

文章编号 1004-924X(2018)08-2039-09

轴承滚子凸度轮廓的最小二乘拟合与误差评定

雷贤卿^{1*}, 张亚东^{1*}, 马文锁^{1,2}, 卢璐卿¹, 左孝林¹

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;
2. 机械装备先进制造河南省协同创新中心, 河南 洛阳 471003)

摘要: 为了实现对轴承滚子凸度轮廓误差的精确评定, 依据圆弧修正型轴承滚子凸度素线轮廓的几何特征和形状误差的定义, 基于最小二乘原理, 研究了轴承凸度轮廓(两段圆弧和一段直线)的最小二乘拟合和误差评定方法。首先利用各测量点的曲率差值确定了圆弧段与直线段的相切参考点; 其次分别选取两个参考点临近的测量点作为辅助相切参考点, 并与对应的圆弧段测量点一起拟合出一系列的最小二乘圆弧并计算拟合误差; 然后基于直线与两段圆弧相切的原则确定出一系列的直线方程并计算对应的直线度误差; 通过比较判断最终确定出圆弧修正型轴承滚子凸度轮廓的最小二乘拟合及误差评定。实例结果表明: 圆弧修正型凸度轮廓曲线的总误差 0.020 9 mm 与文中设定标准凸度轮廓曲线引入的法向误差 0.02 mm 相差 4.5%。本方法可以有效的实现轴承凸度轮廓的拟合与误差评定, 为平面多段曲线的最小二乘拟合提供了一种新的思路。

关键词: 轴承滚子凸度; 最小二乘法; 分段拟合; 误差评定

中图分类号: TG801 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20182608.2039

Least square fitting and error evaluation of the convex contour of bearing roller

LEI Xian-qing^{1*}, ZHANG Ya-dong^{1*}, MA Wen-suo^{1,2}, HU Lu-qing¹, ZUO Xiao-lin¹

(1. School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China;

2. Collaborative Innovation Center of Machinery Equipment Advanced Manufacturing of Henan Province, Luoyang 471003, China)

* Corresponding author, E-mail: ly_lxq@163.com; 1340385814@qq.com

Abstract: In this investigation, we attempted to accurately evaluate the profile error of the bearing roller convexity, based on the definition of geometric characteristics and shape error of the arc corrected roller convexity line of bearing. This approach involves the least square principle, the method of total least squares fitting, and error evaluation of the convexity contour of the bearing roller. Firstly, the tangent reference points of the arc segment and the straight line are determined by the curvature difference of each measurement point. Secondly, the measurement points on both sides of the two reference points were selected as auxiliary tangent reference points, and a series of least squares arcs were fitted together with the corresponding circular arc meas-

收稿日期: 2017-12-29; **修订日期:** 2018-02-10.

基金项目: 河南省高性能轴承技术重点实验室开放基金资助项目(No. 2016ZCKF03); 河南省高等学校重点科研项目资助(No. 17A410001)

urement points, and the fitting errors were calculated. Then a series of linear equations were determined, and the corresponding straightness error was calculated using the tangent between the straight line and the two segment arcs. The least square fitting and error evaluation of the roller convexity contour of the circular arc modified roller is determined by comparison. The results of the investigated scenario indicate that the total error of the arc modified convex contour curve is 0.020 9, which is 4.5% less than the normal error of 0.02 that is introduced by the standard convex contour curve. This method can effectively evaluate the fitting and error of the convexity contour of the bearing roller and represents a new approach for least squares fitting of planar multi-section curves.

Key words: convexity of bearing roller; least square method; piecewise fitting; error assessment

1 引 言

滚动轴承是各种机械设备的重要基础部件, 被称为工业的关节。初期圆锥(圆柱)滚子轴承的滚子和滚道的母线设计为直线。在运转良好的滚子轴承中, 滚子与其内外滚道均处于有限长度的线接触状态, 直母线滚子和滚道在接触线长度两端的位置一般会先于其他区域出现接触疲劳点蚀, 从而产生严重的应力集中(边缘效应), 油膜分布较差^[1,2]。通过精细加工修形使滚子或(和)滚道的母线具有向实体外轻微突出的曲线形状, 可使轴承滚子与滚道的接触应力和润滑油膜沿接触区长度方向分布均匀^[3]。目前, 工程中常用的滚子修形曲线主要有全圆弧型、圆弧修正型、对数曲线型等。其中圆弧修正型曲线可使滚子可全长进入接触且不发生边缘效应, 并可提高轴承的承载能力, 延长轴承的使用寿命以及经济合理等优点, 故在滚子母线凸度设计中广泛使用。研究表明, 修形后的滚子母线的细微凸度轮廓误差(凸度大小误差、凸度中心偏移误差和凸度形状误差)会引起其接触应力和弹流润滑油膜的强烈差异^[4], 使其对轴承的使用性能产生重要影响^[5]。因此, 研究圆弧修正线型的轴承滚子轮廓整体拟合及误差评定算法, 对保证滚子质量及精度有着重要意义。

