

文章编号 1004-924X(2018)02-0461-10

## 快速鲁棒的基础矩阵估计

颜 坤<sup>1,2</sup>, 刘恩海<sup>1</sup>, 赵汝进<sup>1\*</sup>, 田 宏<sup>1</sup>, 张 壮<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院 光电技术研究所, 四川 成都 610209;

2. 中国科学院大学, 北京 100190)

**摘要:**针对基础矩阵估计过程中因受野值影响导致估计精度下降和稳定性不高等问题,本文提出了一种新的快速鲁棒的基础矩阵估计方法。该方法首先将野值去除融入到计算基础矩阵的过程中,而不再将它作为一个独立的处理步骤。通过迭代将潜在的错误对应点剔除,从而实现基础矩阵的稳定估计。然后,在每次迭代过程中,采用对极几何误差准则来识别野值,同时获得基础矩阵的估计结果。该迭代过程收敛较快,即使存在大量匹配野值的情况下,计算值也会很快趋于稳定。仿真和实际实验结果一致表明:所提出的算法在保证类似估计精度的同时还在计算效率方面有极大地提升,相比较快的 M 估计法有 30% 以上的速度提升,而相比于估计精度较优的 MAPSAC 算法甚至达到 4 倍以上。

**关键词:**计算机视觉;基础矩阵;对极几何;鲁棒性

**中图分类号:**TH703 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20182602.0461

## A fast and robust method for fundamental matrix estimation

YAN Kun<sup>1,2</sup>, LIU En-hai<sup>1</sup>, ZHAO Ru-jin<sup>1\*</sup>, TIAN Hong<sup>1</sup>, ZHANG Zhuang<sup>1,2</sup>

(1. *Institute of Optics and Electronics of Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China;*

2. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)*

*\* Corresponding author, E-mail: zrj0515@163.com*

**Abstract:** In this paper, a new fast and robust fundamental matrix estimation method was proposed to solve the problem that the estimation of fundamental matrix leads to lower estimation accuracy and lower stability due to outliers. The method removed outliers into the computation of the fundamental matrix instead of taking it as an independent processing step. The potential error corresponding points were eliminated by iteration to achieve the stable estimation of the fundamental matrix. Then, the epipolar geometry error criterion was used to identify outliers and the estimation results of the fundamental matrix were obtained during each iteration. The iterative process could converge quickly, even if a large number of matched outliers were present, the calculated values would soon become stable. The results of simulation and actual experimental show that the proposed algorithm improves the estimation accuracy greatly, and also ensures similar calculation efficiency at the same time. Compared with the method of M-estimator, it has more than 30% speed improvement, and compared with the MAP-

收稿日期:2017-06-09;修订日期:2017-08-05.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 61501429);国家科技部重点研发计划“地球观测与导航”重点专项资助项目(No. 2016YFB0501105)

SAC algorithm with higher estimation accuracy, it even achieves more than 4 times.

**Key words:** computer vision; fundamental matrix; epipolar geometry; robustness

## 1 引言

基础矩阵是计算机视觉领域的一个重要工具,它反映了从不同视角拍摄同一场景的两幅图像的对应关系。精确估计基础矩阵可以建立图像中的点对关系,它在运动估计,图像匹配及三维重建等领域有广泛地应用<sup>[1-3]</sup>。尤其在现阶段,很多应用除了精度需要保证之外,对计算效率也提出了更高的要求,因此快速精确地估计基本矩阵至关重要。此外,用于求解基本矩阵的匹配点集会因噪声干扰和错误匹配而不可避免地存在误差,所以基本矩阵估计算法还必须具有较强的鲁棒性。

由于基础矩阵的重要性,其受到摄影测量和计算机视觉领域各学者的广泛关注。Longuet-Higgins 于 1981 年首先提出将对极几何约束应用到场景的重建<sup>[4]</sup>。这些年来,已经涌现出大量的基础矩阵估计算法,可将其大致分为线性方法、迭代方法和鲁棒性方法三类<sup>[5,6]</sup>。其中,线性算法有 7 点法、8 点法和改进的 8 点法等,一般可通过最小二乘或奇异值分解的方法计算。8 点算法实现简单,计算效率高,但其对噪声非常敏感。Hartley 通过在计算前对数据进行规范化处理(即对原始数据做各向同性的变换),提出了改进的 8 点算法,一定程度上降低了噪声的干扰<sup>[7]</sup>。后来,许多学者提出了采用迭代算法最小化目标函数(点到极线的距离最小化、几何误差最小化等)估计基本矩阵。后续地,还有基于最小绝对偏差的迭代方法,进一步提高了估计精度<sup>[8]</sup>。然而,在实际应用中,初始匹配点集总会受粗大误差干扰,甚至存在误匹配。此时,线性算法和迭代算法的稳定性和估计精度会受到严重影响。

鲁棒性估计方法可克服线性和迭代方法的缺陷,在匹配点集存在外点时仍可获得较高的估计精度。最早是 Fischler 和 Bolles 提出采用 RANSAC 方法剔除野值,该算法能处理外点率超过 50% 的数据。由于 RANSAC 算法具有良好的

