

文章编号 1004-924X(2018)06-1370-10

## 圆弧柔性铰链的优化设计

李 耀<sup>1\*</sup>, 吴洪涛<sup>1</sup>, 杨小龙<sup>1</sup>, 康升征<sup>1</sup>, 程世利<sup>2</sup>  
(1. 南京航空航天大学 机电学院, 江苏 南京 210016;  
2. 盐城工学院 汽车工程学院, 江苏 盐城 224051)

**摘要:** 柔性铰链是高精度柔性机构的关键部件, 其运动精度与运动范围影响着柔性机构的性能, 本文对圆弧柔性铰链进行了柔度矩阵推导, 并依据柔度方程进行优化设计。采用结构矩阵法建立了圆弧柔性铰链的柔度方程, 对矩形截面的翘曲抗扭刚度进行推导, 得到了约束扭转状态下的扭转柔度近似方程。为相对长度较小铰链的扭转刚度精确求解提供了依据。对比理论计算结果与有限元分析结果, 结果显示扭转柔度的最大相对误差在 10% 左右, 其余方向柔度相对误差低于 6%, 验证了柔度方程的准确性。采用正交试验直观分析法得到柔性铰链各设计参数对转动刚度的灵敏度, 并利用多目标遗传算法对柔性铰链的转动柔度以及轴向刚度两个目标进行了参数优化。通过优化结果与设计经验选取参数的对比, 发现优化后圆弧柔性铰链的弯曲柔度提升了 5.12%, 同时铰链的轴向刚度提升了 4.72%, 证明针对圆弧柔性铰链的优化设计具有明显效果。

**关键词:** 圆弧柔性铰链; 约束扭转; 正交试验; 灵敏度; 多目标优化

**中图分类号:** TH132 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20182606.1370

## Optimization design of circular flexure hinges

LI Yao<sup>1\*</sup>, WU Hong-tao<sup>1</sup>, YANG Xiao-long<sup>1</sup>, KANG Sheng-zheng<sup>1</sup>, CHENG Shi-li<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of  
Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. School of Automotive Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

\* Corresponding author, E-mail: liyaokkx@nuaa.edu.cn

**Abstract:** Flexure hinges are the key components of high-precision flexible mechanisms. Their motion precision and range affect the performance of flexible mechanisms. Herein, the flexibility matrix of a circular flexure hinge was derived for optimal design. The flexibility equation of the circular flexure hinge was established using the structure matrix method. The warping and torsional stiffness of the rectangular section was deduced. The approximate equation of torsional flexibility under constrained torsional state was obtained, providing a basis for the exact solution of torsional stiffness of the hinge with small relative length. Compared with the finite element method, the maximum relative error of torsional flexibility is approximately 10%, and the relative error of the remaining flexibility is less than 6%, which verifies the accuracy of the flexibility equation. The sensitivity of the design parameters of the flexure hinge to rotational stiffness was obtained by the orthogonal experimental design.

收稿日期: 2018-01-22; 修订日期: 2018-03-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51375230, No. 51405417); 江苏省自然科学基金资助项目 (No. BK20140470)

The rotation ability and axial stiffness of the flexure hinge were optimized by the multi-objective genetic algorithm. By comparing the optimization results with the parameters selected according to the design experience, it is found that the bending flexibility of the optimized circular flexure hinge increased by 5.12% and the axial stiffness of the hinge increased by 4.72%. It is proved that the optimal design of the circular flexure hinge has obvious effects.

**Key words:** circular flexure hinges; restrained torsion; orthogonal experiment; sensitivity; multi-objective optimization

## 1 引 言

柔性铰链是通过材料的弹性变形实现运动与力传递的结构<sup>[1]</sup>,凭借其运动精度高、无摩擦、无间隙的优点,被广泛应用于电子元器件微制造、生物细胞微操作<sup>[2-4]</sup>、机电系统<sup>[5-7]</sup>以及光学设备的微定位<sup>[8-12]</sup>。

运动精度以及运动范围是评价柔性铰链性能的两个重要指标,而切口截面形状和设计参数影响柔性铰链的运动精度和运动范围,因此成为柔性铰链研究领域的热点。许多学者对柔性铰链进行了大量研究,使得柔性铰链的柔度计算相对完善。Paros 和 Weisbord 最先推导出圆弧柔性铰链的柔度公式,吴鹰飞与周兆英在他们的基础上推导出更为简洁的圆弧柔性铰链柔度公式<sup>[13]</sup>。Lobontiu 分别推导了抛物线、双曲线<sup>[14]</sup>、圆角抛物线切口<sup>[15]</sup>以及倒圆角直梁型切口柔性铰链的柔度。陈贵敏引入离心角作积分变量<sup>[16]</sup>推导了椭圆弧型铰链的柔度方程。Min Liu<sup>[17]</sup>基于拓扑优化对准 V 型柔性铰链进行了设计与分析。Rad F P<sup>[18-19]</sup>以圆弧为质心轴设计了一种新型球铰。在柔性铰链参数优化方面,Tian Y<sup>[20]</sup>对直梁型、直圆型以及椭圆型柔性铰链进行了分析对比,为参数优化设计推导旋转精度。陈贵敏基于粒子群算法<sup>[21]</sup>对椭圆弧柔性铰链进行了优化设计。Zelenika<sup>[22]</sup>对铰链的形状进行了非线性参数优化。

