

文章编号 1004-924X(2018)12-2982-09

## 基于调整步长牛顿法的 Stewart 并联机构位置正解

强红宾<sup>1</sup>, 王力航<sup>1</sup>, 姜 雪<sup>1</sup>, 张立杰<sup>1,2\*</sup>

- (1. 燕山大学 河北省重型机械流体动力传输与控制重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学 先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:**针对采用牛顿或拟牛顿迭代算法求解 Stewart 并联机构接近奇异位姿的位置正解时存在计算结果不收敛以及采用牛顿下山迭代算法求解时间较长的问题,提出了将调整步长牛顿法应用于并联机构位置正解。首先设计基于调整步长牛顿法的 Stewart 并联机构位置正解流程;然后,采用遗传算法以步长矩阵初值及等比参数为变量,以 Stewart 并联机构 64 种极限位姿正解所需迭代步数为目标,得到步长矩阵初值及等比参数最优值。通过数值算例,设置机构杆长绝对误差为 0.01 mm,对 64 种极限位姿进行正解,牛顿法与拟牛顿法共 6 种位姿正解不收敛;牛顿下山法 10 种位姿正解时间大于 2.0 ms;调整步长牛顿法正解时间均小于 2.0 ms。调整步长牛顿法为 Stewart 并联机构位置正解的实时应用提供了理论指导。

**关键词:**位置正解;Stewart 并联机构;调整步长牛顿法;步长矩阵

**中图分类号:**TP242 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20182612.2982

## Forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method

QIANG Hong-bin<sup>1</sup>, WANG Li-hang<sup>1</sup>, JIANG Xue<sup>1</sup>, ZHANG Li-jie<sup>1,2\*</sup>

- (1. Hebei Provincial Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;
  2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)
- \* Corresponding author, E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn

**Abstract:** Forward kinematics of the near singular position of the Stewart parallel manipulator based on the Newton method or quasi-Newton method are not converge; Newton downhill method is time-consuming, sometimes. To resolve the situation, a method of applying the step-adjusting Newton method to a parallel manipulator is proposed. Firstly, the process of forward kinematics of the Stewart parallel manipulator based on the step-adjusting Newton method was designed. Then, the fewest iterative steps in the forward kinematics of sixty-four kinds of utmost poses was used as the objective function. The initial values of the step matrix and geometric parameters were taken as design variables by genetic algorithm to obtain the optimal values. Numerical examples show that when the absolute

收稿日期:2018-04-23;修订日期:2018-06-14.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51875499)

error of the rod length was set as 0.01 mm, in solving the forward kinematics of sixty-four kinds of utmost poses, the Newton method or quasi-Newton method did not converge on six kinds of utmost poses. The Newton downhill method takes longer than 2.0 ms on ten kinds of utmost poses, while the time taken by the step-adjusting Newton method was less than 2.0 ms. The step-adjusting Newton method provides theoretical guidance for the forward kinematics of the Stewart parallel manipulator in real-time occasions.

**Key words:** forward kinematics; Stewart parallel manipulator; step-adjusting newton method; step-matrix

## 1 引言

并联机构位置正解与反解是机构运动学分析的主要任务,也是机构速度、加速度、工作空间、动力学分析等的基础<sup>[1]</sup>。并联机构的位置反解十容易,而位置正解由于包含非线性方程组却相当复杂。因此,很多国内外学者采用不同的方法研究并联机构位置正解。

