

文章编号 1004-924X(2018)10-2415-08

## 激光跟踪仪多边测量的不确定度评定

任瑜<sup>1,2</sup>, 刘芳芳<sup>2</sup>, 张丰<sup>2</sup>, 傅云霞<sup>2\*</sup>, 郝继贵<sup>1</sup>

(1. 天津大学精密测试技术及仪器国家重点实验室, 天津 300072;

2. 上海市计量测试技术研究院机械与制造计量技术研究所, 上海 201203)

**摘要:**激光跟踪仪多边测量是大型高端装备制造现场溯源的重要手段,正确评定其不确定度是确保制造过程量值统一、结果可靠的关键。本文提出了一种准确、快速的激光跟踪仪多边测量的不确定度评定方法。从仪器误差、环境干扰及靶球制造误差等方面分析激光跟踪仪多边测量的不确定度来源。针对多边测量的输出量为多维向量的特点,重点研究基于多维不确定度传播律(GUM法)的不确定度合成方法,同步评定目标点坐标和跟踪仪站位的不确定度。最后,介绍了点到点长度的不确定度计算方法。实验表明:GUM法评定的不确定度结果与蒙特卡洛法(MCM法)的结果相比,坐标不确定度偏差小于0.000 2 mm,相关系数偏差小于0.01,满足数值容差,且GUM法用时仅为MCM法的0.08%;点到点长度测试的En值均小于1。因此,基于GUM法评定激光跟踪仪多边测量的不确定度具有可行性及高效性,且评定结果正确、可靠。

**关键词:**激光跟踪仪;多边测量;测量不确定度;多维测量模型

中图分类号:TN249;TB921 文献标识码:A doi:10.3788/OPE.20182610.2415

## Evaluation of uncertainty in multilateration with laser tracker

REN Yu<sup>1,2</sup>, LIU Fang-fang<sup>2</sup>, ZHANG Feng<sup>2</sup>, FU Yun-xia<sup>2\*</sup>, ZHU Ji-gui<sup>1</sup>

(1. *State Key Laboratory of Precision Measuring Technology and Instruments, Tianjin University, Tianjin 300072, China;*

2. *Mechanics and Manufacture Division, Shanghai Institute of Measurement and Testing Technology, Shanghai 201203, China)*

\* *Corresponding author, E-mail: fuyx@simt.com.cn*

**Abstract:** Multilateration with laser tracker is an important method for on-site traceability in large-scale equipment manufacturing processes. An accurate evaluation of uncertainty is the key to ensuring quantitative accuracy in manufacturing processes. In this paper, we reported an accurate and fast technique for the evaluation of uncertainty in multilateration with laser tracker. First, the sources of uncertainty in multilateration were analyzed; these primarily include instrument errors, environmental conditions, and manufacturing errors of the target. Next, based on the propagation of uncertainty for multivariate measurement error models (GUM), the uncertainty in multilateration with laser tracker was estimated. Finally, the uncertainty in the point-to-point length was calculated. Our experiments reveal that the differences between the uncertainty values evaluated using GUM and Monte Carlo method (MCM) are within the numerical tolerance limit. The deviation in the uncertainty in coordi-

收稿日期:2018-05-03;修订日期:2018-05-23.

基金项目:国家质量监督检验检疫总局科技计划项目(No. 2017QK091)

nates is less than 0.000 2 mm, whereas that in the correlation value is less than 0.01. The time required for the GUM method is only 0.08% of the time required for the MCM method, and the value of En obtained from the point-to-point length test is less than 1. Thus, this study reveals that the evaluation of uncertainty in multilateration with laser tracker based on the GUM method is feasible and efficient, and the obtained results are accurate and reliable.

**Key words:** laser tracker; multilateration; uncertainty; multivariate measurement models

## 1 引言

激光跟踪仪多边测量是利用多台或多个站位的跟踪仪测量同一组目标点,通过多组跟踪仪-目标点距离交会,同步定位目标点和跟踪仪。该方法只采用跟踪仪的干涉测距信息,具有溯源链短且理论精度高的优点;此外,它采用网络化测量模式,可在扩展量程的同时不损失精度。因此,激光跟踪仪多边测量成为大型高端装备制造中几何量现场溯源的重要手段<sup>[1-2]</sup>。

