

文章编号 1004-924X(2018)09-2289-05

基于蒙特卡罗法的 MEMS 测力计不确定性分析

韩 琪*, 陈贵敏, 邵晓东

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 由于结构尺寸小, 微电子机械系统(MEMS)的性能易受到加工工艺过程中各种不确定因素的影响, 设计阶段存在着不确定性。本文针对一种典型的 MEMS 测力计进行不确定性分析, 在考虑大挠度变形的条件下, 基于完备椭圆积分解给出了测力计的载荷-位移模型, 模型结果表明测力计在位移超过 $30\ \mu\text{m}$ 后表现出显著的非线性。基于该模型, 综合考虑材料参数和结构尺寸参数的随机性, 研究了测力计不确定性分析的蒙特卡罗法, 并给出了直接对蒙特卡罗抽样数据实施线性回归获得各参数敏感度的计算方法, 用于便捷地分析各参数对测力计不确定性的贡献。所得到的结果与文献吻合非常好, 验证了该方法的正确性和有效性, 并为测力计的鲁棒设计以及工艺改进提供参考。本文给出的系统不确定性分析方法具有通用性强、使用简单等优点, 同时避免了对解析模型的依赖, 证明其可应用于难以显式表达输入与输出关系的系统的不确定性分析。

关键词: MEMS 测力计; 椭圆积分解; 不确定性; 蒙特卡罗法

中图分类号: TH712 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20182609.2289

Uncertainty analysis of MEMS force gauges based on Monte Carlo method

HAN Qi*, CHEN Gui-min, SHAO Xiao-dong

(School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

* Corresponding author, E-mail: qihan@xidian.edu.cn

Abstract: Due to their small size, the performances of microelectromechanical systems (MEMS) are susceptible to uncertainties associated with the micro-fabrication processes; thus, it is necessary to consider these uncertainties during the design stage. By conducting an uncertainty analysis of a typical MEMS force gauge, a load-deflection model was first derived based on the comprehensive elliptic integral solution. The model showed that the force gauge exhibits a nonlinear load-deflection relationship when the deflection surpasses $30\ \mu\text{m}$. Based on the model, the uncertainty of the force gauge was analyzed using the Monte-Carlo method, by considering the variations of the material and dimensional parameters, and the contributions of the parameters to the uncertainty were analyzed using their sensitivities directly obtained from the linear regression of the Monte-Carlo samples. The results agree well with those presented in Ref. [1], indicating the correctness and effectiveness of the method. The results could be helpful for the robustness design of the force gauge, and provide guidance for improving the micro-fabrication processes. The uncertainty analysis method presented in this work is versatile, easy to use, and does not rely on analytical models; it can thus be applied to the uncertainty analysis of systems whose input-output relations cannot be explicitly formulated.

Key words: MEMS force gauge; elliptic integral solution; uncertainty prediction; Monte Carlo method

收稿日期: 2018-02-01; 修订日期: 2018-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51675396)

1 引言

微电子机械系统(MEMS)具有结构尺寸小、易集成且可大批量生产等优点,近年来得到了迅速地发展,并在航空航天、汽车、生物医学、环境监测、军事等领域获得了大量地应用^[1-3]。由于结构尺寸小,系统易受到加工工艺过程中各种不确定因素的影响,再加上样机加工费用高、周期长,因此有必要在设计阶段将不确定性考虑进来^[2,4],以增加一次设计成功的几率,缩短开发周期和降低开发成本。

许多微电子机械系统需要通过测量各种力来确定系统的特性,如致动器的输出力,不同部件间的接触力、摩擦力,柔性构件的弹性回复力^[5]等。本文将讨论一种常用的 MEMS 测力计(如图 1 所示),其原理是借助多个并联的固定-导向柔性梁将力转化为变形位移进行读取^[1]。图中 B 点处与被测系统相连,通过在 A 点处施加力进行测量。

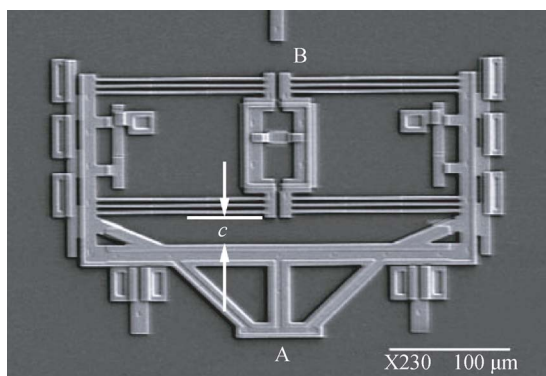


图 1 测力计的扫描电镜图^[1]