目前,并联机构位置正解的代表性方法主要有:解析法<sup>[2-4]</sup>、智能算法<sup>[5-7]</sup>、冗余传感器法<sup>[8-10]</sup>、数值法<sup>[11-14]</sup>等。解析法主要是通过不同的方法从约束方程中消去未知的参数,从而得到单一参数的方程再求解。解析法的优点是能够得到位置正解的封闭解,适合理论研究,缺点是难度大,计算时间长,不适合实时运算。胡鹏浩等<sup>[2]</sup>对 3-PSS 并联机构的坐标测量机采用解析法进行位置正解,得到了位置正解显示表达式。赵磊等<sup>[4]</sup>对 3-RRR 结构的光学元件柔顺微动调整机构采用矢量代数法进行位姿正解,并得到了实验验证。智能算法将解非线性方程组转化为优化问题来求解,主要有粒子群算法<sup>[5]</sup>、蚁群算法<sup>[6]</sup>和蜂群算法<sup>[7]</sup>等,该种算法计算时间较长。毛冰滢等<sup>[7]</sup>采用引导人工蜂群算法对 3-RPS 机构进行位置正解,相比于改进蚁群算法和基本人工蜂群算法其算法具有高精度及高速性,但求解时间仍为 38.3 ms。冗余传感器法采用一定数量的附件传感器并合理规划其布置方式,从而简化位置正解的求解,此方法要求并联机构增加硬件,并降低了机构的灵活性。Mahmoodi 等<sup>[9]</sup>对 Stewart 平台的三个支腿 U 副上添加 6 个旋转传感器用于运动学正解。刘艳梨等<sup>[10]</sup>通过对 6-UPS 并联机构安装 1 个附加位移传感器获得第七个杆长,再基于四元数法得到解析正解,获得唯一解。数值解法为将非线性方程组通过迭代搜索法等,对正解

方程组进行迭代求解。数值解法的数学模型简单,略去繁琐的数学推导,计算效率高,能够迅速方便地求得实解,但不能保证一定能收敛于当前所处位姿。Nguyen 等<sup>[11]</sup>用改进的雅克比矩阵进行牛顿迭代求解。耿明超等<sup>[14]</sup>采用拟牛顿法,避免每次迭代重新计算雅克比矩阵,提高了计算效率。

本文对采用牛顿或拟牛顿迭代算法进行接近奇异位姿的位置正解存在计算结果不收敛、采用牛顿下山迭代算法求解步数较长的问题进行分析,提出了采用调整步长牛顿法进行位置正解,该算法通过步长矩阵进行迭代计算,本文对步长矩阵初始值及其等比参数进行优化,提高算法的收敛速度及收敛范围。研究结果为 Stewart 并联机构位置正解的实时应用提供了一定的理论指导。

## 2 并联机构运动学分析

### 2.1 Stewart 并联机构介绍

图 1 为 Stewart 并联机构结构简图。该机构的基本构件为静平台、动平台和 6 个支腿,静平台固定,6 个支腿连接静平台与动平台,为驱动器;

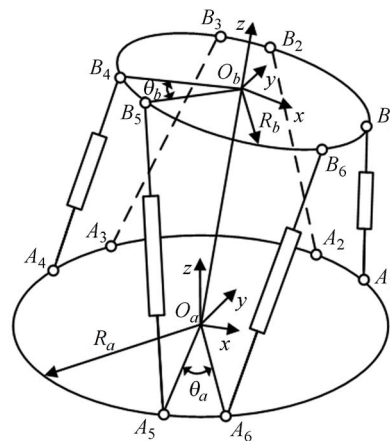


图 1 Stewart 并联机构结构简图

Fig. 1 Structure diagram of Stewart parallel manipulator

动平台为运动末端。支腿与静平台连接的铰点为  $A_i (i=1, \dots, 6)$ , 与动平台连接的铰点为  $B_i (i=1, \dots, 6)$ 。铰点  $A_i$  相连组成对称六边形, 内切于半径为  $R_a$  的圆内, 圆心为  $O_a$ , 六边形短边对应的圆心角为  $\theta_a$ ; 铰点  $B_i$  相连组成对称六边形, 内切于半径为  $R_b$  的圆内, 圆心为  $O_b$ , 六边形短边对应的圆心角为  $\theta_b$ , 如图 2 所示。