近年来,国内外研究人员就激光跟踪仪多边测量的算法设计、硬件开发、应用扩展等方面积极开展研究<sup>[3-11]</sup>。英国国家物理实验室(NPL)是较早开展相关研究的机构,开发了 Multilateration 软件,并深入研究了自标定、动态加权、布局优化等关键技术,所设计的新型跟踪仪结构成为 Etalon 公司商用激光跟踪干涉仪的雏形<sup>[3-5]</sup>。国内天津大学重点研究了基于激光跟踪仪多边测量的精密三维控制场构建方法,并应用在飞机表面形貌测量中<sup>[6-8]</sup>。北京工业大学则重点研究了激光跟踪仪多边测量在三坐标测量机、数控机床等的误差修正中的应用<sup>[9-12]</sup>。然而,现有研究较少涉及激光跟踪仪多边测量的不确定度评定,使得测量结果的可靠性难以得到准确评价,直接影响到该测量方法的具体应用。

激光跟踪仪多边测量的被测量(输出量)是包含目标点坐标和仪器(站位)坐标的多维向量,《JJF 1059.1—2012 测量不确定度评定与表示》及《JJF 1059.2—2012 用蒙特卡洛法评定测量不确定度》中均未提出评定此类多维输出量模型不确定度的相关理论<sup>[13]</sup>。目前,国内外研究人员多采用蒙特卡洛法评定多维输出量模型的不确定度,但是该方法的评定精度与样本量相关,精度越高,样本量越大,导致计算效率降低,特别是多边

测量计算涉及优化迭代,评定精度与计算效率难以兼顾<sup>[14-19]</sup>。因此,研究准确、快速的跟踪仪多边测量不确定度评定方法具有重要意义。

本文对激光跟踪仪多边测量的不确定度评定方法进行研究。首先,系统分析并量化激光跟踪仪多边测量的不确定度来源。然后,重点研究基于多维不确定度传播律(GUM法)<sup>[13,20]</sup>的不确定度合成方法,同步评定目标点坐标和跟踪仪站位的不确定度。最后,介绍了点到点长度的不确定度计算方法。实验证明,基于 GUM 法评定激光跟踪仪多边测量的不确定度具有可行性及高效性,且评定结果正确、可靠。

## 2 激光跟踪仪多边测量原理

多边测量是利用跟踪仪的干涉测距精度高且可直接溯源至激光波长的特点,通过多个站位的跟踪仪测量同一组目标点相对跟踪仪的距离,同步计算目标点坐标及跟踪仪位置,可有效缩短坐标测量的溯源链,且在合理站位布局下提高坐标测量精度。

假设激光跟踪仪在  $n$  个站位测量  $m$  个目标点,记站位  $j$  处跟踪仪测得  $j$  到目标点  $i$  的距离值为  $l_{ij}$ ,令目标点  $i$  的坐标为  $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ ,站位  $j$  的坐标为  $\mathbf{T}_j = (X_j, Y_j, Z_j)^T$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ),则距离误差方程为:

$$f_{ij}(l_{ij}, \mathbf{T}_j, \mathbf{P}_i) = \sqrt{(X_j - x_i)^2 + (Y_j - y_i)^2 + (Z_j - z_i)^2} - l_{ij} \quad (1)$$

对于  $m$  个目标点和  $n$  个站位,可建立  $mn$  个距离误差方程,且存在  $3(m+n)$  个未知量。需要说明的是,定位目标点和跟踪仪前,须先建立全局参考系,一般选择 3 个站位(或目标点),以第 1 个站位为原点,以第 1 个站位到第 2 个站位的方向为轴,以 3 个站位确定的平面为 XOY 面,此时未

知量数目减少至  $3(m+n)-6$ 。

综上,多边测量模型可表示为:

$$\text{find } \mathbf{V}, \min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} f_{ij}^2(l_{ij}, \mathbf{T}_j, \mathbf{P}_i), \quad (2)$$

其中未知量  $\mathbf{V}$  是目标点坐标和站位坐标的集合,即:

$$\mathbf{V} = (X_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, Z_4, \dots, X_n, Y_n, Z_n, x_1, y_1, z_1, \dots, x_m, y_m, z_m). \quad (3)$$

此外,跟踪仪干涉测距是不等精度测量,且距离误差的分布与距离成正比,故对距离误差方程  $f_{ij}$  进行加权,一般权值  $\omega_{ij}$  与距离值  $l_{ij}$  的不确定度的平方成反比。

对于式(2)多边测量模型,当  $n \geq 4$  且  $m \geq 6$  时,采用牛顿法、Levenberg-Marquardt 法等算法即可同步解算目标点坐标和跟踪仪站位坐标。

### 3 跟踪仪多边测量的不确定度评定

为确保目标点坐标的可靠性,必须对激光跟踪仪多边测量进行完整的不确定度评定。通常,不确定度评定流程可分为:分析不确定度来源并评定对应的标准不确定度分量、建立测量模型并合成被测量(输出量)的测量不确定度<sup>[20]</sup>。