Fig. 1 Scanning electron micrograph of MEMS force gauge^[1]

受加工工艺过程中不确定因素的影响,实际的材料参数和结构尺寸在设计值附近小范围波动,导致同一批次或不同批次的测力计在测量时存在一定的不确定性。为此, Wittwer 等^[1]考虑了固定-导向柔性梁的非线性载荷-位移特性,采用四次多项式拟合的近似模型对测力计进行不确定性分析。Attoh-Okine^[5]为该测力计给出了一种基于凸模型的不确定性分析方法。两种分析方法均依赖于通过求导获得灵敏度的计算公式。

蒙特卡罗法(Monte Carlo Method),也称为统计模拟法,是 20 世纪 40 年代在洛斯阿拉莫斯国家实验室研制原子弹期间提出的一种以概率统计理论为指导的数值计算方法^[6]。蒙特卡罗法省却了复杂的数学推导,易于理解和掌握,因此得到了广泛地应用^[7-8]。然而,这些工作只关心系统输出的统计规律,均未涉及输出对输入参数的灵敏度计算。为此,本文给出一种基于蒙特卡罗法的灵敏度计算方法,并对 MEMS 测力计进行不确定性分析,该方法具有通用性强、使用简单等优点。

2 MEMS 测力计

图 1 所示的 MEMS 测力计由 12 个固定-导向柔顺梁并联而成,每个柔顺梁的长度为 L 、厚度为 T 、宽为 W 。由于测力计左右对称,图 2 仅给出了其右半侧的变形示意图。测力计在载荷 F 的作用下,产生变形位移为 b 。

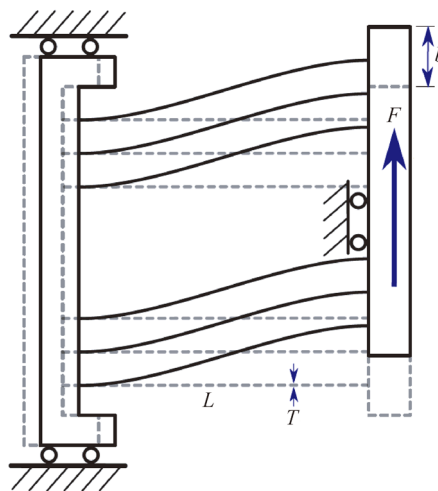


图 2 MEMS 测力计示意图

Fig. 2 Schematic diagram of MEMS force gauge

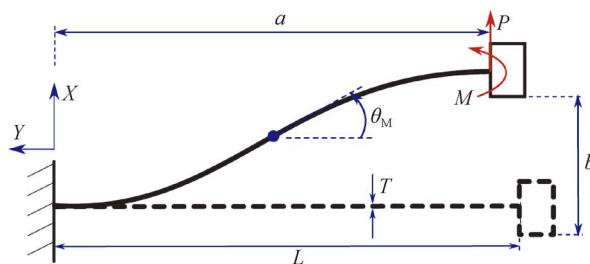


图 3 MEMS 测力计中的固定-导向柔顺梁

Fig. 3 Fixed-guided flexible beam in MEMS force gauge

取任一固定-导向柔顺梁进行分析(如图 3 所示),其自由端受到横向力 P 以及弯矩 M 的共同作用,变形后自由端的转角保持不变,自由端的坐标值分别为 b 和 a 。固定-导向梁变形后会在中点处产生一个转折点(此处弯矩和曲率均为零),记该转折点处的转角为 θ_M 。通过定义载荷因子:

$$\alpha = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}, \quad (1)$$

其中: E 为材料的弹性模量, I 为梁的截面惯性矩:

$$I = \frac{WT^3}{12}. \quad (2)$$

相应地,该载荷因子 α 、自由端的坐标值 a 和 b 可用椭圆积分表示为^[9-11]:

$$\begin{cases} \alpha = \Gamma(\tau) - \Gamma(\gamma, \tau) \\ a = \frac{2L}{\alpha} \sqrt{2(\sin \theta_M + 1)} \cos \gamma \\ b = \frac{2L}{\alpha} [\Gamma(\tau) - \Gamma(\gamma, \tau) + 2\Xi(\gamma, \tau) - 2\Xi(\tau)] \end{cases}, \quad (3)$$