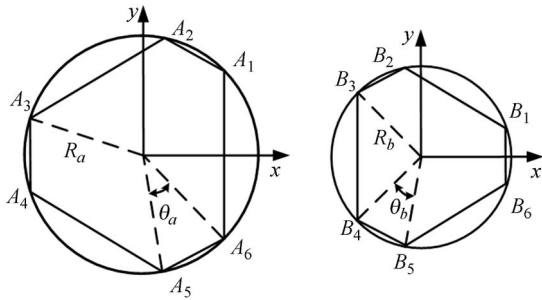


图 2 动、静平台结构示意图  
Fig. 2 Structure diagram of moving and static platforms

在  $O_a$  建立与静平台固结的参考坐标系  $\{O_a\}$ , 在  $O_b$  点建立与动平台固结的动坐标系  $\{O_b\}$ 。铰点  $A_i$  在参考坐标系  $\{O_a\}$  中的坐标为  $\mathbf{a}_i$ , 铰点  $B_i$  在动坐标系  $\{O_b\}$  中的坐标为  $\mathbf{b}_i$ , 其数学表达式为:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a \cos(\alpha_i) \\ R_a \sin(\alpha_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ b_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b \cos(\beta_i) \\ R_b \sin(\beta_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

其中:  $\alpha_i = \frac{i\pi}{3} - \frac{\theta_a}{2}, \beta_i = \frac{(i-1)\pi}{3} - \frac{\theta_b}{2}, (i=1, 3, 5)$

$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \theta_a, \beta_i = \beta_{i-1} + \theta_b, (i=2, 4, 6)$ 。

### 2.2 并联机构位置反解

位置反解为已知动平台的位置和姿态求解 6 个支腿的长度。用位置矢量  ${}^A\mathbf{P}_B$  描述  $\{O_b\}$  的坐标原点  $O_b$  在  $\{O_a\}$  中的位置; 用旋转矩阵  ${}^A\mathbf{R}$  描述  $\{O_b\}$  相对于  $\{O_a\}$  的姿态。则点  $B_i$  在  $\{O_a\}$  中的描述为:

$${}^A\mathbf{b}_i = {}^A\mathbf{R} \mathbf{b}_i + {}^A\mathbf{p}_B, \quad (1)$$

其中:  ${}^B\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$  为已知量,  ${}^A\mathbf{P}_B = [x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}]$ 。  ${}^A\mathbf{R}$  的描述方式采用 RPY 角, 即先让  $\{O_b\}$  绕  $\{O_a\}$  的  $x$  轴转  $\gamma$ , 再绕  $y$  轴转  $\beta$ , 最后绕  $z$  轴转  $\alpha$ , 按照“从右向左”的原则, 得到向量矩阵:

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{R} &= \mathbf{R}(z, \alpha) \mathbf{R}(y, \beta) \mathbf{R}(x, \gamma) = \\ & \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}, \quad (2) \end{aligned}$$

其中:  $s\alpha$  表示  $\sin \alpha$ ,  $c\alpha$  表示  $\cos \alpha$ , 其余以此类推。

则第  $i$  个支腿的长度为:

$$l_i = \| {}^A\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \|_2 \quad (i=1, \dots, 6). \quad (3)$$

令 Stewart 机构广义坐标为  $\mathbf{q} = (l_1, \dots, l_6)^T$ ,

$\mathbf{T} = (\alpha, \beta, \gamma, x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})^T$ , 则反解方程组为:

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}(\mathbf{T}). \quad (4)$$

### 2.3 并联机构位置正解

位置正解为已知 6 个支腿的长度求解动平台的位置和姿态。Stewart 并联机构位置正解的解析解法难度比较大, 数值解法的数学模型较简单。数值解法为将位姿通过方程组(4)反解出支腿长度, 与已知支腿长度比较, 直至误差小于设定值, 否则迭代新位姿继续反解支腿长度并与已知支腿长度比较。则若已知支腿长度  $\mathbf{q}_m$ , 可通过反解方程组(4)构造非线性方程组(5), 或方程组(5)的等价方程组(6), 进行位置正解。

$$\mathbf{F}(\mathbf{T}) = \mathbf{g}(\mathbf{T}) - \mathbf{q}_m = (f_1(\mathbf{T}), \dots, f_6(\mathbf{T}))^T = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{T}) = \mathbf{g}(\mathbf{T}) \circ \mathbf{g}(\mathbf{T}) - \mathbf{q}_m \circ \mathbf{q}_m = (f_1(\mathbf{T}), \dots, f_6(\mathbf{T}))^T = 0, \quad (6)$$