但是目前在推导柔性铰链的扭转柔度时,都是设定了铰链的整体长度要远大于最小厚度的条件,从而使铰链处于自由扭转的状态下。通过对比有限元结果发现当铰链的相对长度较小时,推导的扭转柔度方程不能完全适用。Young 在文献<sup>[23]</sup>中指出当铰链的相对长度较小时,铰链的

扭转不能认为是自由扭转,需要考虑约束扭转的情况。随着精密机构向着小型化、微型化发展,相对长度小的柔性铰链的发展需要受到重视。在含有扭转方向运动的柔性机构中,若柔性铰链的扭转柔度计算不准确会导致柔性机构达不到既定的性能指标。因此,本文推导了转动精度较高的圆弧铰链的扭转柔度方程,以满足铰链相对长度较小的情况,为小工作空间柔性铰链的设计提供了参考。由于有关柔性铰链设计参数对铰链的弯曲刚度的灵敏度的分析相对较少,本文针对圆弧柔性铰链耦合作用的 4 个参数设计了正交试验,定量分析了各设计参数对柔性铰链弯曲刚度的影响。同时,采用多目标遗传算法对设计参数进行优化,为设计高精度、高转动能力的柔性铰链提供了参考。

## 2 圆弧切口铰链的柔度方程

圆弧柔性铰链相比直梁型柔性铰链<sup>[24]</sup>、圆角型柔性铰链<sup>[25]</sup>以及椭圆型柔性铰链具有更高的旋转精度。在旋转时转动中心不会发生较大的偏移,仅在铰链中心浮动,是综合性能更好的设计选择<sup>[16]</sup>。本文在材料力学与弹性力学的基础上,将圆心角作为积分变量对圆弧柔性铰链的柔度方程进行推导。

在实际工况下,柔性铰链通常受到力与力矩的综合作用,因此,单轴圆弧柔性铰链的受力如图 1 所示。假定圆弧柔性铰链为左端固定,右端受弯曲、剪切、扭转以及拉压载荷作用的悬臂梁<sup>[26]</sup>,定义铰链的载荷力为:

$$\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T. \quad (1)$$

铰链的相应变形可以表示为:

$$\mathbf{P} = [\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]^T. \quad (2)$$

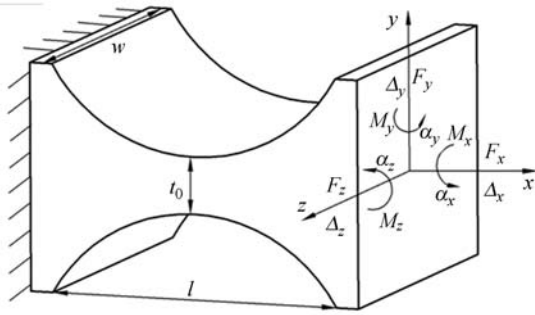


图 1 圆弧柔性铰链的力与位移图

Fig. 1 Forces and deflections of circular flexure hinge

根据结构矩阵法得到柔性铰链的柔度矩阵为：

$$C = \frac{\partial P}{\partial F} = \begin{bmatrix} \Delta_x/F_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_y/F_y & 0 & 0 & 0 & \Delta_y/M_z \\ 0 & 0 & \Delta_z/F_z & 0 & \Delta_z/M_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_x/M_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_y/F_z & 0 & \alpha_y/M_y & 0 \\ 0 & \alpha_z/F_y & 0 & 0 & 0 & \alpha_z/M_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

在求解柔度矩阵时，将柔性铰链的变形分解为许多微元段弯曲变形的累积，且把每个微元段作为长度为  $dx$  的等截面矩形梁进行处理。圆弧柔性铰链的几何参数如图 2 所示，铰链切口长度  $l = 2a$ ， $R$ ， $w$ ， $t_0$ ， $\theta_m$  分别为铰链的切口半径、宽度、最小厚度以及最大圆心角，根据几何关系可知：

$$t(x) = 2R + t_0 - 2\sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \quad (4)$$

$$\theta_m = \arcsin \frac{a}{R}. \quad (5)$$

$$N_1 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\cos \theta}{t^3(\theta)} d\theta = \frac{12bR \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}} (b-2R \cos \theta_m)^2}{(b-2R)^{5/2} (b+2R)^{5/2} (b-2R \cos \theta_m)^2} + \frac{2\sqrt{b^2-4R^2} [b^3+2bR^2-R(b^2+8R^2) \cos \theta_m] \sin \theta_m}{(b-2R)^{5/2} (b+2R)^{5/2} (b-2R \cos \theta_m)^2}. \quad (9)$$

力  $F_y$  对每个微元截面产生绕弯曲轴  $z$  轴的力矩  $F_y[a - R \sin \theta]$ ，则力  $F_y$  作用下的柔度表达式为：

$$c_{62} = \frac{a_z}{F_y} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{(a - R \sin \theta) R \cos \theta}{E[\omega t^3(\theta)]/12} d\theta = \frac{12aR}{Ew} N_1 - \frac{12R^2}{Ew} N_2, \quad (10)$$

$$N_2 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin \theta \cos \theta}{t^3(\theta)} d\theta = 0. \quad (11)$$