野值剔除功能,后来的学者将它应用到了基础矩阵的估计中<sup>[9]</sup>。后续地,许多学者提出了各种改进方法,如 LMeds 估计算法<sup>[6]</sup>、MLE-SAC 算法<sup>[10]</sup>和 MAPSAC 算法<sup>[11]</sup>等。这类算法的核心思想是首先通过随机抽样检验的方法剔除原始对应点集中误差较大的点,获得一个内点集,然后用内点集中的所有匹配点通过线性方法获得基本矩阵的最小二乘解。即:基于类似 RANSAC 的假设检验的策略,将剔除野值作为一个独立的步骤进行处理。由于需要多次抽样估计参数模型,并通过计算每个参数模型的累积成本误差函数值以检验其优劣,算法计算量较大,处理速度较慢。

目前,基础矩阵估计算法虽然已取得长足进展,许多学者也对一些经典算法进行了研究并作出了改进。唐永鹤等<sup>[12]</sup>提出了一种基于序贯相似检测(SSDA)的基本矩阵估计方法,该方法通过在 MAPSAC 算法中引入 SSDA 搜索最优模型参数减少了模型参数检验的计算量,提高了处理速度。黄春燕等<sup>[13]</sup>在 RANSAC 算法的基础上提出了三点改进,尽管算法精度得以提高,但是复杂度却急剧上升了。同样,张永祥等<sup>[14]</sup>也对 RANSAC 算法进行了改进,他们的工作和黄春燕等的工作有些类似,只是最后还用到了 M 估计法,一定程度上也提高了算法的鲁棒性和精度,但也降低了算法执行效率。Zhou 和 Zhong<sup>[15]</sup>融合了特征直线的方式来计算基础矩阵,同样是对 RANSAC 和 M 估计法的改进。还有一些学者针对不同的应用场合,提出了相应的解决方案来计算基础矩阵<sup>[16,17,18]</sup>。但并未很好地解决快速、精确、鲁棒的基本矩阵估计问题。

针对以上的不足,本文提出了一种新的基础矩阵估计方法,与现有的鲁棒性方法不同,新的方法将野值去除融入到计算基础矩阵的过程中,而不再将它作为一个独立的处理步骤。通过迭代将潜在的错误对应点剔除,从而实现基础矩阵的稳定估计。在每次迭代过程中,采用对极几何误差准则来识别野值,同时获得基础矩阵的估计结果。

该迭代过程收敛较快,即使存在大量匹配野值情况下,计算值会很快趋于稳定。在后面的实验中,可以看出,与现有基于假设检验的鲁棒方法相比,所提出的算法在计算效率方面有极大的提升,同时可保证类似的估计精度。

## 2 对极几何约束和基础矩阵

任意两个拍摄同一场景的相机组成的系统都存在对极几何关系。如图 1 所示,一个目标三维空间点  $M_i$  在两摄像机平面分别成像为点  $m_i$  和  $m_i'$ 。O、O'为两相机光心,它们的连线称为基线,相机光心 O 投影到另一个相机成像平面于  $e'$ ,称之为极点(Epipole),同理,相机光心 O'投影到第

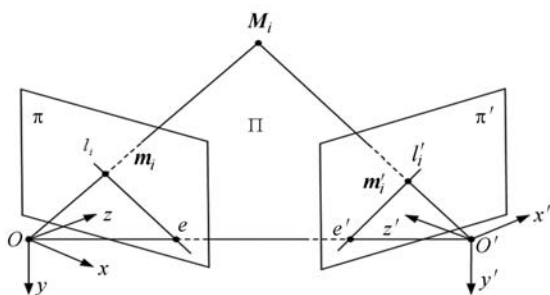


图 1 对极几何

Fig. 1 Epipolar geometry

一个相机成像平面于极点  $e$ 。O、O'和目标三维空间点  $M_i$  共同构成极平面  $\Pi$  (Epipolar plane)。该平面与成像平面  $\pi$ 、 $\pi'$  分别交于直线  $l$  和  $l'$ ,直线  $l$  称为点  $m_i'$  在像平面  $\pi$  上的对极线 (Epipolar line),直线  $l'$  称为点  $m_i$  在像平面  $\pi'$  上的对极线。也即,成像平面  $\pi$  上的一点  $m_i$  处在对极线  $l$  上;对称地,像平面  $\pi'$  的点  $m_i'$  处在对极线上,这就是两视图的对极几何约束 (Epipolar constraint)。这一约束可通过下面的代数方程表示:

$$m_i'^T F m_i = 0, \quad (1)$$

其中:  $m_i = (u_i, v_i, 1)^T$  和  $m_i' = (u_i', v_i', 1)^T$  为成像点对的齐次坐标;  $F$  为基础矩阵,包含了相机的内参和相对位姿关系。尽管基础矩阵独立于目标场景结构,但是由式(1)可知,通过建立目标点在成像平面上的对应点可实现对基础矩阵的估计。

## 3 算法原理

### 3.1 基础矩阵的线性方程组

空间中一点  $M_i$  在两幅图像平面的成像坐标分别为  $m_i = (u_i, v_i, 1)^T$  和  $m_i' = (u_i', v_i', 1)^T$ , 则其满足(1)式中的极几何约束关系,展开式(1)可得:

$$(u_i, v_i, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

通过化简后,可得到下面的方程组:

$$U_i f = [(u_i, v_i, 1) \otimes (u_i', v_i', 1)] f = [m_i^T \otimes m_i'^T] f = 0, \quad (3)$$