其中, 方程组(6)中“ $\circ$ ”称为“Hadamard product”, 表示同维矩阵对应元素相乘得到的矩阵。此处表示支腿长度的平方。

## 3 牛顿法及其推广算法

### 3.1 牛顿法、拟牛顿法及牛顿下山法

牛顿法是求解非线性方程组基本而又重要的方法, 它具有二阶收敛性, 收敛速度快, 但对初值依赖度高, 收敛范围较小, 其迭代公式为:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k - (\mathbf{F}'(\mathbf{T}_k))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{T}_k). \quad (7)$$

拟牛顿法采用当前的计算值递推出导数及逆, 克服了牛顿法每次迭代需要求导、求逆的缺点, 简化了计算, 其迭代公式为:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{F}(\mathbf{T}_k) \\ \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \Delta \mathbf{B} \end{cases}. \quad (8)$$

求  $\Delta \mathbf{B}$  的算法很多, 如 BFGS 算法、DFP 算

法、Broyden 算法等。

由于牛顿法与拟牛顿法的局部收敛性,其迭代初始值直接影响算法的收敛性。而牛顿下山法将牛顿法与下山法相结合,在下山法保证函数值稳定下降的前提下,用牛顿法加快收敛速度。下山法通过引入下山因子,保证函数的下降性质,从而减小迭代算法对初始值的依赖性,提高算法的收敛性,其迭代公式为:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k - \lambda(\mathbf{F}'(\mathbf{T}_k))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{T}_k), \quad (9)$$

其中  $\lambda(0 < \lambda \leq 1)$  为下山因子或松弛因子。 $\lambda$  初始值为 1,若  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\| > \|\mathbf{F}(\mathbf{T}_k)\|$ ,则令  $\lambda = 0.5\lambda$ ,减小迭代步长,重新迭代,直至满足函数的下降性质:  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{T}_k)\|$ ,从而增大函数的收敛范围。

### 3.2 调整步长牛顿法

构造方程组(5)或(6)的等价方程组(10):

$$\mathbf{F}_\eta(\mathbf{T}) = (f_1(\mathbf{T})^{\eta_1}, \dots, f_6(\mathbf{T})^{\eta_6})^T = 0, \quad (10)$$

其中  $\eta_i > 0 (i=1, \dots, 6)$ 。

由方程组(10)可得:

$$\mathbf{F}_\eta(\mathbf{T}) = \text{diag}(f_1(\mathbf{T})^{\eta_1-1}, \dots, f_6(\mathbf{T})^{\eta_6-1}) \mathbf{F}(\mathbf{T}), \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_\eta'(\mathbf{T}) = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_6) \text{diag}(f_1(\mathbf{T})^{\eta_1-1}, \dots, f_6(\mathbf{T})^{\eta_6-1}) \mathbf{F}'(\mathbf{T}), \quad (12)$$

$$[\mathbf{F}_\eta'(\mathbf{T})]^{-1} = [\mathbf{F}'(\mathbf{T})]^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \text{diag}(1/f_1(\mathbf{T})^{\eta_1-1}, \dots, 1/f_6(\mathbf{T})^{\eta_6-1}). \quad (13)$$

由公式(11),(12),(13)可得方程组(10)的牛顿迭代公式为:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k - (\mathbf{F}_\eta'(\mathbf{T}_k))^{-1} \mathbf{F}_\eta(\mathbf{T}_k) = \mathbf{T}_k - [\mathbf{F}'(\mathbf{T}_k)]^{-1} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \mathbf{F}(\mathbf{T}_k), \quad (14)$$

式中:  $\lambda_i = 1/\eta_i (i=1, \dots, 6)$ , 对角阵  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$  称为步长矩阵,记为  $[\lambda]$ , 为下山因子的推广。当  $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = 1$  时,为牛顿法;当  $0 < \lambda_1 = \dots = \lambda_6 \leq 1$  时,为牛顿下山法。与牛顿下山法相似,当  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\| > \|\mathbf{F}(\mathbf{T}_k)\|$  时,令  $[\lambda] = [\lambda] * W (0 < W < 1)$ ,  $W$  为等比参数,重新迭代,直至满足函数的下降性质,而与牛顿下山法等比参数为定值 0.5。因此,牛顿法与牛顿下山法为调整步长牛顿法的特殊情况,且该算法在不同条件下具有二阶收敛性及大范围收敛性<sup>[15]</sup>。