其中: $\Gamma(\gamma, \tau)$ 和 $\Xi(\gamma, \tau)$ 分别是第一类和第二类非完全椭圆积分, $\Gamma(\tau)$ 和 $\Xi(\tau)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分,参数 τ 和 γ 分别为椭圆模和模角:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sin \theta_M + 1}{2}}, \quad (4)$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + \sin \theta_M}}. \quad (5)$$

载荷 P 可由载荷因子的定义求得:

$$P = \frac{\alpha^2 EI}{L^2}. \quad (6)$$

整个测力计由 12 个固定-导向梁构成,因此,总的载荷-位移关系为:

$$F = 12P = \frac{12\alpha^2 EI}{L^2}. \quad (7)$$

文献[1]中给出的 MEMS 测力计设计参数为: $E = 162 \text{ GPa}$, $L = 150 \text{ }\mu\text{m}$, $W = 3.5 \text{ }\mu\text{m}$, $T = 3 \text{ }\mu\text{m}$ 。采用上述椭圆积分解可得到如图 4 所示的测力计载荷-位移曲线。从图中可以看出,在位移 b 不超过 $30 \text{ }\mu\text{m}$ 的情况下,该测力计有较好的载荷-位移线性度,而超过 $30 \text{ }\mu\text{m}$ 后表现出非常显著的非线性。

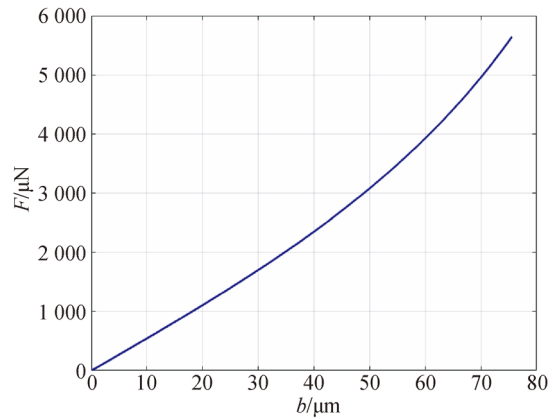


图 4 测力计的非线性载荷-位移曲线

Fig. 4 Nonlinear force-deflection curve of force gauge

3 不确定性分析

3.1 不确定性描述

在给定变形位移 b 的情况下,由加工工艺导致的所测力的方差可表示为^[1]:

$$\sigma_F^2(b) = \left[\frac{\partial F(b)}{\partial E} \right]^2 \sigma_E^2 + \left[\frac{\partial F(b)}{\partial W} \right]^2 \sigma_W^2 + \left[\frac{\partial F(b)}{\partial T} \right]^2 \sigma_T^2 + \left[\frac{\partial F(b)}{\partial L} \right]^2 \sigma_L^2, \quad (8)$$

其中: σ_T , σ_W , σ_L , σ_E 分别为由加工工艺引起的柔性梁厚度、宽度、长度以及弹性模量的均方差, $\partial F(b)/\partial E$, $\partial F(b)/\partial W$, $\partial F(b)/\partial T$, $\partial F(b)/\partial L$ 为所测力对各个参数的灵敏度^[12]。由于载荷-位移关系存在显著的非线性,导致参数的灵敏度随着位移 b 变化而变化。

由于上述椭圆积分不可解析求导,难以直接获得式(8)中所需的灵敏度信息。为了获得灵敏度的解析表达, Wittwer 等^[1]采用多项式拟合的办法近似代替椭圆积分解,通过对多项式求导获得灵敏度的计算公式。由于拟合本身会在一定程度上降低模型的精度,另一方面,拟合难以推广应用于复杂的多参数系统。为此,本文提出一种基于线性回归的通用灵敏度计算方法,该方法可与蒙特卡罗法有机地结合起来。

考虑到由于工艺导致的各参量的变化范围很小,与它们的均值(名义值)相比均可看作小量,因此,在给定变形处,由各参量的微小变化引起测量值 F 的变化可表示为如下全微分形式(线性假设):

$$\Delta F_i = \frac{\partial F(b)}{\partial E} \Delta E_i + \frac{\partial F(b)}{\partial W} \Delta W_i + \frac{\partial F(b)}{\partial T} \Delta T_i + \frac{\partial F(b)}{\partial L} \Delta L_i, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \Delta_{F_i} = F_i - F \\ \Delta_{E_i} = E_i - E \\ \Delta_{W_i} = W_i - W, \\ \Delta_{T_i} = T_i - T \\ \Delta_{L_i} = L_i - L \end{cases} \quad (10)$$