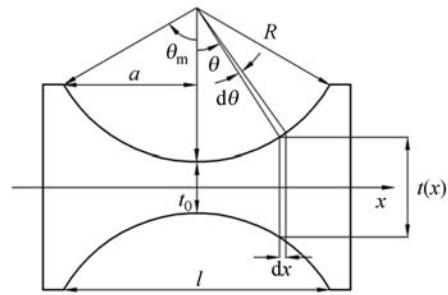


图 2 柔性铰链的几何参数

Fig. 2 Geometry parameters of flexure hinge

## 2.1 圆弧铰链柔度方程推导

### 2.1.1 绕 $z$ 轴的角变形 $\alpha_z$

柔性铰链的转动能力是考察铰链性能的重要指标，将绕  $z$  轴的角变形  $\alpha_z$  优先进行推导，由于圆弧柔性铰链的转动中心在薄弱环节的中心附近且主要由薄弱环节变形产生角变形，因此可以忽略其余部分的转角，得到在力矩  $M_z$  作用下的角变形为：

$$\alpha_z = \int_0^l \frac{M_z}{EI_z(x)} dx = \int_0^l \frac{12M_z}{Ew t^3(x)} dx, \quad (6)$$

式中： $E$  为所选材料的弹性模量， $I_z(x)$  为微元截面对中性轴  $z$  轴的转动惯量，且  $dx = R \cos \theta d\theta$ ， $t(\theta) = 2R + t_0 - 2R \cos \theta$ 。

$$\alpha_z = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{12M_z}{Ew t^3(\theta)} R \cos \theta d\theta, \quad (7)$$

得到力矩  $M_z$  作用下的柔度表达式为：

$$c_{66} = \frac{\alpha_z}{M_z} = \frac{12R}{Ew} N_1. \quad (8)$$

令  $b = 2R + t_0$  得：

### 2.1.2 绕 $y$ 轴的角变形 $\alpha_y$

按照推导绕  $z$  轴角变形的的方法，可以得到力矩  $M_y$  作用下柔性铰链绕  $y$  轴的角变形  $\alpha_y$ ，推导柔度表达式为：

$$c_{55} = \frac{\alpha_y}{M_y} = \int_0^l \frac{1}{EI_y(x)} dx = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{R \cos \theta}{E[\omega^3 t(\theta)]/12} d\theta = \frac{12R}{Ew^3} N_3, \quad (12)$$

其中  $I_y(x)$  是微元截面对中性轴  $y$  轴的转动惯

量。由式(12)推导得:

$$N_3 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\cos \theta}{t(\theta)} d\theta = -\frac{\theta_m}{2R} + \frac{2b \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}}}{R \sqrt{b^2-4R^2}} \quad (13)$$

力  $F_z$  对微元截面产生绕  $y$  轴的力矩为  $-F_z[a-R\sin \theta]$ , 得到柔性铰链在力  $F_z$  作用下的柔度表达式为:

$$c_{53} = \frac{a_y}{F_z} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{-(a-R\sin \theta)R\cos \theta}{E[\omega^3 t(\theta)]/12} d\theta = -\frac{12aR}{E\omega^3} N_3 + \frac{12R^2}{E\omega^3} N_4 \quad (14)$$

$$N_4 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin \theta \cos \theta}{t(\theta)} d\theta = 0 \quad (15)$$

### 2.1.3 绕 $x$ 轴的角变形 $\alpha_x$

在力矩  $M_x$  作用下柔性铰链会发生绕  $x$  轴的扭转变形,但是微元截面是非圆截面会导致翘曲的产生,且当铰链尺寸较小时不能看作自由扭转,因此为了得到更为准确的扭转柔度表达式,在

$$N_5 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\cos \theta}{t^3(\theta) [\frac{\omega}{3} - 0.21t(\theta)]} d\theta = \frac{3.78(b^2-4R^2+1.5873b\omega) \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}}}{\omega^2(b-2R)^{3/2}(b+2R)^{3/2}} - \frac{3.78 \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}}}{\omega^2 \sqrt{b-2R} - 1.5873\omega \sqrt{b+2R} - 1.5873\omega} + \frac{12R\omega \tan \frac{\theta_m}{2}}{\omega^2(b^2-4R^2)[b-2R+(b+2R)\tan^2 \frac{\theta_m}{2}]} \quad (20)$$

### 2.1.4 沿 $Z$ 轴的线变形 $\Delta_z$

在力矩  $M_y$  作用下柔性铰链会产生沿  $Z$  轴的

$$c_{55} = \frac{\Delta_z}{M_y} = \int_0^l \frac{dz}{M_y dx} dx = -\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \left[ \int_{-\theta_m}^{\theta} \frac{R\cos \phi}{E\omega^3 t(\phi)/12} d\phi \right] d(R\sin \theta) = -\frac{12aR}{E\omega^3} N_3 + \frac{12R^2}{E\omega^3} N_4 = c_{53} \quad (21)$$

在力  $F_z$  的作用下,柔性铰链会产生沿  $z$  轴的线变形  $\Delta_z$ ,其中力  $F_z$  对微元截面产生绕  $y$  轴的力矩  $-F_z[a-R\sin \theta]$ ,会导致柔性铰链产生沿  $z$

Lobontiu 抗扭刚度的基础上引入相对长度变量。基于有限元进行回归计算,得到在力矩  $M_x$  作用下绕  $x$  轴的角变形  $\alpha_x$  为:

$$\alpha_x = \int_0^l \frac{M_x}{g(y)GI_L(x)} dx \quad (16)$$

其中:

$$I_L(x) = \omega t^3(x) \left[ \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t(x)}{\omega} \right] \quad (17)$$

$$g(y) = \frac{200\omega(1.51y^2 - 1.377y + 27.21)}{y^2 + 0.5453y + 3.74} \quad (18)$$