因此,步长矩阵初值  $[\lambda_0]$  及等比参数  $W$  的选择直接影响算法的收敛范围和收敛速度,需要对它们进行优化选择。本文提出采用遗传算法,以下步长矩阵初值及等比参数为独立变量,以正解

迭代步数最少为优化目标,对下步长矩阵初值及等比参数进行优化。

## 4 调整步长牛顿法在 Stewart 并联机构正解中的应用

### 4.1 求解流程

牛顿法及拟牛顿法求解 Stewart 并联机构正解流程可参考文献[15]。调整步长牛顿法求解 Stewart 并联机构正解流程图如图 3 所示。其具体过程如下:

(1)构造 Stewart 并联机构正解方程  $\mathbf{F}(\mathbf{T})$ 。

(2)给定位姿初始值  $\mathbf{T}_0$ ,一般为机构初始工作位置。给定已优化的步长矩阵初值  $[\lambda_0]$ 、等比参数  $W$ 。给定允许杆长绝对误差  $\epsilon$ 、最大迭代次数  $N$ 。

(3)输入 Stewart 并联机构杆长  $\mathbf{q}_m$ 。

(4)设置迭代次数  $K=0$ 。

(5)根据  $\mathbf{T}_0$  计算  $\mathbf{F}(\mathbf{T}_0)$ ,  $(\mathbf{F}'(\mathbf{T}_0))^{-1}$ ,  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_0)\|$ 。

(6)根据迭代公式(11)计算  $\mathbf{T}_{k+1}$ 。

(7)根据  $\mathbf{T}_{k+1}$  计算  $\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})$ ,  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\|$ , 以及杆长最大误差  $\Delta L = \|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\|^\infty$ 。

(8)判断  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_{k+1})\|$  是否小于  $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}_k)\|$ , 如果是则转至步骤(10),否则转至步骤(9)。

(9)下山因子矩阵  $[\lambda] = [\lambda] * W$ , 转至步骤(6)。

(10)判断  $\Delta L$  是否小于  $\epsilon$ , 如果是则转至步骤(15),否则转至步骤(11)。

(11)计算  $\mathbf{F}'(\mathbf{T}_{k+1})^{-1}$

(12)判断迭代次数  $K+1$  是否大于允许最大迭代次数  $N$ , 如果是则转至步骤(16),否则转至步骤(13)。

(13)步长矩阵  $[\lambda] = [\lambda_0]$ 。

(14)迭代次数  $K = K+1$ , 转至步骤(6)。

(15)迭代停止,输出位姿  $\mathbf{T}_{k+1}$ 。

(16)迭代停止,输出迭代失败。

其中,当正解函数为方程(6)时,  $(\mathbf{F}'(\mathbf{T}_0))^{-1}$  可由方程  $\mathbf{F}(\mathbf{T})$  直接求导再求逆得到<sup>[11]</sup>;当正解函数为方程组(5)时,由并联机构雅克比矩阵的意义可知:

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{T}_k))^{-1} = (\mathbf{g}'(\mathbf{T}))^{-1} = \mathbf{J},$$

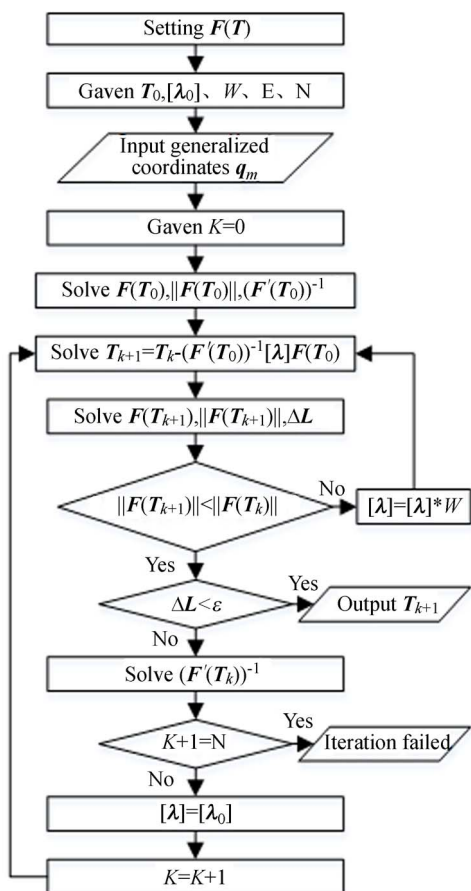


图 3 调整步长牛顿法求解 Stewart 并联机构正解流程图

Fig. 3 Flowchart of forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method