#### 3.1 跟踪仪多边测量中不确定度来源分析

如式(1)和式(2)所示的跟踪仪多边测量模型中,跟踪仪在  $n$  个站位测得这些站位到  $m$  个目标点的距离值是输入量,而  $m$  个目标点的坐标以及  $n$  个站位的坐标均为输出量。这意味着,距离值不准确是导致目标点坐标不确定度的最主要来源;而站位坐标与目标点坐标同步解算,其不确定度不对目标点坐标的不确定度产生贡献。因此,需要评定距离值的不确定度,具体步骤如下:

(1)跟踪仪干涉测距的仪器误差是距离值不确定度的重要来源,可在跟踪仪说明书或校准证书中查询。以 Leica AT930 跟踪仪为例,其说明书中标称,干涉测距的最大允许误差为  $\pm 0.5 \mu\text{m}/\text{m}$ ,按均匀分布,则由干涉测距引入的标准不确定度为:

$$u_{\text{FM}} = \frac{0.5}{\sqrt{3}} \times 10^{-6} l. \quad (4)$$

(2)环境干扰造成大气折射率变化,也会引起距离误差。通常,跟踪仪配备有温度、湿度及压力传感器,可实时对大气折射率进行补偿,但当温度、

压力和湿度的不均匀性或波动较大时,仍需考虑补偿不完全对距离值不确定度的贡献。例如测量空间中温度梯度为  $0.5 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ ,压力和湿度变化不明显,参照《ISO/TR 16015 Geometrical product specifications (GPS)— Systematic errors and contributions to measurement uncertainty of length measurement due to thermal influences》<sup>[21]</sup>,由环境补偿不完全引入的标准不确定度为:

$$u_{\text{E}}(l) = 93.0 \times 10^{-8} \times \frac{0.5}{\sqrt{3}} l. \quad (5)$$

(3)综合上述两部分分量,则距离值  $l_{ij}$  的标准不确定度为:

$$u_{ij} = \sqrt{(u_{\text{FM}}(l_{ij}))^2 + (u_{\text{E}}(l_{ij}))^2} \approx 0.4 \times 10^{-6} l_{ij}. \quad (6)$$

此外,跟踪仪多边测量的前提是目标点位置在整个测量过程中不发生变化。测量过程中,由于跟踪仪的靶球并非全周,而是具有一定张角,从不同站位测量时,常需转动靶球使它对准跟踪仪。理论上这一过程靶球的球心位置不变,但是实际上,跟踪仪测量的是靶球的光学中心,由于存在制造误差,导致不同站位测量的目标点位置变化,具体表现为:靶球的光学中心与球心无法重合,存在光学中心位置度误差;靶球存在轮廓误差,导致靶球转动时光学中心跳动;靶球半径存在误差,如同同一目标点处更换靶球,也会导致靶球的光学中心变动。因此,靶球的制造误差也是目标点坐标的不确定度来源之一。

以 Leica RRR 靶球为例,光学中心位置度为  $\pm 6 \mu\text{m}$ ,面轮廓度为  $\pm 1.5 \mu\text{m}$ ,半径公差为  $\pm 2.5 \mu\text{m}$ ,按均匀分布,则由靶球制造误差引起的目标点跳动的标准不确定度如下:

单一靶球测量时,

$$u_{\text{b}} = \frac{\sqrt{6^2 + 1.5^2}}{\sqrt{3}} \approx 3.6 \mu\text{m}. \quad (7)$$

多个靶球测量时,

$$u_{\text{b}} = \frac{\sqrt{6^2 + 1.5^2 + 2.5^2}}{\sqrt{3}} \approx 3.9 \mu\text{m}. \quad (8)$$

#### 3.2 跟踪仪多边测量的不确定度合成

如第 2 节所述,跟踪仪多边测量中输出量  $\mathbf{V}$  是一个  $3(m+n)-6$  维向量,包含目标点坐标和跟踪仪站位坐标。因此,输出量  $\mathbf{V}$  的不确定度不仅包括每个分量的不确定度(标准差),还涉及不

同分量间的相互不确定度(协方差)。对于此类多维输出量的不确定度,《JCGM 102:2011 Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Extension to any number of output quantities》<sup>[20]</sup>推荐了两种合成方法:一种基于不确定度传播律,称为 GUM 法;另一种基于蒙特卡洛法,称为 MCM 法。两种方法的比较见表 1。

表 1 GUM 法与 MCM 法比较

Tab.1 Comparison between GUM and MCM methods

	GUM 法	MCM 法
应用	不确定度传递函数直观,易于分析输入量对输出量的影响	难以直接表示不确定度传递关系
计算	计算涉及大量求导,计算复杂	运算量大,当测量模型涉及迭代求解,该特点进一步放大
适用范围	输入量服从对称的概率分布,输出量服从近似从正态分布或 $t$ 分布,且测量模型为或近似为线性函数的情况。JJF 1059.1 中说明,可以用 MCM 法验证 GUM 法,当验证分析结果一致时,仍推荐使用 GUM 法进行不确定度分析。	无论测量模型明显呈非线性或输入量、输出量明显非对称,均可适用