其中:  $I_L(x)$  为 Lobontiu 矩形截面翘曲扭转的转动惯量<sup>[27]</sup>,  $g(y)$  为抗扭刚度的补偿系数,  $y = l/t_0$ ,  $\omega$  为铰链宽度。

力矩  $M_x$  作用下的柔度表达式为:

$$c_{44} = \frac{\alpha_x}{M_x} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{R\cos \theta}{g(y)G\omega t^3(\theta) \left[ \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t(\theta)}{\omega} \right]} d\theta = \frac{R}{g(y)G} N_5 \quad (19)$$

线变形  $\Delta_z$ ,其柔度表达式为:

$$\frac{\Delta_z^b}{F_z} = \int_0^l \frac{dz}{dx} dx = -\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \left[ \int_{-\theta_m}^{\theta} \frac{-(a-R\sin \phi)R\cos \phi}{E[\omega^3 t(\phi)]/12} d\phi \right] d(R\sin \theta) = \frac{12a^2R}{E\omega^3} N_3 + \frac{12R^3}{E\omega^3} N_6 \quad (22)$$

$$N_6 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{t(\theta)} d\theta = \frac{(b^2-2R^2)\theta_m}{4R^3} + \frac{a(b+R\cos \theta_m)}{2R^3} - \frac{b \sqrt{b^2-4R^2} \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}}}{2R^3} \quad (23)$$

轴的弯曲线变形  $\Delta_z^b$ ;而  $F_z$  对微元截面产生的剪切力导致柔性铰链产生沿  $Z$  轴的剪切线变形  $\Delta_z^s$ 。弯曲变形对应的柔度表达式为:

剪切变形对应的柔度表达式为:

$$\frac{\Delta_z^s}{F_z} = \int_0^l \frac{1}{kGwt(x)} dx = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{R \cos \theta}{kGwt(\theta)} d\theta = \frac{R}{kG\omega} N_3, \quad (24)$$

其中:  $G$  为材料的剪切模量,  $k$  为材料的剪切系数。由文献[28]得到矩形截面的剪切系数为:

$$k = \frac{10 + 10\mu}{12 + 11\mu}, \quad (25)$$

其中  $\mu$  为泊松比。

将力  $F_z$  作用下的柔度描述为:

$$c_{33} = \frac{\Delta_z}{F_z} = \frac{\Delta_z^b}{F_z} + \frac{\Delta_z^s}{F_z} = \frac{12a^2 R}{E\omega^3} N_3 + \frac{12R^3}{E\omega^3} N_6 + \frac{R}{kG\omega} N_3. \quad (26)$$

$$N_7 = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{t^3(\theta)} d\theta = \frac{\theta_m}{4R^3} - \frac{b(b^2 - 6R^2) \arctan \frac{\sqrt{b+2R} \tan \frac{\theta_m}{2}}{\sqrt{b-2R}}}{2R^3(b-2R)^{3/2}(b+2R)^{3/2}} + \frac{a[b^3 - 2bR^2 + (8R^3 - 3b^2 R) \cos \frac{\theta_m}{2}]}{2R^3(b^2 - 4R^2)(b - 2R \cos \frac{\theta_m}{2})}. \quad (29)$$

### 2.1.6 沿 $x$ 轴的线变形 $\Delta_x$

柔性铰链在轴向载荷  $F_x$  的作用下产生沿  $x$  轴的线变形  $\Delta_x$ , 其柔度表达式为:

$$c_{11} = \frac{\Delta_x}{F_x} = \int_0^l \frac{1}{Ewt(x)} dx = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{1}{Ewt(\theta)} R \cos \theta d\theta = \frac{R}{E\omega} N_3. \quad (30)$$

## 2.2 柔度方程验证

为了验证推导的圆弧柔性铰链柔度方程的准确性, 选用表 1 所示的两组不同几何参数进行有限元分析, 并与理论计算结果进行对比, 对比结果如表 2 所示。

表 1 圆弧柔性铰链的几何参数

Tab. 1 Geometry parameter of circular flexure hinge

	$E/\text{Pa}$	$G/\text{Pa}$	$a/\text{mm}$	$R/\text{mm}$	$\omega/\text{mm}$	$t_0/\text{mm}$	$\theta_m/(\text{°})$
1	$2.07 \times 10^{11}$	$8.1 \times 10^{10}$	5	5.774	10	1	60
2	$2 \times 10^{11}$	$8 \times 10^{10}$	4	8	5	1	30

表 2 理论计算结果与有限元结果对比

Tab. 2 Comparison between FEM and theoretical results

	$\alpha_z/M_z$	$\alpha_z/F_y$	$\alpha_y/M_y$	$\alpha_y/F_z$	$\alpha_x/M_x$
1(Li)	$1.603 \times 10^{-2}$	$8.015 \times 10^{-5}$	$3.043 \times 10^{-4}$	$-1.522 \times 10^{-6}$	$3.704 \times 10^{-3}$
1(Chen)	$1.603 \times 10^{-2}$	$8.016 \times 10^{-5}$	$3.043 \times 10^{-4}$	$-1.522 \times 10^{-6}$	$1.218 \times 10^{-2}$
1(FEM)	$1.6 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-5}$	$3.225 \times 10^{-4}$	$-1.61 \times 10^{-6}$	$3.275 \times 10^{-3}$
2(Li)	$3.864 \times 10^{-2}$	$1.546 \times 10^{-4}$	$2.574 \times 10^{-3}$	$-1.03 \times 10^{-5}$	$1.835 \times 10^{-2}$
2(Chen)	$3.864 \times 10^{-2}$	$1.546 \times 10^{-4}$	$2.574 \times 10^{-3}$	$-1.03 \times 10^{-5}$	$3.005 \times 10^{-2}$
2(FEM)	$3.864 \times 10^{-2}$	$1.55 \times 10^{-4}$	$2.625 \times 10^{-3}$	$-1.048 \times 10^{-5}$	$1.83 \times 10^{-2}$