其中  $J$  为 Stewart 并联机构改进的雅克比矩阵<sup>[11]</sup>。

### 4.2 参数优化

Stewart 并联机构的 6 个支腿最短或者最长可组合 64 种极限位姿, 此极限位姿的特性可表示机构在整个运动空间中的特性<sup>[16]</sup>。

构造优化函数  $F([\lambda_0], W)$ , 以步长矩阵初值  $[\lambda_0]$  及等比参数  $W$  为独立变量, 以 64 种极限位姿正解所需迭代步数总和为函数值。采用遗传算法对此函数进行优化, 得到步长矩阵初值及等比参数的最优值。对于确定构型及尺寸的并联机构对应一组最优步长矩阵初值及等比参数, 用于位置正解计算。

图 4 为优化函数  $F([\lambda_0], W)$  的流程图, 其中,  $Q_m$  为第  $m$  种位姿正解所需的迭代步数,  $Q$  为

64 种位姿正解所需迭代步数的总和。

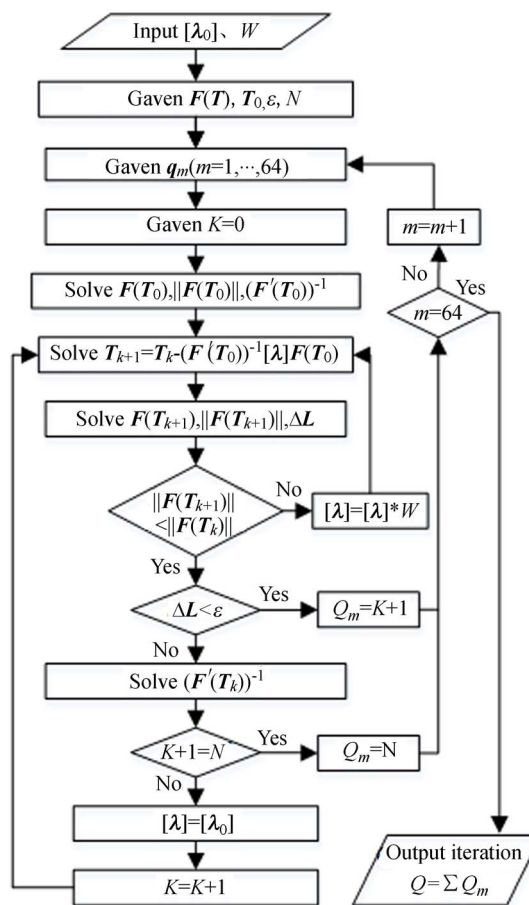


图 4 步长矩阵、等比参数初值的优化流程

Fig. 4 Optimization flowchart of the initial values of step-matrix and geometric parameter

## 5 数值算例及分析

搭建无奇异 Stewart 并联机构, 其结构参数为,  $R_a = 820 \text{ mm}$ ,  $R_b = 1\ 100 \text{ mm}$ ,  $\theta_a = 14.0^\circ$ ,  $\theta_b = 15.7^\circ$ , 支腿最短长度  $l_{\min} = 1\ 425 \text{ mm}$ , 支腿最大长度  $l_{\max} = 2\ 090 \text{ mm}$ , 该机构在可达工作空间内不存在奇异位姿<sup>[16]</sup>。