鉴于跟踪仪多边测量模型为非线性模型,但求解涉及迭代,本文仍采用 GUM 法进行不确定度合成,并利用 MCM 法进行验证。

依据 GUM 法中的多维不确定度传播律,对于模型  $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{D})=0$ , 输出量  $\mathbf{V}$  的标准不确定度表示为:

$$\mathbf{u}_V = \frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}} \mathbf{u}_I \left( \frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}} \right)^T, \quad (9)$$

其中:  $\mathbf{u}_V$ 、 $\mathbf{u}_I$  分别为输出量  $\mathbf{V}$  和输入量  $\mathbf{I}$  的标准不确定度矩阵(协方差矩阵),即矩阵对角线上元素为各分量标准不确定度的平方,非对角线上元素为对应分量间的相互不确定度;  $\frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}}$  称为灵敏度矩阵,即输出量  $\mathbf{V}$  相对于输入量  $\mathbf{I}$  的雅可比矩阵,根据模型  $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{D})=0$  计算。

针对激光跟踪仪多边测量进行具体分析:输

出量  $\mathbf{V}$  如式(3)所示;输入量  $\mathbf{I}$  由 3.2 节所述不确定度来源(见表 2)组成,如式(10)所示;对于标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_I$ ,鉴于跟踪仪的各次测量相互独立,故其非对角线元素均为 0,如式(11)所示。

表 2 跟踪仪多边测量的不确定度来源

Tab.2 Uncertainty sources in multilateration with laser tracker

距离值 $l_{ij}, i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$	不确定度来源(输入量)	标准不确定度分量
目标点跳动	$\Delta x_{ij}$	$u_b$
$i=1,2,\dots,m$	$\Delta y_{ij}$	$u_b$
$j=1,2,\dots,n$	$\Delta z_{ij}$	$u_b$

$$\mathbf{I} = (l_{11}, \Delta x_{11}, \Delta y_{11}, \Delta z_{11}, \dots, l_{nm}, \Delta x_{nm}, \Delta y_{nm}, \Delta z_{nm}), \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_I = \text{diag}(u_{l_{11}}^2, u_b^2, u_b^2, u_b^2, \dots, u_{l_{nm}}^2, u_b^2, u_b^2, u_b^2), \quad (11)$$

然后计算灵敏度矩阵  $\frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}}$ 。

首先,第 2 节所述的跟踪仪多边测量模型中未包含目标点跳动,故须先量化目标点跳动对测量的影响。如图 1 所示,在站位  $j$  处测量目标点  $i$  (图中点 A) 时,实际瞄准的靶球光学中心坐标  $(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  (图中点  $A_1$ ) 为:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \Delta x_{ij} \\ y_i + \Delta y_{ij} \\ z_i + \Delta z_{ij} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

因此,式(1)须修改为:

$$f'_{ij}(\mathbf{I}_{ij}, \mathbf{T}_j, \mathbf{P}_i) = \sqrt{(X_j - x_{ij})^2 + (Y_j - y_{ij})^2 + (Z_j - z_{ij})^2} - l_{ij}, \quad (13)$$

其中:  $\mathbf{I}_{ij} = (l_{ij}, \Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}, \Delta z_{ij})$ , 且取目标点跳动  $(\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}, \Delta z_{ij}) = (0, 0, 0)$ 。

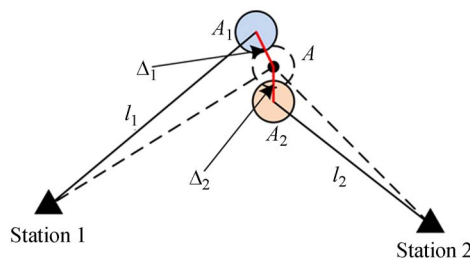


图 1 激光跟踪仪测量靶球示意图

Fig. 1 Schematic of laser tracker measuring SMR

将式(13)代入式(2),得:

$$\text{find } \mathbf{V}, \min F' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} f'^2_{ij}(\mathbf{I}_{ij}, \mathbf{T}_j, \mathbf{P}_i). \quad (14)$$

然后,须由式(14)确定等式关系  $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{D})=0$ 。根据最优化原理,当函数  $F'$  取最小值时,它对输出量  $\mathbf{V}$  的导数为零,即:

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{D}) = \frac{dF'}{d\mathbf{V}} = 0. \quad (15)$$

最后,利用隐函数求导得灵敏度矩阵  $\frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}}$  为:

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{I}} = - \left( \frac{d\mathbf{G}^T}{d\mathbf{V}} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{G}^T}{d\mathbf{I}}. \quad (16)$$

综上,将式(11)、式(16)代入式(9),计算得到输出量  $\mathbf{V}$  的标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_V$ , 如式(17)所

示。观察矩阵  $\mathbf{u}_V$ , 其对角线上  $3 \times 3$  的方阵(□标注部分), 分别表示站位的标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_{T_j}$  和目标点  $i$  的标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_{P_i}$ 。根据《JCGM 102:2011》<sup>[20]</sup>, 目标点(或站位)的标准不确定度矩阵表示的几何意义为: 目标点(或站位)坐标的可能值所处于的区域, 即包含区域, 是以其坐标为中心的椭球形, 椭球的轴与标准不确定度矩阵的特征向量平行, 轴向半径分别为标准不确定度矩阵的特征值的平方根乘以包含概率。

$$\mathbf{u}_V = \begin{bmatrix} u^2(X_2) & u(X_2, X_3) & u(X_2, Y_3) & \cdots & u(X_2, X_j) & u(X_2, Y_j) & u(X_2, Z_j) & \cdots & u(X_2, x_i) & u(X_2, y_i) & u(X_2, z_i) & \cdots \\ u(X_3, X_2) & u^2(X_3) & u(X_3, Y_3) & & & u(X_3, Y_j) & & & & u(X_3, y_i) & & \\ u(Y_3, X_2) & u(Y_3, X_3) & u^2(Y_3) & & & u(Y_3, Y_j) & & & & u(Y_3, y_i) & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ u(X_j, X_2) & & & & \boxed{\begin{matrix} u^2(X_j) & u(X_j, Y_j) & u(X_j, Z_j) \\ u(Y_j, X_j) & u^2(Y_j) & u(Y_j, Z_j) \\ u(Z_j, X_j) & u(Z_j, Y_j) & u^2(Z_j) \end{matrix}} & & & & & & u(X_j, y_i) & & \\ u(Y_j, X_2) & & & & & \vdots & & & & u(Y_j, y_i) & & \\ u(Z_j, X_2) & & & & & \ddots & & & & u(Z_j, y_i) & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ u(x_i, X_2) & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} u^2(x_i) & u(x_i, y_i) & u(x_i, z_i) \\ u(y_i, x_i) & u^2(y_i) & u(y_i, z_i) \\ u(z_i, x_i) & u(z_i, y_i) & u^2(z_i) \end{matrix}} & & & \\ u(y_i, X_2) & u(y_i, X_3) & u(y_i, Y_3) & \cdots & u(y_i, X_j) & u(y_i, Y_j) & u(y_i, Z_j) & \cdots & & & & \\ u(z_i, X_2) & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (17)$$

### 3.3 点到点长度的不确定度计算

跟踪仪多边测量中,常涉及两目标点间长度的计算,用以验证目标点坐标的精度,或为其他测量系统提供长度标准值。因此,这里在目标点不确定度基础上计算点到点长度的不确定度。

目标点  $s_1$  到目标点  $s_2$  的长度  $L_s$  可表示为:

$$L_s = \sqrt{(x_{s1} - x_{s2})^2 + (y_{s1} - y_{s2})^2 + (z_{s1} - z_{s2})^2}, \quad (18)$$

其中  $s_1, s_2=1, 2, \dots, m$ , 且  $s_1 \neq s_2$ 。

根据测量不确定度传播律,长度  $L_s$  的标准不确定度为:

$$\mathbf{u}_{L_s} = \frac{dL_s}{d\mathbf{I}_s} \mathbf{u}_{\mathbf{I}_s} \left( \frac{dL_s}{d\mathbf{I}_s} \right)^T, \quad (19)$$

其中:输入量  $\mathbf{I}_s = (x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}, x_{s2}, y_{s2}, z_{s2})$ , 其标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_{\mathbf{I}_s}$  由目标点  $s_1$  的标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_{P_{s1}}$ 、目标点  $s_2$  的标准不确定度矩阵  $\mathbf{u}_{P_{s2}}$ 、以

及目标点  $s_1$  和目标点  $s_2$  之间的协方差  $\mathbf{u}_{P_{s1}, P_{s2}}$  组成,如式(20)所示:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{I}_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{P_{s1}} & \mathbf{u}_{P_{s1}, P_{s2}} \\ \mathbf{u}_{P_{s1}, P_{s2}} & \mathbf{u}_{P_{s2}} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

需要说明的是,由于目标点  $s_1$  和目标点  $s_2$  同步解算,互相不独立,故协方差  $\mathbf{u}_{P_{s1}, P_{s2}}$  不为 0, 须由式(17)中摘取。灵敏度向量  $\frac{dL_s}{d\mathbf{I}_s}$  则为  $L_s$  对输入量  $\mathbf{I}_s$  的导数。