### 2.1.5 沿 $y$ 轴的线变形 $\Delta_y$

力矩  $M_z$  作用下柔性铰链产生沿  $y$  轴的线变形  $\Delta_y$ , 推导方式与  $c_{35}$  相同, 得到柔度表达式为:

$$c_{26} = \frac{\Delta_y}{M_y} = \int_0^l \frac{dy}{M_z dx} dx = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \left[ \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{R \cos \theta}{E\omega t^3(\phi)/12} d\phi \right] d(R \sin \theta) = \frac{12aR}{E\omega} N_1 - \frac{12R^2}{E\omega} N_2 = c_{62}. \quad (27)$$

力  $F_z$  使柔性铰链产生沿  $y$  轴的线变形  $\Delta_y$ , 与  $c_{33}$  推导过程类似, 其柔度表达式为:

$$c_{22} = \frac{\Delta_y}{F_y} = \frac{\Delta_y^b}{F_y} + \frac{\Delta_y^s}{F_y} = \frac{12a^2 R}{E\omega} N_1 + \frac{12R^3}{E\omega} N_7 + \frac{R}{kG\omega} N_3, \quad (28)$$

如表 2 所示, 本文推导的圆弧柔度方程在具体设计参数下得到的柔度(用 Li 表示)与通过有限元分析得到的结果(用 FEM 表示)基本一致。与陈贵敏论文得到的结果<sup>[16]</sup>(用 Chen 表示)相比, 本文的扭转柔度公式更加贴近有限元结果。并且本文引入的抗扭刚度补偿系数能够更好地描述铰链受到约束扭转的情况, 使得扭转柔度的理论计算结果与有限元结果的最大相对误差为 10% 左右, 弯曲柔度的理论计算结果与有限元最大相对误差低于 6%, 轴向柔度的最大相对误差在 5% 左右。

续表 2

	$\Delta_z/M_y$	$\Delta_z/F_z$	$\Delta_y/M_z$	$\Delta_y/F_y$	$\Delta_x/F_x$
1(Li)	$1.522 \times 10^{-6}$	$1.666 \times 10^{-8}$	$8.015 \times 10^{-5}$	$4.332 \times 10^{-7}$	$2.536 \times 10^{-9}$
1(Chen)	$1.522 \times 10^{-6}$	$1.666 \times 10^{-8}$	$8.016 \times 10^{-5}$	$4.333 \times 10^{-7}$	$2.536 \times 10^{-9}$
1(FEM)	$-1.61 \times 10^{-6}$	$1.75 \times 10^{-8}$	$8 \times 10^{-5}$	$4.325 \times 10^{-7}$	$2.65 \times 10^{-9}$
2(Li)	$-1.03 \times 10^{-5}$	$6.679 \times 10^{-8}$	$1.546 \times 10^{-4}$	$7.069 \times 10^{-7}$	$5.363 \times 10^{-9}$
2(Chen)	$-1.03 \times 10^{-5}$	$6.679 \times 10^{-8}$	$1.546 \times 10^{-4}$	$7.069 \times 10^{-7}$	$5.363 \times 10^{-9}$
2(FEM)	$-1.048 \times 10^{-5}$	$6.875 \times 10^{-8}$	$1.55 \times 10^{-4}$	$7.05 \times 10^{-7}$	$5.425 \times 10^{-9}$

### 3 问题描述

#### 3.1 抗扭刚度修正公式

在推导扭转柔度方程的过程中,对矩形截面翘曲抗扭刚度进行了修正。通过文献[29]中对各翘曲抗扭刚度进行的误差分析,得出 Young 和 Budynas<sup>[23]</sup>给出的自由扭转状态下转动惯量的近似表达式与实际扭转转动惯量的误差最小,仅为 0.5%,其表达式为:

$$I_Y(x) = wt(x)^3 \left[ \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t(x)}{w} \left( 1 - \frac{t(x)^4}{12w^4} \right) \right]. \quad (31)$$

然而式(31)的高次幂导致了求解变截面梁扭转柔度时积分十分困难。因此,需要寻求一个便于积分并且误差较小的翘曲扭转转动惯量表达式。本文选用了文献[27]中 Lobontiu 矩形截面翘曲扭转转动惯量简化表达式(17),它与  $I_Y(x)$  的误差可以描述为:

$$e = \frac{I_L(x) - I_Y(x)}{I_Y(x)} = \frac{I_L(x)}{I_Y(x)} - 1. \quad (32)$$

在柔性铰链的设计中,铰链宽度  $w$  远大于铰链的厚度  $t(x)$ ,通过图 3 可以发现当  $w/t > 1.5$  时,  $I_L(x)$  与  $I_Y(x)$  的误差小于 1%,因此  $I_L(x)$  不但保持了  $I_Y(x)$  的精度,而且将表达式的最高次降低 4 次,大大降低了求解变截面梁扭转柔度时的积分难度。