在 Windows7 操作系统, Intel(R)Core(TM) i7-4770CPU@3.4 GHz 处理器, 8.00 GB 安装内存的电脑上, 采用 Matlab(R2014a) 对牛顿法、拟牛顿法、牛顿下山法、调整步长牛顿法 4 种正解算法编程, 其中正解函数  $F(T)$  采用方程(3), 允许杆长绝对误差  $\epsilon = 0.01 \text{ mm}$ , 允许最大迭代次数  $N = 1\ 000$ 。以 6 个支腿均位于中位时为初始位姿, 则  $T_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 1\ 574.38]$ 。

应用 matlab 遗传工具箱,对函数  $F([\lambda_0], W)$  进行优化,输入及输出信息如表 1 所示,其中将下山因子矩阵设置为 6 个独立变量,因此变量个数为 7。由表 1 可得,最优下山因子矩阵初值  $[\lambda_0] = [0.842, 0.832, 0.798, 0.792, 0.778, 0.923]$ ,最优等比参数  $W=0.73$ 。图 5 给出了最佳适应度值的优化过程。

表 1 遗传工具箱输入及输出信息

Tab. 1 Input and output information of GUI

Parameter	Specification
Fitness function	$F([\lambda_0], W)$
Number of variables	7
Population size	200
Initial range	[0.7;0.8]
Final iteration	160
Stop criteria	Fitness limit
Best fitness	1 052
Final point	[0.842,0.832,0.798,0.792,0.778,0.923] 0.733

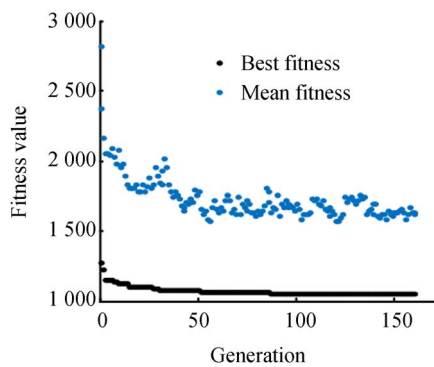


图 5 最佳适应度值优化过程

Fig. 5 Optimization process of fitness value

首先,采用 4 种正解算法对此 Stewart 并联机构工作空间内随机生成的 5 个位姿(如表 2 所示)进行位置正解。4 种正解算法所需的迭代步数及时间如表 3 所示,由表 3 可得,4 种正解算法对工作空间内不接近奇异位置的位姿正解所需迭代时间与步数相当。除牛顿下山法对第一个位姿正解所需时间超过 2.0 ms 外,其余正解时间均小于 2.0 ms,因此调整步长牛顿法满足工作空间内不接近奇异位姿的正解要求。

表 2 5 个随机位姿

Tab. 2 Five kinds of random poses

No.	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$
1	1 570.1	2 005.7	1 480.0	1 734.5	1 439.6	1 962.5
2	2 053.6	1 570.7	2 011.8	1 438.2	1 652.3	1 934.4
3	1 430.3	2 036.2	1 698.1	1 912.0	1 525.5	1 967.1
4	2 020.7	1 607.3	2 088.6	1 979.8	1 951.2	1 861.6
5	1 943.2	1 437.2	1 937.6	1 881.1	2 002.0	1 811.0

表 3 4 种正解算法迭代步数及时间

Tab. 3 Iterative number and time of four kinds of method

Project		1	2	3	4	5
Newton method	Iterations	19	14	20	11	13
	Time/ms	1.1	0.6	0.9	0.5	0.6
Quasi-Newton method	Iterations	13	16	12	12	12
	Time/ms	1.7	1.0	0.7	0.9	0.7
Newton downhill method	Iterations	19	14	20	11	13
	Time/ms	3.2	0.9	1.0	0.5	0.6
Step-adjusting Newton method	Iterations	16	13	18	10	12
	Time/ms	1.3	1.0	0.9	0.7	0.8

其次,使用 4 种正解算法对此 Stewart 并联机构 64 种极限位姿进行位置正解。牛顿下山法、调整步长法均可迭代出 64 种位姿正解,迭代次数及时间如表 4 所示。由表 4 可知,相比于牛顿下山法,调整步长牛顿法迭代次数少、迭代时间短,满足工程应用实时控制小于 2 ms 的要求。牛顿法、拟牛顿法分别有 2 种、4 种位姿正解不收敛,此 6 种位姿均为某个支腿近似平行于上平台,即