其中  $\otimes$  表示 Kronecker 积,且:

$$f = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^T. \quad (4)$$

当存在  $n$  对对应点  $m_i \leftrightarrow m_i' (i = 1, \dots, n)$  时,联立可得到下面的线性方程组:

$$A f = 0, \quad (5)$$

其中  $A$  为  $n \times 9$  的矩阵。

### 3.2 线性方程的稳定求解

在理想情况下,方程组系数矩阵  $A$  的零空间 (即,齐次线性方程组  $A f = 0$  的全部解) 的有效维度  $N$  为 1。实际中,受噪声和野值的影响, $A$  的零空间的有效维度  $N$  总为 0,即没有 0 奇异值 (尽管有些奇异值非常接近于 0)。这里,假定  $A$  的零空间的有效维度  $N$  总为 1,并提出一种去野值的策略来计算  $A$  的零空间。为了去除匹配错误的野值,并计算无噪情况下对应的矩阵  $L$  (即无噪声下的矩阵  $A$ ),问题转化为下面的最小化问题,即:

$$\begin{aligned} \arg \min_{L, W} & \| W(A - L) \|^2, \\ \text{subject to} & \text{rank}(L) = \text{rank}(A) = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n)$  为  $n \times n$  的对角阵。当对应点为正确匹配内点时,  $w_i = 1$ ; 当对应点为错误匹配野值时,  $w_i = 0$ 。  $w_i$  的取值可以参考式(8)或式(9),后面将做进一步的说明。

由于最终是求解  $A$  的零空间向量  $f$ , 则有,  $L f = 0$ 。于是,式(6)可转化为下面的非线性最小化问题:

$$\arg \min_{f, \mathbf{W}} \|\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{f}\|^2. \quad (7)$$

采用下面算法迭代求解这一最优化问题得到  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{f}$ 。初始时假定所有对应点为正确匹配内点, 即,  $\mathbf{W}$  为  $n \times n$  的单位矩阵。然后, 对  $\mathbf{A}^T \mathbf{W}\mathbf{A}$  进行奇异值分解, 则,  $\mathbf{f}$  为最小奇异值对应的奇异向量。令  $\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{f}$  为残差向量, 则为第对对应点的代数误差。

迭代算法步骤如下:

输入:  $\mathbf{A}$ :  $n \times 9$  的矩阵;  $\delta_{\max}$ : 最大代数误差

输出:  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{f}$

初始化:  $\mathbf{W} = \mathbf{I}_n, \xi = \text{Inf}$

- 1: 循环开始;
- 2:  $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{A}] = \text{svd}(\mathbf{A}^T \mathbf{W}\mathbf{A})$ ; 其中,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_9]$ ;  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_9)$ ;
- 3:  $\mathbf{f} \leftarrow \mathbf{v}_k$ ; 其中  $k: s_k = \min(s_1, \dots, s_9)$ ;
- 4:  $\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ ;
- 5:  $\epsilon_i = \|\mathbf{e}_i\|$ ;
- 6:  $\epsilon_{\max} = Q_{25\%}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ ;
- 7: if  $\epsilon_{\max} > \xi$  then  
return  $\mathbf{W}, \mathbf{f}$   
else  
 $\xi = \epsilon_{\max}$   
end if;
- 8: 采用(8)式更新  $\omega_i$ ;
- 9: 循环结束。

而矩阵  $\mathbf{W}$  中的元素  $\omega_i$  由下面函数进行更新:

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \epsilon_i \leq \max(\epsilon_{\max}, \delta_{\max}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (8)$$

其中  $\epsilon_{\max} = Q_{25\%}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  为所有对应点的代数误差的最低的 25% 分位数。通过引入代数误差阈值  $\delta_{\max}$  避免将正确匹配的内点错认为是野值, 同时加快迭代收敛速度。取  $\delta_{\max} = k\tau/f$ , 其中  $\tau$  为最大重投影误差,  $f$  为相机焦距,  $k$  一般取为 1.4。重复上述步骤直到零空间向量  $\mathbf{f}$  收敛。一般地, 上述迭代过程收敛很快, 在对应点数较多的情况下, 该算法可大大提升计算效率。当不存在野值的情况下, 该方法退化为线性的 8 点算法。

### 3.3 采用几何误差准则进行改进

考虑到上述提出的方法中采用的是代数误差, 没有实际的几何意义。对此, 将点到极线距离作为几何误差进行改进。

改进迭代算法步骤如下:

输入:  $\mathbf{A}$ :  $n \times 9$  的矩阵;  $\delta_{\max}$ : 最大代数误差

输出:  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{f}$

初始化:  $\mathbf{W} = \mathbf{I}_n, \xi = \text{Inf}$

- 1: 循环开始;
- 2:  $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{A}^T \mathbf{W}\mathbf{A})$ ; 其中,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_9]$ ;  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_9)$ ;
- 3:  $\mathbf{f} \leftarrow \mathbf{v}_k$ ; 其中  $k: s_k = \min(s_1, \dots, s_9)$ ;
- 4: 由  $\mathbf{f}$  得到对应的基础矩阵  $\mathbf{F}$ ;
- 5:  $\epsilon_i = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{F}\mathbf{m}_i')^2 + (\mathbf{F}\mathbf{m}_i')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{F}^T \mathbf{m}_i)^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{m}_i)^2}} \right) \| \mathbf{m}_i^T \mathbf{F} \mathbf{m}_i' \|$ ;
- 6:  $\epsilon_{\max} = Q_{25\%}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ ;
- 7: if  $\epsilon_{\max} > \xi$  then  
return  $\mathbf{W}, \mathbf{f}$   
else  
 $\xi = \epsilon_{\max}$   
end if;
- 8: 采用(8)式更新  $\omega_i$ ;
- 9: 循环结束。