圆弧修正型轴承凸度曲线有两段圆弧和一段中间直线组成(图 1), 关于圆弧和直线的拟合及其形状误差的评定算法的研究多见于各类期刊^[6-10], 但对平面多段曲线的整体最小区域拟合尚有不足。Benko^[11]等对反求工程中的各种曲线和曲面相关的约束问题进行了研究, 并给出了二维曲线特征表达和约束表达, 但对二维曲线的整体约束优化缺乏系统性研究^[12]。在凸度测量方

面, 国内一般侧重于精密仪器的使用^[13], 凸度的误差评定几乎无人涉及。因此, 以圆弧修正型轴承凸度曲线为例, 研究平面多段曲线的整体约束拟合和轮廓度误差评定算法, 不但对检验轴承滚子凸度质量和定量研究凸度轴承的弹流润滑状态有重要价值, 也对反求工程中平面断面数据的有效拟合有着重要的意义。

圆弧修正型轴承凸度曲线有着显著的几何特征, 使用一个拟合函数来描述难以取得较好的拟合精度和效果。本文采用分段拟合、多值寻优的拟合方法, 实现轴承凸度曲线的最小二乘拟合和误差评定。

2 圆弧修正型滚子凸度方程

轴承凸度是指轴承滚子的直线母线修形为一条中凸的曲线, 其中间段近似为直线, 曲线两端呈变曲率弯曲状分别向两个端部的实体收缩。

圆弧修正线型滚子的母线由中间长度为 L_m 的直线和两端半径为修缘圆弧组成。如图 1 所示。直线与圆弧相切时, 称此时的凸型为理想圆弧修正线型。

不失一般性, 圆柱(圆锥)滚子的圆弧修正线型凸度素线(图 2)用式(1)表示(注: 设计时, 一般要求 $R_1 = R_2$)

$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = R_1^2 & (x_0 \leq x \leq x_1) \\ y = kx + e & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = R_2^2 & (x_2 \leq x \leq x_3) \end{cases}, \quad (1)$$

式中:

$$k = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2},$$

$$e = \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) \pm R_1 \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}}{a_2 - a_1}.$$



图 1 圆弧修正型凸度滚子的三维示意图
Fig. 1 Schematic of 3-D of circular arc modified convexity roller

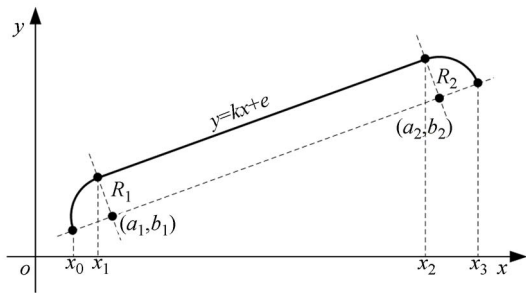


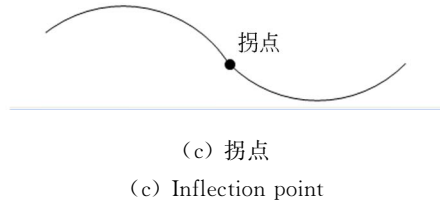
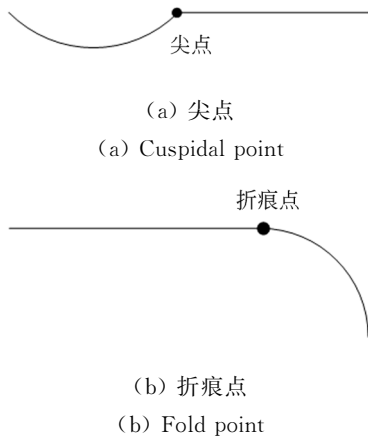
图 2 圆弧修正型凸度素线简图
Fig. 2 Diagram of circular arc modified convexity line

3 最小二乘算法评定步骤

3.1 确定直线段与圆弧段的分界点

3.1.1 分界点

圆弧修正型凸度素线由圆弧线段和直线段组成,圆弧线段和直线段的连接点就是轮廓线的分界点,常见的分界点有跳跃点(位置不连续的点)、尖点(切矢不连续的点)、折痕点(即切点,曲率不连续的点)、拐点等,如图 3 所示。



(c) 拐点
(c) Inflection point

图 3 圆弧与直线之间常见分界点
Fig. 3 Common boundary points between arcs and lines

圆弧修正型滚子凸度母线的线型是圆弧与直线相切,其分界点就是折痕点。分界点的提取一般依据轮廓数据点的曲率特性,离散数据曲率的估算常采用 B 样条曲线拟合、圆弧拟合、抛物线拟合等方法;其中,圆弧拟合法简单、易实现,对有显著的几何特征的规律性数据点曲率计算结果较为准确。