## 4 测量实验与结果

测量实验布局如图 2 所示,并通过两个实验对本文所述跟踪仪多边测量的不确定度评定方法进行验证。其中,实验一用于验证 GUM 法的可行性;实验二用于验证不确定度评定的正确性。

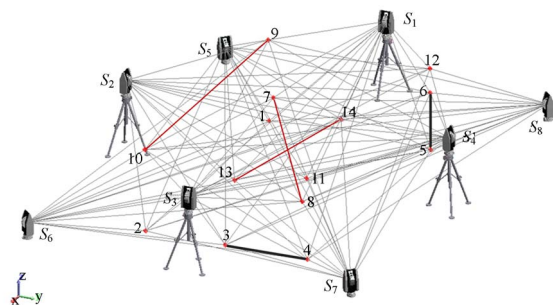


图 2 激光跟踪仪多边测量实验布局

Fig. 2 Experiment layout of multilateration with laser tracker

在  $5\text{ m} \times 3\text{ m} \times 1.5\text{ m}$  空间内布置 14 个目标点,其中点 3 和点 4、点 5 和点 6 分别为两根基准尺的两端,采用 Leica AT930 跟踪仪在 8 个站点对目标点进行多边测量。Leica AT930 跟踪仪干涉测距的最大允许误差为  $\pm 0.5\ \mu\text{m}/\text{m}$ ,实验空间的温度梯度为  $0.5\ \text{C}/\text{m}$ ,且实验采用同一个 Leica RRR 靶球进行测量,故激光跟踪仪多边测量中各不确定度来源对应的标准不确定度分量见式(6)和式(7)。

#### 4.1 GUM 法与 MCM 法比较

实验一中,分别利用 GUM 法和 MCM 法评定图 2 所示激光跟踪仪多边测量结果的测量不确定度,并比较两种方法所得 14 个目标点的坐标不确定度  $u_x, u_y, u_z$  以及相关系数  $\rho_{xy}, \rho_{xz}, \rho_{yz}$ 。其中,  $\rho(\mu, \nu) = \frac{u(\mu, \nu)}{u(\mu)u(\nu)}$ ,  $\mu, \nu = x, y, z$ , 且  $\mu \neq \nu$ ; MCM 法的样本量为  $10^4$ 。根据输入量有效数字的位数,选择数值容差;鉴于在跟踪仪测量中,单位为 mm 的量一般保留三位小数,故选择坐标不确定度的数值容差为 0.000 5;相关系数为无单位的量,选择数值容差为 0.05。比较结果如图 3 和图 4 所示。

图 3 中,坐标不确定度的绝对偏差最大值为 0.000 2 mm,小于数值容差 0.000 5 mm。图 4 中相关系数的绝对偏差最大值约为 0.01,小于数值容差 0.05。因此,可以采用 GUM 法评定激光跟踪仪多边测量的不确定度。

此外,比较两种评定方法所需的运行时间。在 Intel Core-i7 2.4 GHz 计算机配合 Matlab R2016a 平台,GUM 法用时 0.251 s, MCM 法用时 324.487 s,即 GUM 法用时仅为 MCM 法的 0.08%。因此,GUM 法可有效节省运算成本,更

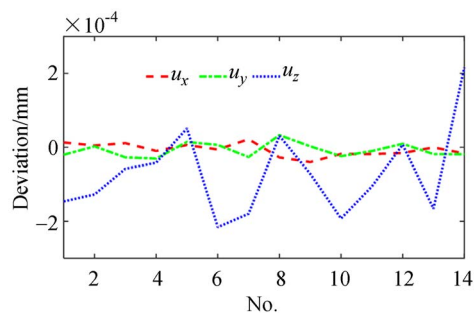


图 3 GUM 法与 MCM 法的坐标不确定度偏差

Fig. 3 Difference of coordinate uncertainty between GUM and MCM

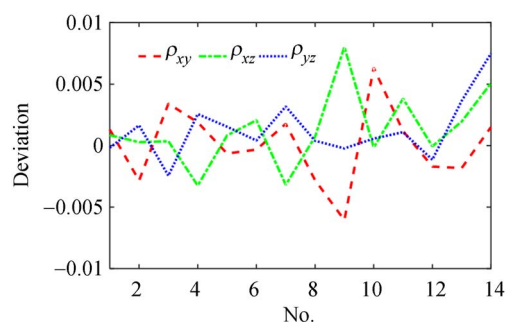


图 4 GUM 法与 MCM 法的相关系数偏差

Fig. 4 Difference of correlation between GUM and MCM

适合高效率、在线评定激光跟踪仪多边测量的不确定度。

#### 4.2 点到点长度测试

鉴于长度标准值较坐标标准值易于获得,实验二采用长度测试并计算  $E_n$  值,对本文评定的不确定度进行验证,即激光跟踪仪多边测量目标点坐标并计算两目标点间长度实测值  $L$ ,  $L$  与长度标准值  $L_0$  的差值应满足:

$$E_n = \frac{|L - L_0|}{\sqrt{U_L^2 + U_{L_0}^2}} \leq 1. \quad (21)$$

本实验中,选择 5 组点到点长度进行测试,分别为 3-4、5-6、7-8、9-10 以及 13-14,测试结果见表 3。其中,各组长度标准值  $L_0$  采用激光跟踪仪干涉测距直接测量<sup>[7]</sup>,并根据式(6)计算其不确定度  $U_{L_0}$ ;各组长度实测值  $L$  及其不确定度  $U_L$  根据 3.3 节计算。

表 3 中,5 组长度的  $E_n$  值均小于 1,由此证明本文评定的激光跟踪仪多边测量的不确定度正确、可靠。

表 3 点到点长度测试结果

Tab. 3 Result of point-to-point length test

序号	$L_0/\text{mm}$	$U_{L_0}/\text{mm}$	$L/\text{mm}$	$U_L/\text{mm}$	$ L-L_0 /\text{mm}$	$\sqrt{U_L^2+U_{L_0}^2}/\text{mm}$	$En$
3-4	1 520.387	0.003	1 520.383	0.008	0.004	0.009	0.444
5-6	1 052.272	0.003	1 052.285	0.029	0.013	0.029	0.448
7-8	4 373.655	0.005	4 373.650	0.007	0.005	0.009	0.556
9-10	5 000.177	0.006	5 000.176	0.007	0.001	0.009	0.111
13-14	2 258.377	0.004	2 258.379	0.010	0.002	0.011	0.182

## 5 结 论

本文对激光跟踪仪多边测量的不确定度评定方法进行了研究。首先,在多边测量模型基础上,从仪器误差、环境干扰及靶球制造误差等方面分析了其不确定度来源。然后,针对多边测量中被测量(输出量)为多维变量的特点,重点研究了基于 GUM 法的激光跟踪仪多边测量的不确定度合

成方法。最后,介绍了点到点长度的不确定度计算方法,并采用 MCM 法验证 GUM 法。实验结果表明,二者所得的目标点坐标不确定度偏差小于 0.000 2 mm,相关系数偏差小于 0.01,且 GUM 法用时仅为 MCM 法的 0.08%,说明本文采用 GUM 法评定跟踪仪多边测量的不确定度具有可行性及高效性;采用点到点长度测试验证不确定度评定结果,En 值均小于 1,说明本文所述的激光跟踪仪多边测量不确定度评定方法正确、可靠。

## 参考文献:

- [1] FRANCESCHINI F, GALETTO M, MAISANO D, et al.. *Distributed Large-Scale Dimensional Metrology* [M]. London: Springer International Publishing AG, 2011.
- [2] MURALIKRISHNAN B, PHILLIPS S, SAWYER D. Laser trackers for large-scale dimensional metrology: A review [J]. *Precision Engineering*, 2016, 44:13-28.
- [3] HUGHES E B, WILSON A, PEGGS G N. Design of a high-accuracy CMM based on multi-lateration techniques [J]. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2000, 49(1):391-394.
- [4] ZHANG D, ROLT S, MAROPOULOS P G. Modelling and optimization of novel laser multilateration schemes for high-precision applications [J]. *Measurement Science and Technology*, 2005, 16(12): 2541-2547.
- [5] FORBES A B. Weighting observations from multi-sensor coordinate measuring systems [J]. *Measurement Science and Technology*, 2012, 23(2): 025004.
- [6] 林嘉睿, 郝继贵, 郭寅, 等. 现场大空间测量中精密三维坐标控制网的建立 [J]. *机械工程学报*, 2012, 48(4):6-11.  
LIN J R, ZHU J G, GUO Y, et al.. Establishment of precise three-dimensional coordinate control network in field large-space measurement [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(4): 6-11. (in Chinese)
- [7] 谢政委, 林嘉睿, 郝继贵, 等. 基于空间长度约束的坐标控制场精度增强方法 [J]. *中国激光*, 2015, 42(1): 0108005.  
XIE ZH W, LIN J R, ZHU J G, et al.. Accuracy enhancement method for coordinate control field based on space length constraint [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2015, 42(1): 0108005. (in Chinese)
- [8] 赵子越, 郝继贵, 杨凌辉. 采用精确三维控制场的 wMPS 全局组网定向方法 [J]. *红外与激光工程*, 2016, 45(11): 1117001.  
ZHAO Z Y, ZHU J G, YANG L H. Orientation parameters calibration of wMPS by using precise 3D coordinate control network [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, 45(11): 1117001. (in Chinese)
- [9] 陈洪芳, 闫昊, 石照耀. 面向特大型齿轮的激光跟踪多站定位 [J]. *光学精密工程*, 2014, 22(9): 2375-2380.  
CHEN H F, YAN H, SHI ZH Y. Laser tracking multi-station positioning method for Mega-gear [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(9): 2375-2380. (in Chinese)
- [10] CHEN H, TAN Z, SHI Z, et al.. Optimization method for solution model of laser tracker multi-