随着高精领域的发展,机构也在向着小型化、微型化发展,柔性铰链的工作环境不允许铰链具有很大的相对长度  $l/t_0$ ,在柔性铰链的设计环节就必须考虑铰链受约束扭转的情况。本文针对一系列不同参数的圆弧柔性铰链进行了有限元分析,得到每一组参数的扭转柔度。然后将自由扭转状态下不同参数圆弧柔性铰链的扭转柔度与有限元结果进行回归,得到抗扭刚度补偿系数为式(18),进而得到约束扭转状态下的矩形截面翘曲

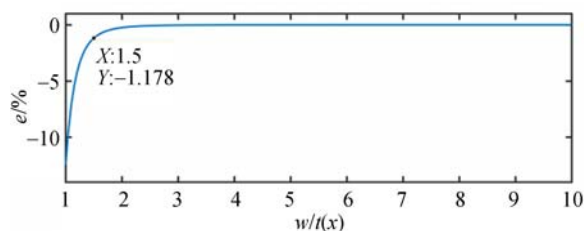


图 3  $I_L(x)$  与  $I_Y(x)$  的误差与宽厚比  $w/t(x)$  的关系  
Fig. 3 Errors of  $I_L(x)$  compared to  $I_Y(x)$  as a function of width-to-thickness ratio  $w/t(x)$

抗扭刚度  $g(y)GI_L(x)$ 。

#### 3.2 设计变量与目标函数

圆弧柔性铰链的转角  $\alpha_z$  是衡量柔性铰链运动精度以及作用范围的最重要参数,因此,铰链结构设计过程中必须分析各几何参数与柔性铰链转

表 3 铰链几何参数对转动刚度的影响试验及结果

Tab.3 Experiment and results for influence analysis of geometric parameters of flexture hinge on rotational stiffness

序号	$w$	$R$	$a$	$t_0$	$K$
1	1(0.005)	1(0.005)	1(0.002)	1(0.0004)	3.3016
2	1	2(0.007)	2(0.003)	2(0.0006)	7.6716
3	1	3(0.009)	3(0.004)	3(0.0008)	13.8738
4	1	4(0.011)	4(0.005)	4(0.001)	21.9093
5	2	1	2	3	26.1983
6	2(0.007)	2	1	4	44.2589
7	2	3	4	1	3.3635
8	2	4	3	2	8.5114
9	3(0.009)	1	3	4	58.6135
10	3	2	4	3	28.0157
11	3	3	1	2	13.3572
12	3	4	2	1	3.9906
13	4(0.011)	1	4	2	19.7087
14	4	2	3	1	6.0067
15	4	3	2	4	56.3628
16	4	4	1	3	33.2795

表 4 刚度 K 对各因素的响应

Tab. 4 Response of stiffness K to various factors

水平	$w$	$R$	$a$	$t_0$
1	11.689	26.956	23.549	4.166
2	20.583	21.488	23.556	12.312
3	25.994	21.739	21.751	25.342
4	28.839	16.923	18.249	45.286
响应极差	17.15	10.033	5.307	41.121

动刚度  $K$  的灵敏度关系。由于各参数的作用相互耦合,单变量分析具有一定的局限性,为此针对 4 个主要设计参数进行了“四因素四水平”共 16 组正交试验,定量地分析各几何参数对转动刚度的影响程度,试验结果如表 3 所示。表 4 采用直观分析法得到刚度对各因素的响应极差。由表 4 可知,在一定的参数范围内,圆弧柔性铰链各几何参数对转动刚度  $K$  的灵敏度由高到低分别为:最小厚度  $t_0$ 、宽度  $w$ 、切口半径  $R$ ,以及切口长度的一半  $a$ 。在设计圆弧柔性铰链时应按照灵敏度高低先后确定各参数,则设计变量为:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [t_0, w, R, a]^T. \quad (33)$$

柔性铰链应用到柔性机构中必须承受载荷对铰链的轴向力,设计时不得不同时对轴向刚度进行优化,因此对铰链进行优化设计,令:

$$o_1(\mathbf{X}) = c_{66}; o_2(\mathbf{X}) = c_{11}.$$

构建高转动能力以及高轴向刚度的多目标函数为:

$$O_1(\mathbf{X}) = \max[o_1(x)], O_2(\mathbf{X}) = \max[1/o_2(x)]. \quad (34)$$

### 3.3 约束条件

在进行圆弧柔性铰链优化设计时,首先要根据选定的参数范围对铰链的变量进行尺寸约束:

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (35)$$

式中  $x_{il}$ ,  $x_{iu}$  分别是设计变量  $x_i$  取值范围的下限和上限。

与有限元相比,使推导的闭合柔度方程具有较少的误差<sup>[30]</sup>,应满足以下关系:

$$0.05x_3 \leq x_1 \leq 0.8x_3. \quad (36)$$

直圆型柔性铰链是圆弧柔性铰链的特例,其切口长度等于切口直径,因此,圆弧柔性铰链应该满足以下关系:

$$x_4 \leq x_3. \quad (37)$$

在尺寸约束的基础上需要进行强度约束,确

保圆弧柔性铰链在力矩  $M_z$  作用下的应力最大处不会发生破坏,即:

$$\sigma_{\max} = M_z/W \leq [\sigma], \quad (38)$$

其中: $\sigma_{\max}$ 为最大弯曲正应力, $W = I_z/(t_0/2)$ 为矩形截面的抗弯截面系数<sup>[31]</sup>, $[\sigma]$ 为铰链材料的许用应力。