3.1.2 中间测量点群的曲率计算

设 $P_i(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, N)$ 是被测凸度轮廓曲线上的 N 个测量点,除两端点外的所有测量点为中间测量点群,亦即,中间测量点为 $P_i(x_i, y_i) (i=2, 3, \dots, N-1)$,中间测量点 $P_i(x_i, y_i)$ 的曲率 $K_i (i=2, 3, \dots, N-1)$ 由点 $P_i(x_i, y_i)$ 及左右相邻的点 $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ 和 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 3 点所确定的圆来决定的(图 4),中间点 $P_i(x_i, y_i)$ 的曲率 $K_i (i=2, 3, \dots, N-1)$ 计算如式(2)。

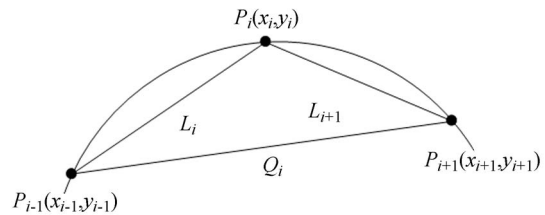


图 4 中间测量点曲率的计算原理图
Fig. 4 Calculation of the curvature of the intermediate point of measurement

$$K_i = \frac{4S}{L_i Q_i L_{i+1}}, \quad (2)$$

式中:

$$L_i = \| P_i - P_{i-1} \| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2};$$

$$Q_i = \| P_{i+1} - P_{i-1} \| = \sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2};$$

$$L_{i+1} = \| P_{i+1} - P_i \| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2};$$

$$S = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(L_i + L_{i+1} + Q_i)(L_{i+1} + Q_i - L_i) \times}$$

$$\sqrt{(L_i - L_{i+1} + Q_i)(L_{i+1} + L_i - Q_i)},$$

当 $P_{i-1}P_i \times P_{i-1}P_{i+1} > 0$, 三角形面积 S 取正值; 反之, S 取负值。

3.1.3 测量点曲率差及分界点的确定

测量点的曲率差 E_i 是指测量点 $P_i(x_i, y_i)$ 的曲率 K_i 与前一个测量点 $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ 的曲率 K_{i-1} 之差:

$$E_i = K_i - K_{i-1}. \quad (3)$$

由于直线段与圆弧段之间的切点是曲率不连续的点, 因此取曲率差值的极大值 $\max E_i$ 所对应的测量点作为左端圆弧与直线的分界点, 记为: $P_g(x_g, y_g)$ 取曲率差值的极小值 $\min E_i$ 所对应的测量点作为右端圆弧与直线的分界点, 记为 $P_h(x_h, y_h)$, 如图 5 所示。

3.2 两端圆弧曲线段的最小二乘拟合及误差计算

3.2.1 构建辅助分界点

在分界点 P_g, P_h 左右两边各取 $t(3 \leq t \leq 5)$ 个测量点作为辅助分界点, 分别记为 P_{g-t}, \dots, P_{g+t} 和 P_{h-t}, \dots, P_{h+t} 。分界点与辅助分界点构成的区域称为临界区域。 P_g 与 P_{g-t}, \dots, P_{g+t} 构成的临界区域称为左临界区域。 P_h 与 P_{h-t}, \dots, P_{h+t} 组成的临界区域称为右临界区域。为表述方便, 左辅助分界点 P_{g-t}, \dots, P_{g+t} 用 $P_m(m=1, 2, 3, \dots, 2t+1)$ 表示, 右辅助分界点 P_{h-t}, \dots, P_{h+t} 用 $P_n(n=1, 2, 3, \dots, 2t+1)$ 表示(如图 5 所示)。

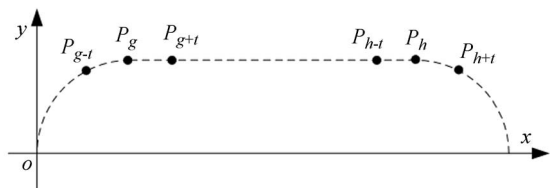


图 5 分界点及临界区域示意图

Fig. 5 Schematic of demarcation point and critical region

3.2.2 圆弧段的数据拟合和误差

对于左圆弧, 用剩余的左测量点 $P_1(x_1, y_1) \sim P_{g-t-1}(x_{g-t-1}, y_{g-t-1})$ 依次与右辅助分界点 P_{g-t}, \dots, P_{g+t} 构成拟合数据(如: 数据组 1: $P_1 \sim P_{g-t}$, 数据组 2: $P_1 \sim P_{g-t+1}$, 数据组 3: $P_1 \sim P_{g-t+2}, \dots$, 直到数据数 $2t+1: P_1 \sim P_{g+t}$), 采用最小二乘法进行圆弧拟合^[14-15]。由于辅助分界

点有 $2t+1$ 个, 那么就可以得到 $2t+1$ 个最小二乘左圆弧方程(4)及对应的最小二乘拟合误差 E_m (5)。

$$(x - a_m)^2 + (y - b_m)^2 = R_m^2, \quad (4)$$

$$E_m = |\Delta R_{m\max}| + |\Delta R_{m\min}|, \quad (5)$$

式中: 圆弧上各测量点的圆弧偏差 $\Delta R_m: \Delta R_m = \sqrt{(x_i - a_m)^2 + (y_i - b_m)^2} - R_m$, $\Delta R_{m\max}, \Delta R_{m\min}$ 分别为最大圆弧偏差与最小圆弧偏差。 $m=1, 2, \dots, 2t+1, (a_m, b_m), R_m$ 分别为拟合出的左圆弧最小二乘圆心坐标和半径。