得到最终的内点集, 同时基础矩阵也计算得到, 但是算法中将所有的内点都平等对待, 没有区分内点的优劣。为此, 可进一步采用 M-estimators 对得到的内点集进行加权来估计基础矩阵, 提高算法的精确性。或者可通过修改式(8)中的权值函数达到同样的目的, 类似 M-estimators 方法, Huber 给出了一个通用的权值函数, 其定义如式(9), 其中  $\mathbf{r}_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{F} \mathbf{m}_i'$ ,  $\sigma$  的值可以通过式(10)获得:

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & \text{if } |r_i| \leq \sigma \\ \sigma/|r_i|, & \text{if } \sigma < |r_i| \leq 3\sigma \\ 0, & \text{if } |r_i| > 3\sigma \end{cases}, \quad (9)$$

$$\sigma = 1.4826 \left[ 1 + \frac{5}{N-7} \text{median}_i |r_i| \right]. \quad (10)$$

## 4 实验结果与分析

为了验证所提出的方法的有效性和鲁棒性, 分别采用仿真数据和实际图像进行了大量的实验。同时, 与现有的鲁棒性方法进行了对比实验分析, 从精度、稳定性和计算效率 3 方面考量了算法的整体性能。实验中的所有算法采用 Matlab

实现,电脑平台配置为 Inter(R) Core(TM) i7-6500U CPU @2.5 GHz,8 GB 内存。

令  $d(m_i, Fm_i')$  和  $d(m_i', F^T m_i)$  分别表示图像中匹配点对  $m_i$  ( $m_i'$ ) 与相应外极线  $Fm_i'$  ( $F^T m_i$ ) 之间的几何距离。考虑到一对匹配点到对应极线的距离是不对称的,即  $d(m_i, Fm_i') \neq d(m_i', F^T m_i)$ ,这里采用其平均值表示对极几何误差,可写为,

$$\bar{d}_i = \frac{1}{2} (d(m_i, Fm_i') + d(m_i', F^T m_i)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{(Fm_i')_1^2 + (Fm_i')_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(F^T m_i)_1^2 + (F^T m_i)_2^2}} \right] |m_i^T Fm_i'|, \quad (11)$$

其中  $(Fm_i')_i$  为向量  $Fm_i'$  的第  $i$  项。实验中通过式(9)分别计算出每一点对的对极几何误差,最后采用所有匹配点对对极几何误差的均值和标准差作为精度评价指标。

#### 4.1 仿真实验

在实验中,仿真了 125 对匹配点对,遍布于成像平面的各个部分。为了更加真实地模拟实际图像特征提取与匹配引入的误差和错误匹配,在测试数据中同时加入了不同程度的高斯噪声和匹配野值。通过改变数据集中野值的比例和高斯噪声的方差对估计算法的精度和稳定性进行测试。此外,现有的 4 种综合性能较突出的鲁棒性方法 M-estimator, LMedSeig, RANSAC 和 MAPSAC 也加入比较。由于算法估计结果具有一定的随机性,为了得到更真实稳定的结果,实验中对每组数

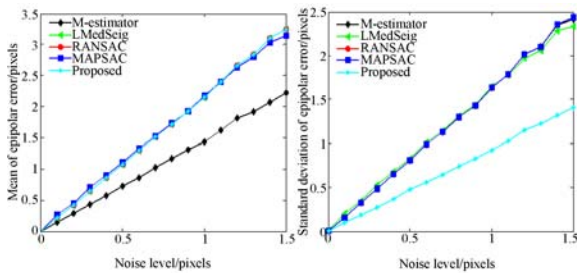
据重复计算了 100 次,所给出的为 100 次计算结果的平均值。

其中,图 2 给出的是对仿真数据集分别加入均值为 0,标准差为 0~1.5 pixel 的高斯噪声情况下不同方法的估计结果,图中显示的为点到极线距离的均值和标准差比较。从图中可看出,随着噪声标准差的递增,估计精度线性下降。其中, M-estimator 方法在不同程度噪声情况下表现更优;所提出的方法与 LMedSeig、RANSAC 和 MAPSAC 方法性能相当。在噪声标准差为 1 pixel 时,点到极线距离的均值在 1.2 pixel 左右,且标准差小于 1 pixel。

表 1 噪声标准差为 1,不同比例的野值情况下,各种方法估计结果比较

Tab.1 Comparison of results by various methods in the case of outliers of different proportions, when standard deviation of noise is 1

Data	M-estimator	LMedSeig	RANSAC	MAPSAC	Proposed
outliers	0.990	1.531	3.933	1.271	1.272
0%	0.640	1.536	11.598	0.948	0.950
outliers	1.023	1.366	21.079	1.191	1.220
10%	0.673	1.548	50.439	0.902	0.922
outliers	1.138	1.594	27.975	1.802	1.489
20%	0.777	1.772	61.182	1.502	1.265
outliers	1.208	1.889	63.523	1.780	1.576
30%	0.925	2.287	94.031	1.655	1.338
outliers	1.509	3.302	59.889	1.791	1.673
40%	1.177	5.058	80.247	1.615	1.399
outliers	1.977	4.273	70.657	2.386	1.395
50%	2.619	7.880	86.680	7.559	1.221
outliers	10.453	16.423	95.367	9.075	1.690
60%	15.189	21.184	101.17	12.818	1.697