### 3.4 优化分析

圆弧柔性铰链设计过程中,在确定设计参数灵敏度的基础上需要得到各参数的最优解集,从而得到需求的铰链性能。将上述约束条件转化成矩阵形式可得边界约束为  $\mathbf{X}_1 = [0.0004, 0.005, 0.005, 0.002]^T$ ,  $\mathbf{X}_u = [0.001, 0.011, 0.011, 0.005]^T$ ,线性不等式约束矩阵为  $\mathbf{A} = [-1, 0, 0.05, 0; 1, 0, -0.8, 0; 0, 0, -1, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [0; 0; 0]$ 。选择搜索能力强,鲁棒性好的多目标遗传算法进行参数优化,避免陷入局部最优解跳出迭代的情况,得到一组符合多目标适应度函数最大的全局最优解集,如图 4 所示。根据铰链设计的具体需求选择弯曲柔度与轴向刚度的权值,得到全局最优解  $\mathbf{X}^* = [0.00937, 0.0065, 0.00106, 0.00487]^T$ 。

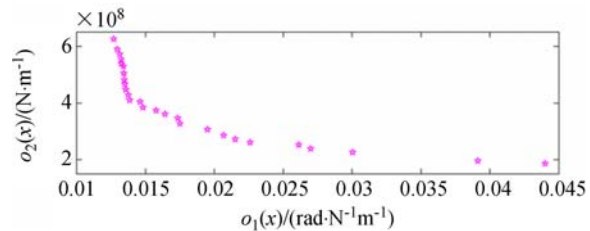


图 4 多目标优化结果

Fig. 4 Results of multi-objective optimization

将表 1 中依据设计经验得到的第二组参数作为初始值  $\mathbf{X}^0 = [0.001, 0.005, 0.008, 0.004]^T$  求解弯曲柔度与轴向刚度,并与优化后的结果进行对比,得到优化率<sup>[32]</sup>如表 5 所示。

表 5 圆弧柔性铰链的优化结果

Tab. 5 Optimization results of circular flexure hinge

目标函数	初始参数 $\mathbf{X}^0$	优化参数 $\mathbf{X}^*$	优化率/%
$o_1(x)$	$3.864 \times 10^{-2}$	$4.062 \times 10^{-2}$	5.12
$1/o_2(x)$	$1.864 \times 10^8$	$1.952 \times 10^8$	4.72

通过表 5 可以发现,优化后的铰链设计参数将初始参数下的圆弧柔性铰链弯曲柔度提升了 5.12%,同时铰链的轴向刚度提升了 4.72%。初

始参数是通过设计经验选取的性能较好的设计参数,而通过多目标遗传算法对圆弧柔性铰链的优化,在经验设计的基础上进一步提升了铰链的转动能力和负载能力,使它在高精密机构中具有更好的运动精度和运动能力。

## 4 结 论

本文采用结构矩阵法建立了圆弧柔性铰链的柔度方程,对矩形截面的翘曲抗扭刚度进行推导,得到了约束扭转状态下的扭转柔度近似方程。为相对长度较小铰链的扭转刚度精确求解提供了依据。对两组不同参数的圆弧柔性铰链进行了理论分析与有限元分析,发现扭转柔度的最大相对误

差在10%左右,其他相对误差在5%左右,验证了推导的圆弧柔性铰链柔度方程的准确性。

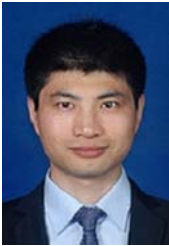
针对圆弧柔性铰链的4个耦合作用的设计参数,设计了“四因素四水平”16组正交试验。定量分析了柔性铰链各设计参数对转动刚度 $K$ 的灵敏度。在一定参数范围内,圆弧柔性铰链各几何参数对转动刚度 $K$ 的灵敏度由高到低分别为:最小厚度 $t_0$ 、宽度 $w$ ,切口半径 $R$ ,以及铰链切口长度的一半 $a$ 。采用多目标遗传算法对铰链的转动能力以及轴向刚度两个目标进行参数优化设计,对比优化结果与经验参数得到的结果,发现优化后圆弧柔性铰链的弯曲柔度提升了5.12%,同时铰链的轴向刚度提升了4.72%,证明圆弧柔性铰链的优化设计效果明显。

## 参考文献:

- [1] HOWELL L L. *Compliant Mechanisms*[M]. New York: Wiley Interscience, 2001.
- [2] WASON J D, WEN J T, DAGALAKIS N G. Dexterous manipulation of a micropart with multiple compliant probes through visual force feedback[C]. 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011:5991-5996.
- [3] CHEN W, CHEN S, QU J, et al.. A large-range compliant remote center of motion stage with input/output decoupling[J]. *Precision Engineering*, 2018, 51:468-480.
- [4] LI J, LIU H, ZHAO H. A compact 2-DOF piezoelectric-driven platform based on “Z-shaped” flexure Hinges[J]. *Micromachines*, 2017, 8(8):245.
- [5] XU Q, TAN K K. Advanced control of piezoelectric micro-/nano-positioning systems[J]. *Advances in Industrial Control*, 2016.
- [6] YANG X L, WU H T, LI Y, et al.. Dynamic isotropic design and decentralized active control of a six-axis vibration isolator via Stewart platform [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2017, 117:244-252.
- [7] YANG X L, WU H T, LI Y, et al.. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2017, 107:27-36.
- [8] CAI K, TIAN Y, WANG F, et al.. Development of a piezo-driven 3-DOF stage with T-shape flexible hinge mechanism[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2016, 37(C):125-138.
- [9] 黄卫清, 党冰楠, 王寅, 等. 双向作动大行程二自由度稳像机构[J]. *光学精密工程*, 2017, 25(6):1494-1501.
- [10] 马立, 杨斌, 田应仲, 等. 3-PRR平面三自由度纳米定位平台的设计[J]. *光学精密工程*, 2017, 25(7):1866-1873.
- [11] 董世则, 郭抗, 李显凌, 等. 光学元件狭缝柔性调节机构的设计与分析[J]. *中国光学*, 2017, 10(6):790-797.
- [10] HUANG W Q, DANG B N, WANG Y, et al.. Two-freedom image stabilization institution of large stroke of bidirectional actuation[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25(6):1494-1501. (in Chinese)
- [11] MA L, YANG B, TIAN Y ZH, et al.. Design of 3-DOF planar nano-positioning platform with 3-PRR structure[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25(7):1866-1873. (in Chinese)
- [11] DONG SH Z, GUO K, LI X L, et al.. Design and