同理, 对于右圆弧, 用剩余的右测量点 $P_N(x_N, y_N) \sim P_{h+t+1}(x_{h+t+1}, y_{h+t+1})$ 依次与左辅助分界点 P_{h-t}, \dots, P_{h-t} 构成拟合数据并用最小二乘法进行圆弧拟合。由于左辅助分界点也有 $2t+1$ 个, 那么就可以得到 $2t+1$ 个最小二乘右圆弧方程(6)及对应的最小二乘拟合误差 E_n (7)。

$$(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 = R_n^2, \quad (6)$$

$$E_n = |\Delta R_{n\max}| + |\Delta R_{n\min}|, \quad (7)$$

式中: $n=1, 2, \dots, 2t+1, \Delta R_{n\max}, \Delta R_{n\min}$ 分别为最大圆弧偏差与最小圆弧偏差。 $(a_n, b_n), R_n$ 分别为拟合出的右圆弧最小二乘圆心坐标和半径。

3.3 中间直线段的直线度误差

设中间直线段的直线方程为 $y = kx + e$, 且中间直线段与两端圆弧相切; 右端拟合出的圆弧之一与左端拟合出的 $2t+1$ 个圆弧逐一组合所构造的公相切直线就有 $2t+1$ 条, 由于右端拟合出的圆弧有 $2t+1$ 个, 故两端圆弧可构造出的公切线有 $(2t+1)^2$ 条, 依据两圆弧公切线的约束条件, 可得:

$$\begin{cases} (2k_m e_{nm} - 2k_m b_m - 2a_m)^2 - 4(k_m^2 + 1) \times \\ (a_m^2 + b_m^2 - R_m^2 + e_{nm}^2 - 2b_m e_{nm}) = 0 \\ (2k_n e_{nm} - 2k_n b_n - 2a_n)^2 - 4(k_n^2 + 1) \times \\ (a_n^2 + b_n^2 - R_n^2 + e_{nm}^2 - 2b_n e_{nm}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

解式(8)可知: $(2t+1)^2$ 组中任一情形下, 由几何原理可知, 每两个圆弧组合形式都有四条公切线, 便解出 4 组斜率 k 和截距 e 。按照截距 e 的大小对 4 组解从大到小进行排序, 选出序列中位于第二的截距 e 与之对应的斜率 k 凸度曲线中直线段的参数。故可得到 $(2t+1)^2$ 条直线的斜率 k_{nm} 和截距 e_{nm} 。根据圆弧与直线相切的几何原理可得, 左端 $2t+1$ 个圆弧与右端 $2t+1$ 个圆弧的公切线方程为:

$$y = k_{nm}x + e_{nm},$$

$$(m=1, 2, \dots, 2t+1)(n=1, 2, \dots, 2t+1). \quad (9)$$

可得到 $(2t+1)^2$ 个左切点坐标 $P_u(x_u, y_u)$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-(2k_{nm}e_{nm} - 2k_{nm}b_n - 2a_n)}{2(k_{nm}^2 + 1)} \\ \frac{-k_{nm}(2k_{nm}e_{nm} - 2k_{nm}b_n - 2a_n)}{2(k_{nm}^2 + 1)} + e_{nm} \end{array} \right].$$

可得到 $(2t+1)^2$ 个右切点坐标 $P_v(x_v, y_v)$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-(2k_{nm}e_{nm} - 2k_{nm}b_n - 2a_n)}{2(k_{nm}^2 + 1)} \\ \frac{-k_{nm}(2k_{nm}e_{nm} - 2k_{nm}b_n - 2a_n)}{2(k_{nm}^2 + 1)} + e_{nm} \end{array} \right].$$

针对 $(2t+1)^2$ 条公切线中的任一条直线来讲,其左端切点前面的测量点已参加了左端圆弧的拟合,其右端切点以后的测量点已参加了右端圆弧的拟合,则测量点 $P_i(x_i, y_i)$ 中,当 $x_u < x_i < x_v$ 时的测量点参与直线段拟合误差的计算。没有参与圆弧拟合的测量点 $P_i(x_i, y_i)$ ($x_u < x_i < x_v$) 到公切线的距离为:

$$D_{mi} = \pm \frac{k_{nm}x_i + e_{nm} - y_i}{\sqrt{k_{nm}^2 + 1}} \quad (u < i < v), \quad (10)$$