式中的下标 i 表示第 i 个 ($i = 1, 2, \dots, N$) 抽样对应的结果。由 N 组抽样的结果可以算出 N 组 $\Delta_{F_i}, \Delta_{E_i}, \Delta_{W_i}, \Delta_{T_i}$ 和 Δ_{L_i} 的值, 对式(9)采用线性回归即可得到相应的灵敏度。

3.2 蒙特卡罗法的分析步骤

基于蒙特卡罗法的 MEMS 测力计不确定性分析流程具体步骤如下:

(1) 设置蒙特卡罗的抽样次数 N (N 要求足够大);

(2) 由随机参数的分布特性随机产生 N 个向量样本 X_i ($i = 1, 2, \dots, N$);

(3) 运用椭圆积分解计算每个样本的载荷-位移特性曲线 $F_i(b)$;

(4) 运用椭圆积分解计算根据设计参数计算测力计的名义载荷-位移特性曲线 $F(b)$;

(5) 根据式(9), 通过线性回归获取各参数在不同变形位移处的灵敏度;

(6) 采用式(8)计算测力计在不同变形位移处的方差, 并进行不确定性分析。

在蒙特卡罗模拟中, N 组抽样数据在线性回归时被重复利用(灵敏度计算)。也就是说, 灵敏度计算并没有额外增加对模型的计算。

3.3 实例计算与比较

根据 MEMS 加工工艺以及文献[1, 13-15], 测力计各参数大致符合正态分布, 均值取设计值, 均方差分别取: $\sigma_E = 7.143 \text{ GPa}$, $\sigma_W = 0.06 \text{ }\mu\text{m}$, $\sigma_T = 0.05 \text{ }\mu\text{m}$, $\sigma_L = 0.1 \text{ }\mu\text{m}$ 。在计算中取蒙特卡罗的抽样次数 $N = 10\ 000$ 。

图 5 以堆叠线图的形式画出了测力计在不同变形位移处各参数的变差对测量值标准差的贡献。从图 5 中可以看出, 梁长 L 的变化对测量值的影响最小, 基本可以忽略。弹性模量 E 和梁厚度 T 对测量值的影响较为显著, 且都随着变形位移 b 的增大而呈抛物线增长趋势。

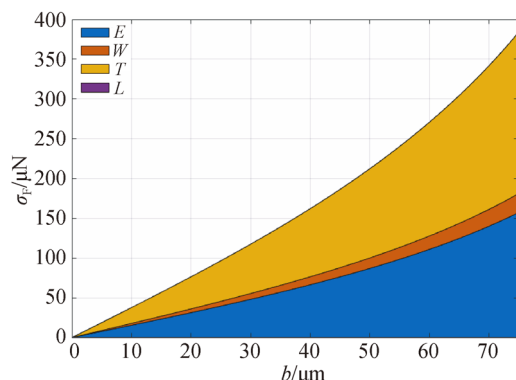


图 5 参数 E, W, T 和 L 的变差对测量值标准差的贡献
Fig. 5 Relative contributions of variation in E, W, T and L to total force error at different deflections

表 1 给出了测力计在几个典型变形位移处测量值及其均方差和各参数对测量值方差的贡献。为了便于比较, 表 1 列出了文献[1]中在变形位移 $20 \text{ }\mu\text{m}$ 处的计算结果。可以看出, 本文方法的结果与文献[1]吻合非常好, 充分说明了该方法的正确性。

表 1 不同变形位移处的测量力及其均方差和方差分量
Tab. 1 Estimated force, its standard deviation and variance components at various measured deflections

变形位移 (b)/ μm	20	20 ^[1]	50	75
$F/\mu\text{N}$	1 109	1 109	3079	5 569
$\sigma_F/\mu\text{N}$	76.4	74.3	212.2	383.7
$\left(\frac{\partial F(b)}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2/\mu\text{N}^2$	2 391	2 391	18 431	60 294
$\left(\frac{\partial F(b)}{\partial W}\right)^2 \sigma_W^2/\mu\text{N}^2$	362	361	2 792	9 134
$\left(\frac{\partial F(b)}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2/\mu\text{N}^2$	3 081	3 074	23 755	77 712
$\left(\frac{\partial F(b)}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2/\mu\text{N}^2$	5	5	38	123
$\sigma_F^2(b)/\mu\text{N}^2$	5 839	5 832	45 016	147 263