(a) 点到极线距离的均值 (b) 点到极线距离的标准差  
(a) Mean of distance from point to pole (b) Standard deviation of distance from point to pole

图 2 仿真数据集在加入不同程度噪声情况下的比较结果

Fig. 2 Comparison results of simulation data sets under different degrees of noise

考虑到实际情况特征点除受噪声干扰外,还有可能存在错误匹配对应。因此,在固定一定程度噪声情况下(实验中加入均值为 0,标准差为 1 pixel 的高斯噪声),通过改变数据集中野值的比例重新进行仿真实验,表 1 给出了比较结果。表中每个单元给出的是点到极线距离的均值和标准差从结果上可看出,在测试数据集存在粗大误差和误匹配情况下,鲁棒性方法可在一定程度上剔除潜在的野值,从而减小其对基础矩阵估计结果的影响。M-estimators 算法对余差平方进行加权

迭代来抑制匹配误差的影响,对误差较小的匹配点集处理效果较好,但其需要线性方法提供一个好的初值。RANSAC 方法采用假设检验的策略,使得内点集数目最大,能够去除部分野值。MAPSAC 不仅能够较好地剔除外点,而且由于其定义的成本误差函数用几何误差(Sampson distance)的大小区分内点的优劣,克服了 RANSAC 算法对内点的优劣不做区分的缺点,鲁棒性和精确性较 RANSAC 算法有较大提高。LMedS 与 RANSAC 思想类似,不同的是 LMedS 目标是使得对极几何距离误差的中值最小,可有效地去除误匹配点。而所提出的方法同样具有较好的稳定性,在对加入不同比例野值的数据集的仿真测试中,可实现与 LMedS、MAPSAC 方法相当的估计精度。

表 2 噪声标准差为 0.5,40%野值情况下,各种方法估计结果比较

Tab.2 Comparison of results by various methods in the case of outliers is 40%, standard deviation of noise is 0.5

Data	M-estimator	LMedS-eig	RANSAC	MAPSAC	Proposed
	9.344	20.288	93.083	0.514	0.865
20	8.619	33.243	92.509	0.491	1.956
	7.872	12.374	77.603	3.021	1.601
30	8.106	12.548	76.458	5.155	2.047
	16.626	31.643	121.16	1.404	1.214
40	18.852	33.962	134.27	1.679	1.796
	21.542	18.499	134.71	3.747	0.771
60	24.184	28.952	139.19	4.955	1.081
	14.123	13.302	93.008	4.019	1.358
80	18.960	15.058	126.77	5.685	1.930
	10.201	29.868	134.54	2.767	1.793
100	11.449	35.657	152.21	4.692	1.851
	8.509	16.405	129.89	5.626	1.673
125	10.177	17.268	134.25	6.476	1.789

此外,实际情况中特征点的数量有可能变化。因此,在固定一定程度噪声情况下(实验中加入均值为 0,标准差为 0.5 pixel 的高斯噪声),通过改变数据集中特征点的比例重新进行仿真实验,我们在每一个数据集中加入了 40%的野值点,表 2 给出了比较结果。表中每个单元给出的是点到极线距离的均值和标准差,从结果上可看出,文章中的几种方法可在一定程度上剔除潜在的野值,从而减小其对基础矩阵估计结果的影响。

RANSAC 方法采用假设检验的策略,使得内点集数目最大,能够去除一部分野值。MAPSAC 不仅能够较好地剔除外点,而且也克服了 RANSAC 算法对内点的优劣不做区分的缺点,鲁棒性和精确性较 RANSAC 算法有非常大的提高。LMedS 与 MAPSAC 类似,也能较有效地去除误匹配点。而所提出的方法相比以上方法具有较好的稳定性,在对加入比例为 40%野值的数据集的仿真测试中,可实现与 MAPSAC 方法相当甚至更优的估计精度。

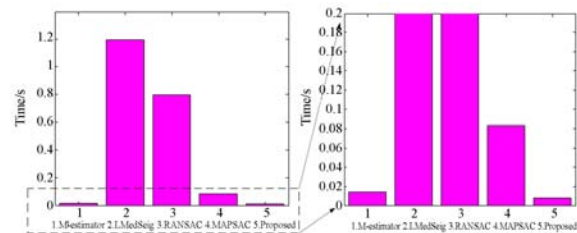


图 3 仿真数据平均处理时间比较,(b)为(a)的局部放大图

Fig.3 Comparison of average processing time of simulated data, in which (b) is a partial enlarged view of (a).