式中参与直线段误差计算的点在公切线上部取正值,反之取负值。

依据直线度误差的定义可知, $(2t+1)^2$ 条公切线的直线度误差为:

$$E_{nm} = \max D_{mi} - \min D_{mi}. \quad (11)$$

3.4 凸度素线的整体误差

当左圆弧与右圆弧组合求解公切线时,左圆弧及右圆弧的拟合误差已在 3.2.2 中得出,在公切线的直线度误差及左右圆弧的拟合误差中只有最大的误差区域才能包容此种组合形式下的整个轮廓曲线,依据轮廓度误差的定义可以知道,此最大误差就是包容整个曲线的轮廓度误差,共有 $(2t+1)^2$ 种组合形式,那么就可以得到 $(2t+1)^2$ 最大误差值,记为 F_{nm} 。

在 $(2t+1)^2$ 最大误差中,其最小值所构造的区域就是包容整个曲线的最小区域,因而整体曲线的轮廓度误差为:

$$F = \min\{F_{nm}\}. \quad (12)$$

与 F 相对应的组合形式构成的曲线就是所要拟合的整体曲线。

4 实例验证

为了验证轴承凸度轮廓误差的最小二乘法的

表 1 仿真数据

Tab.1 simulation data (mm)

序号	设定曲线上点的坐标		法向误差 δ	仿真数据点的坐标	
	x	y		x_i	y_i
1	0	0	0.008 0	-0.008 0	0.000 0
2	0.075 9	0.868 2	-0.007 0	0.082 9	0.867 0
3	0.301 5	1.710 1	0.009 0	0.293 1	1.713 2
4	0.669 8	2.500 0	-0.006 0	0.675 1	2.497 0
5	1.169 8	3.213 9	0.009 0	1.162 1	3.220 4
6	1.786 1	3.830 2	-0.005 0	1.789 3	3.826 4
7	2.500 0	4.330 1	0.002 0	2.501 0	4.328 4
8	3.289 9	4.698 5	-0.009 0	3.293 3	4.689 1
9	4.131 7	4.924 0	0.005 0	4.130 9	4.929 0
10	5.000 0	5.000 0	-0.001 2	5.000 0	5.001 2
11	6.000 0	5.000 0	0.006 0	6.000 0	5.006 0
12	7.000 0	5.000 0	-0.005 0	7.000 0	4.995 0
13	8.000 0	5.000 0	0.008 0	8.000 0	5.008 0
14	9.000 0	5.000 0	-0.005 0	9.000 0	4.995 0
15	10.000 0	5.000 0	0.003 0	10.000 0	5.003 0
16	11.000 0	5.000 0	-0.004 0	11.000 0	4.996 0
17	12.000 0	5.000 0	0.006 0	12.000 0	5.006 0
18	13.000 0	5.000 0	-0.003 0	13.000 0	4.997 0
19	14.000 0	5.000 0	0.005 0	14.000 0	5.005 0
20	15.000 0	5.000 0	-0.010 0	15.000 0	4.990 0
21	16.000 0	5.000 0	0.010 0	16.000 0	5.010 0
22	17.000 0	5.000 0	-0.002 0	17.000 0	4.998 0
23	18.000 0	5.000 0	0.004 0	18.000 0	5.004 0
24	19.000 0	5.000 0	-0.005 0	19.000 0	4.995 0
25	20.000 0	5.000 0	0.007 0	20.000 0	5.007 0
26	21.000 0	5.000 0	-0.003 0	21.000 0	4.997 0
27	22.000 0	5.000 0	0.004 0	22.000 0	5.004 0
28	23.000 0	5.000 0	-0.009 0	23.000 0	4.991 0
29	24.000 0	5.000 0	0.002 0	24.000 0	5.002 0
30	25.000 0	5.000 0	-0.008 0	25.000 0	4.992 0
31	26.000 0	5.000 0	0.002 0	26.000 0	5.002 0
32	27.000 0	5.000 0	-0.004 0	27.000 0	4.996 0
33	28.000 0	5.000 0	0.002 0	28.000 0	5.002 0
34	29.000 0	5.000 0	-0.005 0	29.000 0	4.995 0
35	30.000 0	5.000 0	0.008 0	30.000 0	4.992 0
36	30.868 3	4.924 0	-0.007 0	30.869 5	4.930 9
37	31.710 1	4.698 5	0.009 0	31.707 0	4.690 0
38	32.500 0	4.330 1	-0.006 0	32.503 0	4.335 3
39	33.213 9	4.830 2	0.009 0	33.207 5	3.822 6
40	33.830 2	3.213 9	-0.005 0	33.834 1	3.217 2
41	34.330 1	2.500 0	0.002 0	34.328 4	2.499 0
42	34.698 5	1.710 1	-0.009 0	34.707 9	1.713 5
43	34.924 0	0.868 2	0.005 0	34.919 1	0.867 4
44	35.000 0	0.000 0	-0.004 0	35.004 0	0.000 0

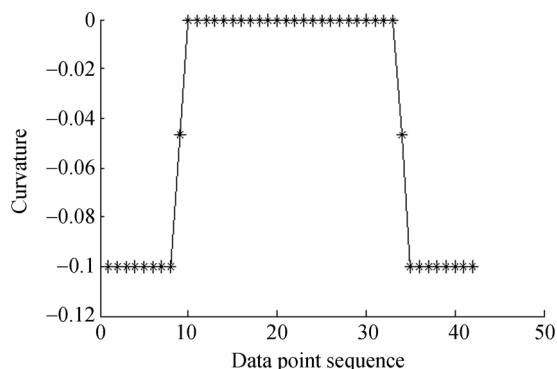
正确性,假设三段标准位置上的函数曲线作为轴承凸度轮廓的数学模型,在曲线上选取一系列的点并在其法向上加入随机误差,以便构成一系列仿真数据点,并在分界点处构造辅助分界点。