4 结 论

本文基于蒙特卡罗法给出一种通用性强、使用简单的系统不确定性分析方法, 并将其用于 MEMS 测力计的不确定性分析。所得到的结果与文献[1]中的结果吻合非常好, 说明该方法的正确性和有效性, 所得结果可为测力计的鲁棒设计以及工艺改进提供参考。

对于大多数非线性系统, 系统的输入与输出没有显式的表达, 利用解析微分计算灵敏度不具备可行性。本文给出的不确定性分析方法采用线性回归获得灵敏度信息, 避开了解析模型的依赖, 因此具有很好的推广价值。

参考文献:

- [1] WITTEWER J W, GOMM T and HOWELL L L. Surface micromachined force gauges: uncertainty and reliability [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2002, 12(1): 13-20.
- [2] 步超, 聂伟荣, 徐安达, 等. 基于柔性止动的 MEMS 惯性开关冲击可靠性强化 [J]. *光学精密工程*, 2017, 25 (1): 123-132.
- BU CH, NIE W R, XU A D, *et al.*. Shock reliability enhancement by flexible stop for MEMS inertial switch [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25 (1): 123-132. (in Chinese)
- [3] 王玉朝, 余才佳, 田蕊, 等. MEMS 谐振器刚度非线性特性及其表征 [J]. *光学精密工程*, 2015, 23 (11): 3114-3120.
- WANG Y CH, YU C J, TIAN R, *et al.*. Characterization and verification of MEMS resonator non-linearity [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(11): 3114-3120. (in Chinese)
- [4] HOWELL L L, RAO S S, MIDHA A. Reliability-based optimal design of a bistable compliant mechanism [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1994, 116: 1115-1121.
- [5] ATTOH-OKINE N O. Uncertainty analysis in surface micromachined force gauges: convex model approach [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2004, 17(1): 40-44.
- [6] WASSERSTEIN R L, FISHMAN G S. Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications [J]. *Technometrics*, 1997, 39(3): 338.
- [7] 陈宜方. X 射线衍射光学部件的制备及其光学性能表征 [J]. *光学精密工程*, 2017, 25 (11): 2779-2795.
- CHEN Y F. Fabrication of diffractive X-ray optics and their performance characterization [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25 (11): 2779-2795. (in Chinese)
- [8] 孟庆宇, 汪洪源, 王严, 等. 大线视场自由曲面离轴三反光学系统设计 [J]. *红外与激光工程*, 2016, 45(10): 156-163.
- MENG Q Y, WANG H Y, WANG Y, *et al.*. Off-axis three-mirror freeform optical system with large linear field of view [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, 45(10): 156-163. (in Chinese)
- [9] HOWELL L L. Compliant mechanisms [M]. New York: Wiley, 2001.
- [10] ZHANG A, CHEN G. A Comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms [J]. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 2013, 5 (2): 021006.
- [11] BISSHOPP K E and DRUCKER D C. Large deflection of cantilever beams [J]. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 1945, 3 (3): 272-275.
- [12] SALTELLI A, CHAN K, SCOTT E M. *Sensitivity Analysis* [M]. New York: Wiley, 2000.
- [13] CHEN G, WILCOX D L, HOWELL L L. Fully compliant double tensural tristable micromechanisms (DTTM) [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2009, 19(2): 025011.
- [14] SHARPE W N, TURNER K T, EDWARDS R L. Tensile testing of polysilicon [J]. *Experimental Mechanics*, 1999, 39(3), 162-170.
- [15] KOESTER D A, MAHADEVAN R, HARDY B, *et al.*. MUMPS™ Design Handbook Revision 6.0 [R]. 2001.

作者简介:



韩 琪(1977—),女,重庆人,博士研究生,2006 年于西安电子科技大学获得硕士学位,主要从事柔顺机构、虚拟现实等研究。E-mail: qihan @ xidian.edu.cn

导师简介:



邵晓东(1970—),男,浙江绍兴人,教授,博士,主要从事虚拟现实、CAD/CAE/CAM 以及柔顺机构等研究。E-mail: shao_xiao_dong@163.com