为了考察算法的处理速度,对各种方法的测试运行时间进行了统计。图 3 中显示的是平均计算时间,大体可反映不同方法的计算效率。从图中可以看出所提出的方法平均处理时间短于其他鲁棒性方法,在计算效率方面具有明显优势。这是因为,所提出的方法不需要进行多次假设检验的步骤,而是将野点剔除融入到计算基础矩阵的过程中,省去了将野点剔除作为独立步骤的时间消耗。

## 4.2 实际图片测试

为进一步验证所提出的方法的有效性,对不同场景的真实图像数据进行实验。这里采用张<sup>[19]</sup>方法来获取实际图像的特征匹配点对,首先,Harris 角点算子用来提取图像中的角点特征,之后再基于局部区域像素相关的方法实现两幅图中对应点的匹配。图 4 给出的是其中 4 幅不同场景的实际图像,匹配对应点集用十号表示。采用所提出的方法估计得到对应的基础矩阵,在图 4 中,随机选取了 40 组内点集(图中 o 表示)并绘制了其对应的外极线(图中的直线段)。从图中可看出,特征点都很好地落在了所估计的对应极线上,精确地表现了所得到的对极几何关系。

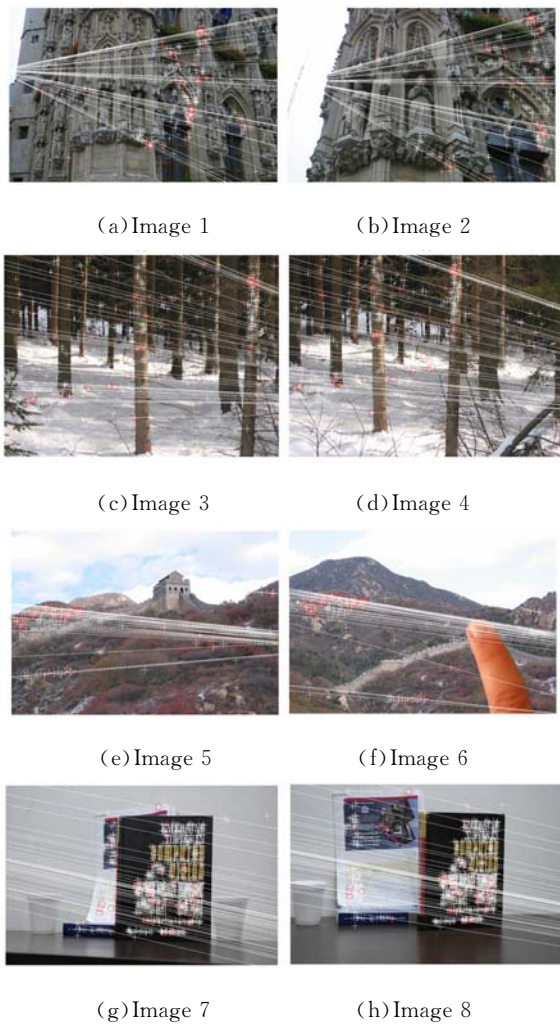


图 4 采用所提出的方法对不同场景的图像的估计得到的对极几何关系

Fig. 4 Epipolar geometry is obtained by utilizing the proposed method for the estimation of images of different scenes

表 3 给出的分别是采用不同鲁棒性方法得到的点到极线距离均值和标准差的数值比较结果 (Image1~Image4 分别对应了图 4 中的 4 幅测试图像)。在对不同实际图像的测试中,可实现与 LMedSeig、MAPSAC 方法相当甚至更优的估计精度。从中可得到与仿真实验一致的结论:所提出的方法具有较好的稳定性,对噪声和误匹配的适应性较强。为了更加直观地比较算法的鲁棒性,给出两组真实图像的处理结果(如图 5、6)。图 5(a)和图 6(a)显示了两组初始匹配点集,图 5(b)~(f)和图 6(b)~(f)分别是经 M-estimator、LMedSeig、RANSAC、MAPSAC 和所提出算法处理后获得的内点集。从图 5 和图 6 可以看出,

表 3 不同方法对于真实图像数据的估计结果比较

Tab. 3 Comparison of different methods for estimation of real image data

Methods	M-esti mator	LmedS -eig	RANS -AC	MAPS -AC	Propos -ed
Image1	20.144	1.301	122.67	2.978	6.043
Image2	26.529	3.343	157.88	4.998	4.623
Image3	64.853	91.597	148.28	38.053	8.609
Image4	57.795	78.787	153.08	69.129	6.793
	48.839	51.313	545.32	8.419	5.306
	56.229	63.776	2352.3	9.041	6.336
	0.105	0.260	17.506	0.399	0.308
	0.082	0.456	46.689	1.015	0.733

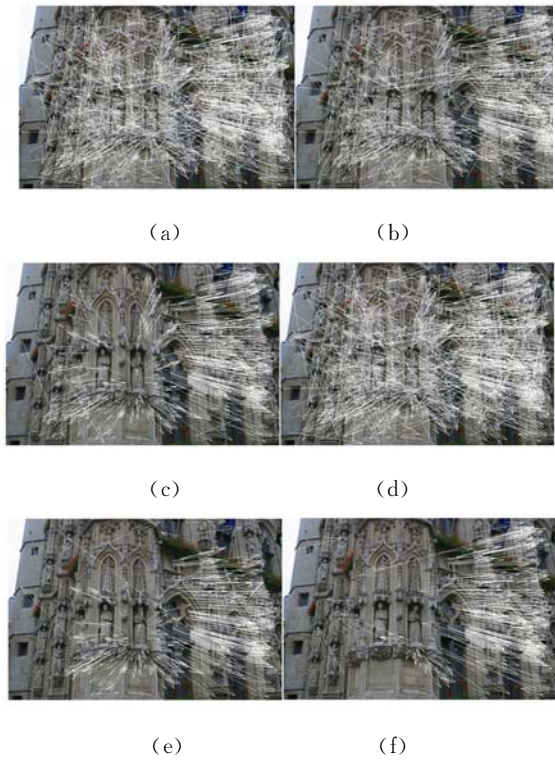


图 5 图像数据中不同方法计算得到的内点集比较,其中(a)为初始匹配点集,(b)~(f)分别对应为 M-estimator、LMedSeig、RANSAC、MAPSAC 和所提出的方法获得的内点集