如表 1,在设定的凸度轮廓曲线(13)式上选取 44 个点并在其法向上加入随机误差,以构成实验仿真数据。

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 25 (0 \leq x < 5) \\ y = 5 (5 \leq x < 30) \\ (x-30)^2 + y^2 = 25 (30 \leq x < 35) \end{cases} \quad (13)$$

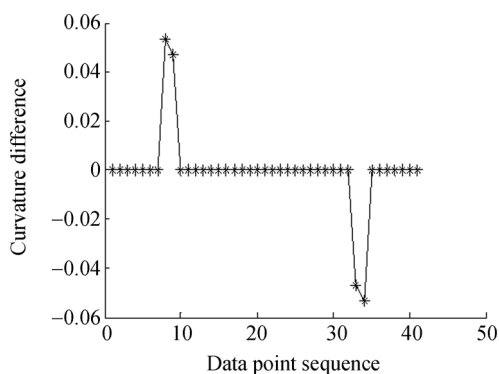
从数据构造过程中可以看出,所有仿真数据点都在设定误差为 0.02 mm 的包容区域内。利用 3.1.2,3.1.3 可计算出设置曲线数据点与仿真数据点的曲率以及曲率差值。

利用 3.1.1~3.1.3 对表 1 中的离散数据进行仿真分析,可得到离散数据的曲率及曲率差值



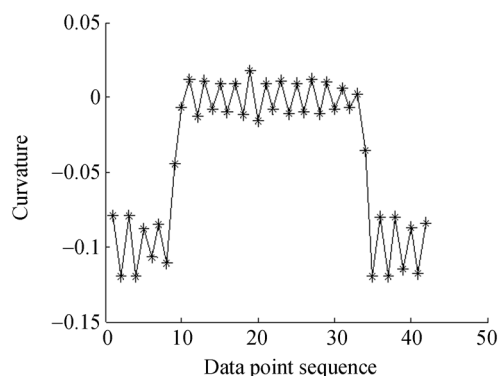
(a) 设定数据点的曲率

(a) Setting the curvature of the data point



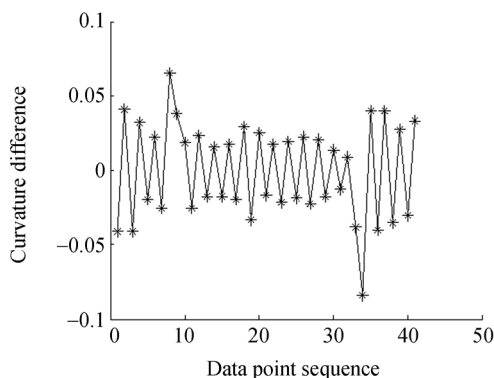
(b) 设定数据点的曲率差

(b) Setting the curvature of the data point



(c) 实验数据点的曲率

(c) Curvature of the experimental data point



(d) 实验数据点的曲率差

(d) Curvature difference of experimental data points

图 6 数据点的曲率及曲率差的变化规律图

Fig. 6 Pattern of variation of curvature and curvature difference of data points

的变化规律,如图 6。其中(a)、(b)为本文设定数据点的曲率与曲率差,(c)、(d)为仿真数据点曲率与曲率差。从图中可以看出,仿真数据中直线段和圆弧段的曲率与设置数据基本吻合,两端圆弧曲率值出现负值是由三点圆弧法中三点所构成带符号三角形的面积所决定的。通过计算仿真数据曲率差可以得出曲率差的极大值为 0.065 5,曲率差极大值所对应直线与左圆弧分界点为 P_9 ;曲率差的极小值为 -0.084 3,曲率差极小值所对应的直线与右圆弧的分界点为 P_{35} 。通过对比图 6,说明曲率差确定分界点方法的正确性,并能够快速识别分界点的位置,且编程简单。

为计算方便,在分界点 P_9, P_{35} 左右两边各取 1 个测量点作为辅助分界点。根据 3.2.2 以分界

点 P₉ 构造左端圆弧拟合数据,利用最小二乘原理对左端圆弧进行拟合可以得到 3 个左圆弧方程及对应的最小二乘误差,所拟合左圆弧参数及误差见表 2。

表 2 拟合出的左端圆弧参数及误差

Tab. 2 Parameters and errors of the left end arc fitted (mm)

数据点	左圆弧中心点及半径			误差
	a	b	R	E _m
P ₁ ~P ₈	4.975 2	0.006 5	4.977 5	0.019 5
P ₁ ~P ₉	5.005 9	-0.010 6	5.010 5	0.020 7
P ₁ ~P ₁₀	5.007 0	-0.011 7	5.012 4	0.020 9