- analysis of adjustment mechanism with slit diaphragm flexures for optical elements[J]. *Chinese Optics*, 2017, 10(6):790-797. (in Chinese)
- [12] 张雷, 柯善良, 李林, 等. 超轻反射镜串联柔性支撑结构优化设计[J]. *光子学报*, 2018, 47(1): 0122001.
- ZHANG L, KE SH L, LI L, *et al.*. Optimum design of ultra-light mirror series flexible support structure[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, 47(1):0122001. (in Chinese)
- [13] WU Y, ZHOU Z. Design calculations for flexure hinges[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2002, 73(8):3101-3106.
- [14] LOBONTIU N, PAINE J S N, O'MALLEY E, *et al.*. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations [J]. *Precision Engineering*, 2002, 26(2):183-192.
- [15] LOBONTIU N, CULLIN M, PETERSEN T, *et al.*. Planar compliances of symmetric notch flexure hinges: the right circularly corner-filletted parabolic design[J]. *IEEE Transactions on Automation Science & Engineering*, 2014, 11(1):169-176.
- [16] CHEN G, SHAO X, HUANG X. A new generalized model for elliptical arc flexure hinges[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2008, 79(9): 095103.
- [17] MIN L, ZHANG X, FATIKOW S. Design and analysis of a high-accuracy flexure hinge[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(5): 055106.
- [18] PARVARI RAD F, VERTECHY R, BERSELLI G, *et al.*. Analytical compliance analysis and finite element verification of spherical flexure hinges for spatial compliant mechanisms[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2016, 101:168-180.
- [19] PARVARI RAD F, BERSELLI G, VERTECHY R, *et al.*. Design and stiffness analysis of a compliant spherical chain with three degrees of freedom[J]. *Precision Engineering*, 2017, 47:1-9.
- [20] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D, *et al.*. Three flexure hinges for compliant mechanism designs based on dimensionless graph analysis[J]. *Precision Engineering*, 2010, 34(1):92-100.
- [21] CHEN G, JIA J, HAN Q. Geometrical profile optimization of elliptical flexure hinge using a modified particle swarm algorithm[C]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005:533-542.
- [22] ZELENKA S, MUNTEANU M G, DE BONA F. Optimized flexural hinge shapes for microsystems and high-precision applications[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2009, 44(10):1826-1839.
- [23] YOUNG W C, BUDYNAS R G. *Roark's Formulas for Stress and Strain*[M]. 7th ed.. New-York: McGraw Hill, 2002.
- [24] TSEYTLIN Y M. Notch flexure hinges: An effective theory[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2002, 73(9):3363-3368.
- [25] LOBONTIU N, PAINE J S N, GARCIA E, *et al.*. Corner-filletted flexure hinges[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(3):346-352.
- [26] CHOI S B, HAN S S, HAN Y M, *et al.*. A magnification device for precision mechanisms featuring piezoactuators and flexure hinges: Design and experimental validation[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(9):1184-1198.
- [27] LOBONTIU N, GARCIA E, CANFIELD S. Torsional stiffness of several variable rectangular cross-section flexure hinges for macro-scale and MEMS applications [J]. *Smart Materials & Structures*, 2003, 13(1):12-19.
- [28] COWPER G R. The shear coefficients in Timoshenko's beam theory[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2):335-340.
- [29] CHEN G, HOWELL L L. Two general solutions of torsional compliance for variable rectangular cross-section hinges in compliant mechanisms[J]. *Precision Engineering*, 2009, 33(3):268-274.

- [30] YONG Y K, LU T F, HANDLEY D C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations[J]. *Precision Engineering*, 2008, 32(2):63-70.
- [31] HEARN E J. *Mechanics of Materials: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Compo-* nents[M]. Pergamon Press, 1977.
- [32] 卢倩, 黄卫清, 王寅,等. 深切口椭圆柔性铰链优化设计[J]. *光学精密工程*, 2015, 23(1):206-215.
- LU Q, HUANG W Q, WANG Y, *et al.*. Optimization design of deep-notch elliptical flexure hinges [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(1):206-215. (in Chinese)

**作者简介:**

李 耀(1989—),男,山东临沂人,博士研究生,2012年于山东农业大学获得学士学位,2015年于南京航空航天大学获得硕士学位,主要从事柔性并联机构与隔振技术的研究。E-mail: liyaokkx@nuaa.edu.cn



吴洪涛(1962—),男,江苏扬州人,博士,教授,博士生导师,1982年于东北重型机械学院获得学士学位,1985年、1992年于天津大学分别获得硕士、博士学位,主要从事多体系统动力学研究。E-mail:mehtwu@126.com