Fig. 5 In the image data, the internal set of points calculated by different methods is compared, among which (a) is the initial matching point set, and (b)~(f) corresponds to M-estimator, LMedSeig, RANSAC, MAPSAC, and the inner set of points obtained by the proposed method

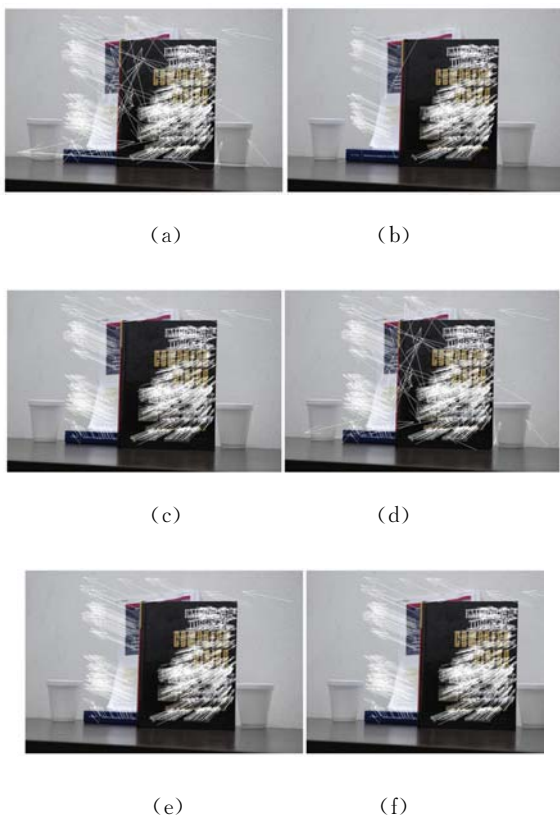


图 6 图像数据中不同方法计算得到的内点集比较, (a)~(f)表示的含义与图 5 中对应给出的一致

Fig. 6 Comparison of interior point sets computed by different methods in image data. The meaning of (a) - (f) is consistent with that given in Figure 5

M-estimator 方法对外点的处理判断不好, 图 5 (b) 中一些正确匹配的对应点也被剔除, 而图 6 (b) 中大量的外点却仍保留下来; RANSAC 处理效果也较差, 获得的内点集中仍有大量的外点; LMedSeig 和 MAPSAC 算法能够剔除大部分外点, 鲁棒性较好; 本文算法的鲁棒性与 LMedSeig 和 MAPSAC 算法相当, 获得的内点集中没有或只有极少错误匹配点, 而且正确匹配点的变化趋势一致性较好。

除了对鲁棒性和精确性这两方面的比较之外, 实验中对算法的计算效率同样做了对比验证。图 7 给出了 M-estimator、LMedSeig、RANSAC、MAPSAC 和所提出的算法对所有实际图像数据处理的时间比较结果。从中可以看出, 本文算法处理速度要快于其他 4 种鲁棒方法, 处理一

组图像的平均时间约为 18 ms, 具有较强的实时性能。

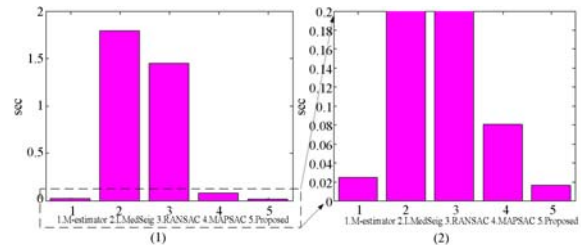


图 7 真实图像数据平均处理时间比较, 其中 (2) 为 (1) 的局部放大效果图

Fig. 7 A comparison of the average processing time of simulated data, in which (2) is a partial enlarged view of (1).

仿真和实际实验结果都表明: 所提出的算法对噪声和误匹配的适应性较强, 可得到与现有鲁棒性方法相当的估计精度。此外, 在实时性方面, 所提出的方法具有更明显的优势, 处理速度更快, 实现简单, 计算效率更高。

## 5 结 论

本文在现有的几种基础矩阵估计的基础上, 针对野值对估计结果的影响提出了一种新的快速鲁棒的基础矩阵估计方法。该方法主要将野值去除融入到计算基础矩阵的过程中, 而不再把它作为一个独立的处理步骤。通过迭代将潜在的错误对应点剔除, 从而实现基础矩阵的稳定估计。在每次迭代过程中, 采用对极几何误差准则来识别野值, 同时获得基础矩阵的估计结果。该迭代过程收敛较快, 即使存在大量匹配野值情况下, 计算值也会很快趋于稳定。仿真和实际实验结果均一致表明: 与现有基于假设检验的鲁棒方法相比, 所提出的算法在保证类似估计精度的同时还在计算效率方面有极大的提升, 相比最快的 M 估计法有 30% 以上的速度提升, 而相比于估计精度较优的 MAPSAC 算法甚至达到 4 倍以上的速度提升。因此, 本文为基础矩阵估计在三维重建、运动估计、摄像机自标定、匹配和跟踪中的应用奠定了基础, 下一步工作就是将本文所提出的算法应用在这些领域中。