同理根据 3.2.2 以分界点 P₃₅ 构造右端圆弧拟合数据,利用最小二乘原理对右端圆弧进行拟合同样可以得到 3 个右圆弧方程及对应的最小二乘误差,所拟合右圆弧参数及误差见表 3。

表 3 拟合出的右端圆弧参数及误差

Tab. 3 Parameters and errors of the right end arc fitted (mm)

数据点	右圆弧中心点及半径			误差
	a	b	R	E _n
P ₃₄ ~P ₄₄	29.907 5	-0.074 5	5.108 2	0.008 3
P ₃₅ ~P ₄₄	30.005 8	-2.78×10 ⁻⁶	4.996 2	0.019 7
P ₃₆ ~P ₄₄	29.991 8	-0.009 2	5.011 7	0.018 6

通过利用最小二乘圆弧拟合,将上述表 2 与表 3 中的 3 个左圆弧与 3 个右圆弧两两结合,据直线与两端圆弧相切的几何条件原则,可得到 9 条公切线的参数及直线方程,利用公式(10)计算未参与两端圆弧拟合的测量点到直线距离可得到直线的误差,见表 4。

根据 3.4 可计算 9 条凸度曲线整体误差 F 见表 5。

表 4 中间直线参数及误差

Tab. 4 Parameter and error of the middle line

(mm)

序号	左圆弧	右圆弧	直线斜率与截距		直线
	E _m	E _n	k _{mm}	e _{mm}	E _{mm}
1	0.019 5	0.082 7	0.001 9	4.974 0	0.311 5
2	0.019 5	0.019 7	0.000 4	4.981 5	0.311 6
3	0.019 5	0.018 6	0.000 7	4.980 2	0.315 4
4	0.020 7	0.082 7	0.001 3	4.993 1	0.074 4
5	0.020 7	0.019 7	-0.000 1	5.000 6	0.082 7
6	0.020 7	0.018 6	0.000 1	4.999 3	0.080 6
7	0.020 9	0.082 7	0.001 3	4.994 0	0.082 7
8	0.020 9	0.019 7	-0.000 2	5.001 5	0.020 2
9	0.020 9	0.018 6	0.000 07	5.000 3	0.080 1

表 5 凸度曲线整体误差

Tab. 5 Result of system scale calibration (mm)

序号	E _m	E _n	E _{mm}	F
1	0.019 5	0.082 7	0.311 5	0.311 5
2	0.019 5	0.019 7	0.311 6	0.311 6
3	0.019 5	0.018 6	0.315 4	0.315 4
4	0.020 7	0.082 7	0.074 4	0.082 7
5	0.020 7	0.019 7	0.082 7	0.082 7
6	0.020 7	0.018 6	0.080 6	0.080 8
7	0.020 9	0.082 7	0.082 7	0.082 7
8	0.020 9	0.019 7	0.020 2	0.020 9
9	0.020 9	0.018 6	0.080 1	0.080 1

从表 5 中可以看出,通过最小二乘原理对构造的 9 条凸度曲线进行最小二乘拟合及误差评定后,第 8 条凸度曲线的整体最小二乘误差 0.020 9 mm 为最小;同时可得出与之对应的最小二乘凸度轮廓方程。仿真数据的处理结果与本文设定的标准曲线进行对比如表 6 所示。

表 6 数据处理结果

Tab. 6 Data processing results

(mm)

NO	凸度轮廓曲线主要参数								总误差
	左圆弧半径及圆心			直线参数		右圆弧半径及圆心			
	a	b	R	k	e	a	b	R	
设定曲线	5	0	5	0	5	30	0	5	0
本文方法	5.007 0	-0.011 7	5.012 4	-0.000 2	5.001 5	30.005 8	-2.78×10 ⁻⁶	4.996 2	0.020 9

从表 6 中可以看出,用本文提出的方法所求得的最小二乘凸度曲线的参数及误差与设定的凸度曲线的参数及误差几乎一致,凸度轮廓曲线的总误差 0.020 9 mm 与本文假设标准凸度曲线引入法向误差 0.02 mm 相差 4.5%,所产生的误差主要是由于采用最小二乘法做引入的理论误差以及仿真数据所造成的精度误差。由此可知,本文方法可以正确地评定滚子凸度曲线形状误差。

5 结 论

本文提出了一种圆弧修正型轴承滚子凸度素线轮廓的最小二乘整体拟合及其误差评定方法。

参考文献:

- [1] Raja Kountanya, Vijay Jagdale. Frictionless elastic contact of crowned roller: Approximate analytical calculation of compliance and contact area [J]. *Journal of Engineering Tribology*, 2015, 229(10): 1206-1213.
- [2] JUAN X U, NIU Q, HUAMING Q I, *et al.*. A research on the contact stress of roller bearing based on crowning analysis[J]. *Computer Aided Drafting Design & Manufacturing*, 2012, 22(2): 55-58.
- [3] WEI Z, XU W, TAO B. Crown Shaping Technique of Bearing Raceway by Electrochemical Mechanical Machining[J]. *International Journal of Electrochemical Science*, 2013, 8(2): 2238-2253.
- [4] Bogdan Warda, Agnieszka Chudzik. Effect of ring misalignment on the fatigue life of the radial cylindrical roller bearing[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 111-112(6): 1-11.
- [5] 夏新涛,董淑静,孙立明. 滚子凸度偏移对圆锥滚子轴接触应力的影响[J]. *轴承*, 2015(9): 4-6.
- XIA X T, DONG S J, SUN L M. Effects of Convexity Offset of Rollers on Contact Stress of Tapered Roller Bearings[J]. *Bearing*, 2015(9): 4-6. (in Chinese)
- [6] LIU Z T, YANG J X, ZHAO B. Study on Roundness Error Evaluation with Least-Squares Method Based on Nonlinear Optimization [J]. *Advanced Materials Research*, 2013, 765-767: 755-758.
- 实例验证了该方法的有效性,可以实现圆弧修正型轴承滚子凸度素线轮廓度误差的最小二乘评定。
- 结合工程实际应用,选取圆弧修正型轴承凸度轮廓作为研究对象,根据轮廓形状确定出了圆弧修正型轴承凸度轮廓的基本数学模型;通过三点圆弧法研究了离散数据的曲率计算,并利用曲率差分的方法进行离散数据特征点的提取;基于分界点对离散数据进行分段。采用分段曲线的最小二乘拟合法,提高了曲线拟合的品质和效率;论文所研究的方法为平面多段曲线的最小二乘拟合提供了一种新的思路,并实现多段曲线的最小二乘精确评定,无需进行坐标转换且精度较高。
- [7] 张跃强,苏昂,刘海波,等. 基于多直线对应和加权最小二乘的位姿估计[J]. *光学 精密工程*, 2015, 23(06): 1722-1731.
- ZHANG Y Q, SU A, LIU H B, *et al.*. Pose estimation based on multiple line hypothesis and iteratively reweighted least squares[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(06): 1722-1731. (in Chinese)
- [8] GU T, LIN S, FANG B, *et al.*. An improved total least square calibration method for straightness error of coordinate measuring machine[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B Journal of Engineering Manufacture*, 2016, 230(9).
- [9] 黄富贵,崔长彩. 评定直线度误差的最小二乘法与最小包容区域法精度之比较[J]. *光学精密工程*, 2007(06): 889-893.
- HUANG F G, CUI C P, SUN L M. Comparison of evaluating precision of straightness error between least square method and least envelope zone method [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007(06): 889-893. (in Chinese)
- [10] 穆治亚,艾华,樊孝贺, *et al.*. 采用整体最小二乘法的条纹图配准法[J]. *中国光学*, 2016, 9(06): 625-632.
- MU ZH Y, AI H, FAN XH, *et al.*. Inference fringe image registration using total least square method [J]. *Chinese Optics*, 2016, 9(6): 625-632. (in Chinese)
- [11] BENKO G, KO'S G, VARADY T, *et al.*. Con-

- strained Fitting in Revers Engineering[J]. *Computer aided Geomeerric Design*, 2002,19(3):173-205.
- [12] 刘云峰,柯映林. 反求工程中切片数据处理及断面特征曲线全局优化技术[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(3):124-129.
- LIU Y F, KE Y L. Slicing Data Processing And Global Optimization of Feature Curve in Reverse Engineering [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(3):124-129. (in Chinese)
- [13] 田留德,赵建科,周艳,等. 小范围回转轴系测角误差测试方法[J]. *光子学报*, 2017,46(11):131-137.
- TIAN L D, ZHAO J K, ZHOU Y, *et al.*. Test Method of Angle Error of Limited Rotation Axis System. [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2017, 46(11):131-137. (in Chinese)
- [14] 强怀博,吴琼,王建华. 圆弧轮廓圆度的评定与误差分析[J]. *工具技术*, 2012, 46(3):74-76.
- QIANG H B, WU Q, WANG J H. Evaluation Method on Roundness of Arc Contours and Analysis of Error[J]. *Tool Engineering*, 2012, 46(3):74-76. (in Chinese)
- [15] 朱嘉,李醒飞,谭文斌,等. 基于圆心约束最小二乘圆拟合的短圆弧测量[J]. *光学精密工程*, 2009, 17(10):2486-2492.
- ZHU J, LI X F, TAN W B, *et al.*. Measurement of short arc based on centre constraint least-square circle fitting[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(10):2486-2492. (in Chinese)

作者简介:



雷贤卿(1963—),男,河南洛阳人,教授,博士生导师,2007年于西安理工大学获工学博士学位,主要研究方向为机械制造过程中的精密测试技术及先进制造技术。E-mail: ly-lxq@163.com



张亚东(1990—),男,河南新乡人,硕士研究生,2015年于洛阳理工学院获得工学学士学位,主要研究方向为轴承滚子凸度轮廓误差评定算法。E-mail: 1340385814@qq.com