in Chinese)
- [11] ZAREI J, SHOKRI E. Convergence analysis of non-linear filtering based on cubature Kalman filter[J]. *IET Science, Measurement & Technology*, 2015, 9(3): 294-305.
- [12] 赵兵, 曹剑中, 杨洪涛, 等. 改进的平方根容积卡尔曼滤波及其在 POS 中的应用[J]. *红外与激光工程*, 2015, 44(9): 2819-2824.  
ZHAO B, CAO J ZH, YANG H T, *et al.*. Approved square root cubature Kalman filtering and its application to POS[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(9): 2819-2824. (in Chinese)
- [13] 李敏, 王松艳, 张迎春, 等. 改进的强跟踪平方根 UKF 在卫星导航中应用[J]. *系统工程与电子技术*, 2015, 37(8): 1858-1865.  
LI M, WANG S Y, ZHANG Y CH, *et al.*. Satellite autonomous navigation filtering algorithm based on improved strong tracking square-root UKF[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2015, 37(8): 1858-1865. (in Chinese)
- [14] 王宏健, 傅桂霞, 李娟, 等. 基于强跟踪 CKF 的无人水下航行器 SLAM[J]. *仪器仪表学报*, 2013, 34(11): 2542-2550.  
WANG H J, FU G X, LI J, *et al.*. Strong tracking CKF based SLAM method for unmanned underwater vehicle[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2013, 34(11): 2542-2550. (in Chinese)
- [15] HUANG W, XIE H S, SHEN C, *et al.*. A robust strong tracking cubature Kalman filter for spacecraft attitude estimation with quaternion constraint[J]. *Acta Astronautica*, 2016, 121: 153-163.
- [16] JIA B, XIN M, CHENG Y. High-degree cubature Kalman filter[J]. *Automatica*, 2012, 49(2): 510-518.
- [17] 赵曦晶, 刘光斌, 汪立新, 等. 五阶容积卡尔曼滤波算法及其应用[J]. *红外与激光工程*, 2015, 44(4): 1377-1381.  
ZHAO X J, LIU G B, WANG L X, *et al.*. Fifth degree cubature Kalman filter algorithm and its application[J]. *Infrared and Laser Engineering*,

- 2015, 44(4): 1377-1381. (in Chinese)
- [18] WANG S Y, FENG J C, CHI K T. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(1): 43-46.
- [19] 朱奇光, 袁梅, 王梓巍, 等. 机器人球面单径容积 FastSLAM 算法[J]. *机器人*, 2015, 37(6): 708-717.
- ZHU Q G, YUAN M, WANG Z W, *et al.*. A robot spherical simplex-radial cubature FastSlam algorithm[J]. *Robot*, 2015, 37(6): 708-717. (in Chinese)
- [20] 王向磊, 丁硕, 苏牡丹. UKF 在基于地磁场的自主导航中的应用[J]. *测绘科学*, 2011, 36(6): 103-105.
- WANG X L, DING SH, SU M D. Application of UKF in geomagnetic field based autonomous navigation[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2011, 36(6): 103-105. (in Chinese)

#### 作者简介:



李兆铭(1989—),男,黑龙江双鸭山人,博士研究生,2011年于哈尔滨工业大学获得学士学位,2014年于装备学院获得硕士学位,现为装备学院博士研究生,主要从事航天测控最优状态估计方法的研究。E-mail: lizhaomingzbxy@163.com

#### 导师简介:



杨文革(1966—),男,江西金溪人,博士,教授,博士生导师,1994年于国防科技大学获得学士学位,1997年于北京航空航天大学获得硕士学位,2000年于北京理工大学获得博士学位,主要从事航天测控、雷达信号处理技术研究。E-mail: wengeyang\_3@163.com