## 参考文献:

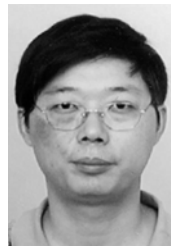
- [1] 向长波, 谢丹, 刘太辉, 等. 估计多视点摄像机姿态的两步法[J]. 光学精密工程, 2008, 16(10): 1982-1987.  
XIANG CH B, XIE D, LIU T H, *et al.*. A two-step algorithm for estimating postures of cameras located in different points of view[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(10): 1982-1987. (in Chinese)
- [2] 张灵飞, 陈刚, 叶东, 等. 用自由移动的刚性球杆校准多摄像机内外参数[J]. 光学精密工程, 2009, 17(8): 1942-1952.  
ZHANG L F, CHEN G, YE D, *et al.*. Calibrating internal and external parameters of multi-cameras by moving freely rigid ball bar[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(8): 1942-1952. (in Chinese)
- [3] 江剑鸣, 闫志杰, 段晓杰, 等. 相机自运动参数的鲁棒性估计[J]. 红外与激光工程, 2010, 39(6): 1168-1172.  
WANG J M, YAN ZH J, DUAN X J, *et al.*. Robust estimation of camera ego-motion parameters[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(6): 1168-1172. (in Chinese)
- [4] LONGUET-HIGGINS H S. *A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections* [M]. Fischler M A, Firschein O, eds. *Readings in Computer Vision*. Amsterdam: Elsevier Inc, 1981: 133-135.
- [5] TORR P H S, MURRAY D W. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 24(3): 271-300.
- [6] ARMANGUÉ X, SALVI J. Overall view regarding fundamental matrix estimation[J]. *Image and Vision Computing*, 2003, 21(2):205-220.
- [7] HARTLEY R I. In defense of the 8-point algorithm[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(6): 580-593.
- [8] FATHY M E, HUSSEIN A S, TOLBA M F. Fundamental matrix estimation: A study of error criteria[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2011, 32(2): 383-391.
- [9] 陈付幸, 王润生. 基于预检验的快速随机抽样一致性算法[J]. 软件学报, 2005, 16(8): 1431-1437.  
CHEN F X, WANG R SH. Fast RANSAC with preview model parameters evaluation[J]. *Journal of Software*, 2005, 16(8): 1431-1437. (in Chinese)
- [10] TORR P H S, ZISSERMAN A. MLESAC: a new robust estimator with application to estimating image geometry[J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2010, 78(1): 138-156.
- [11] TORR P H S. Bayesian model estimation and selection for epipolar geometry and generic manifold fitting[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2002, 50(1): 35-61.
- [12] 唐永鹤, 胡旭峰, 卢焕章. 应用序贯相似检测的基本矩阵快速鲁棒估计[J]. 光学精密工程, 2011, 19(11): 2759-2766.  
TANG Y H, HU X F, LU H ZH. Fast and robust fundamental matrix estimation based on SSDA[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2011, 19(11): 2759-2766. (in Chinese)
- [13] 黄春燕, 韩雯, 韩慧妍, 等. 一种改进的基础矩阵估计算法[J]. 小型微型计算机系统, 2014, 35(11): 2578-2581.  
HUANG CH Y, HAN X, HAN H Y, *et al.*. Improved fundamental matrix estimation algorithm[J]. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2014, 35(11): 2578-2581. (in Chinese)
- [14] 张永祥, 古佩强, 穆铁英. 改进的RANSAC基础矩阵估计算法[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(9): 2084-2087.  
ZHANG Y X, GU P Q, MU T Y. Improved RANSAC algorithm for fundamental matrix estimation[J]. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2016, 37(9): 2084-2087. (in Chinese)
- [15] ZHOU F, ZHONG C, ZHENG Q. Method for fundamental matrix estimation combined with feature lines[J]. *Neurocomputing*, 2015, 160: 300-307.
- [16] 张永祥, 穆铁英, 张伟功, 等. 一种新的估计基础矩阵的高精度鲁棒算法[J]. 微电子学与计算机, 2016, 33(3): 32-36.  
ZHANG Y X, MU T Y, ZHANG W G, *et al.*. A new fundamental matrix estimation algorithm of

- high accuracy and robustness [J]. *Microelectronics&Computer*, 2016, 33(3): 32-36. (in Chinese)
- [17] BUGARIN F, BARTOLI A, HENRION D, *et al.*. Rank-constrained fundamental matrix estimation by polynomial global optimization versus the eight-point algorithm[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2015, 53(1): 42-60.
- [18] ZHENG Y Q, SUGIMOTO S, OKUTOMI M. A practical rank-constrained eight-point algorithm for fundamental matrix estimation[C]. *Conference in Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE*, 2013, 9: 1546-1553.
- [19] ZHANG Z Y, DERICHE R, FAUGERAS O, *et al.*. A robust technique for matching two uncalibrated images through the recovery of the unknown epipolar geometry[J]. *Artificial Intelligence*, 1995, 78(1-2): 87-119.

作者简介:



颜 坤(1989—),男,四川遂宁人,博士研究生,2009年于四川师范大学获得学士学位,主要从事计算机视觉及图像处理方面的研究。E-mail: yankunioe@163.com



刘恩海(1964—),男,四川达州人,研究员,博士生导师,1987年大连理工学院获得学士学位,主要从事光电精密计量测试技术的研究。E-mail: leh@ioe.ac.cn