- lateration measurement[J]. *Measurement Science Review*, 2016, 16(4):205-210.
- [11] 陈洪芳, 郑博文, 石照耀, 等. 基于激光追踪仪多站位测量的 CMM 空域坐标修正方法[J]. *中国激光*, 2017, 44(3):197-204.  
CHEN H F, ZHENG B W, SHI ZH Y. CMM spatial coordinate correction method based on laser tracer multistation measurement[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2017, 44(3):197-204. (in Chinese)
- [12] 陈洪芳, 孙衍强, 王亚韦, 等. 高精度激光追踪测量方法及实验研究[J]. *中国激光*, 2018, 45(1): 0104003.  
CHEN H F, SUN Y Q, WANG Y W, *et al.*. High-precision laser tracking measurement method and experimental study[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(1): 0104003. (in Chinese)
- [13] 赵志刚, 赵伟, 黄松岭. 多维测量结果不确定度评价方法初探[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2007, 47(10):1557-1561.  
ZHAO ZH G, ZHAO W, HUANG S L. A pilot study of multivariate uncertainty theory[J]. *J. Tsinghua Univ. (Sci & Tech)*, 2007, 47(10): 1557-1561. (in Chinese)
- [14] CALKINS J M. *Quantifying Coordinate Uncertainty Fields in Coupled Spatial Measurement Systems Mechanical Engineering* [D]. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002.
- [15] 黄周弟, 吴铁林, 周玉芳. 利用 iGPS 进行大尺寸空间坐标测量的不确定度评估[J]. *中国测试*, 2013, 39(1):47-51.  
HUANG ZH D, WU T L, ZHOU Y F. Uncertainty evaluation for large-scale coordinate measurement of iGPS[J]. *China Measurement & Test*, 2013, 39(1):47-51. (in Chinese)
- [16] GALETTO M, MASTROGIACOMO L, MAISA-NO D, *et al.*. Uncertainty evaluation of distributed large-scale-metrology systems by a Monte Carlo approach[J]. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2016, 65(1):491-494.
- [17] 肖文健, 马东玺, 张勇, 等. 基于惯性基准的大尺寸空间角测量[J]. *光学精密工程*, 2016, 24(3): 560-565.  
XIAO W J, MA D X, ZHANG Y, *et al.*. Large-scale spatial angle measurement based on inertial reference [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(3): 560-565. (in Chinese)
- [18] 任瑜. 异构网络坐标测量精度分析与算法研究 [D]. 天津大学, 2016.  
REN Y. *Research on Accuracy Analysis and Algorithm of Heterogeneous-network Coordinate Measurement* [D]. Tianjin: Tianjin University, 2016. (in Chinese)
- [19] 霍炬, 张贵阳, 崔家山, 等. 测量误差不确定性加权的立体视觉位姿估计目标函数[J]. *光学精密工程*, 2018, 26(4): 834-842.  
HUO J, ZHANG G Y, CUI J SH, *et al.*. A objective function with measuring error uncertainty weighted for pose estimation in stereo vision[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2018, 26(4): 834-842. (in Chinese)
- [20] JCGM 102: 2011, ISO/IEC Guide 98-3-2: 2011, Evaluation of measurement data-supplement 2 to the "guide to the expression of uncertainty in measurement"-Extension to any number of output quantities[S]. Paris: Joint Committee for Guides in Metrology, 2011.
- [21] ISO/TR 16015:2003, Geometrical product specifications (GPS) - Systematic errors and contributions to measurement uncertainty of length measurement due to thermal influences [S]. Switzerland: International Organization for Standardization, 2003.

#### 作者简介:



任瑜(1988—),女,山东淄博人,博士,2011年、2016年于天津大学分别获得学士、博士学位,主要从事大尺寸测量等方面的研究。E-mail: reny@simt.com.cn



郝继贵(1970—),男,安徽无为,人,博士,教授,博士生导师,1991年、1994年于国防科技大学分别获得学士、硕士学位,1997年于天津大学获得博士学位,主要从事视觉检测技术的研究。E-mail: jigui@tju.edu.cn