表 4 牛顿下山法、调整步长牛顿法的迭代步数及时间

Tab. 4 Iterative number and time of Newton downhill method and step-adjusting Newton method

Project	Newton downhill method	Step-adjusting Newton method
	Iterative steps of the kinds of utmost poses	1 476
Time of 64 kinds of utmost poses	108.393 ms	55.322 ms
Maximum number of iterative steps of one pose	124	28
Maximum duration of one pose	20.268 ms	1.862 ms

接近 Hunt 奇异。由于 Stewart 并联机构的对称性,只列举其一半位姿,这 3 种不收敛位姿的具体参数如表 5 所示。为便于表示支腿长度,0 代表支腿最短,1 代表支腿最长。 $T_a$  位姿牛顿法不收敛, $T_b$ 、 $T_c$  位姿拟牛顿法不收敛。

表 5 3 种不收敛位姿

Tab. 5 Three kinds of pose of non-convergence

$l$	$T/((^\circ), mm)$
$T_a[0,1,1,0,0,1]$	[21.74, 6.45, 35.45, 75.18, 534.19, 1 452.53]
$T_b[1,0,1,0,0,1]$	[-23.71, -33.73, 13.26, 425.04, 332.19, 1 452.53]
$T_c[1,0,0,1,1,1]$	[5.52, -17.90, -34.02, 116.77, -202.24, 1 670.29]

4 种正解算法对 3 种不收敛位姿正解所需的迭代次数及时间如表 6 所示,其中迭代次数 1 000 表示不收敛。 $T_a$ 、 $T_b$  位姿各算法的迭代过程如图 6、图 7 所示。由表 6 及图 6 可知, $T_a$  位姿时,牛顿法不收敛,处于无限循环震荡状态;牛顿下山法迭代次数及迭代时间较长,不满足实时正解要求;拟牛顿法与调整步长牛顿法迭代相当,由于调整步长牛顿法需要计算 10 次下山因子矩阵 $[\lambda]$ 以满足函数下降性质,因此迭代时间比拟牛顿法稍长,但满足实时正解要求,且调整步长牛顿法的迭代过程比拟牛顿法平缓。由表 6 及图 7 可知, $T_b$  位姿时,拟牛顿法不收敛;牛顿下山法的迭代次数及迭代时间较长,不满足实时正解要求;牛顿法与调整步长牛顿法迭代次数及时间均相当,且调整步长牛顿法迭代过程比牛顿法平缓。

为进一步描述调整步长牛顿法,表 7 给出了  $T_b$  位姿的迭代过程。由表 7 可得,第二次迭代后  $\|F(T_{2,0})\| > \|F(T_1)\|$ ,不满足下降性质;则令  $[\lambda] = [\lambda] * W = [\lambda_0] * W$ ,重新计算  $\|F(T_{2,1})\|$ ,仍大于  $\|F(T_1)\|$ ;则令  $[\lambda] = [\lambda] * W = [\lambda_0] * W * W$ ,再计算  $\|F(T_{2,2})\|$ ,满足  $\|F(T_{2,2})\| < \|F(T_1)\|$ ,迭代成功;令  $[\lambda] = [\lambda_0]$ ,继续迭代。直至第 14 次迭代,最大杆长误差  $\max(\Delta L) = 0.005 mm < 0.01 mm$ ,迭代结束,输出位姿  $T_b$ 。

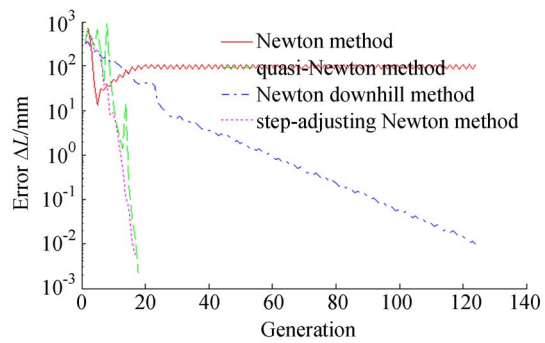


图 6 各算法  $T_a$  位姿迭代过程

Fig. 6 Iterative process of  $T_a$  pose of different algorithms

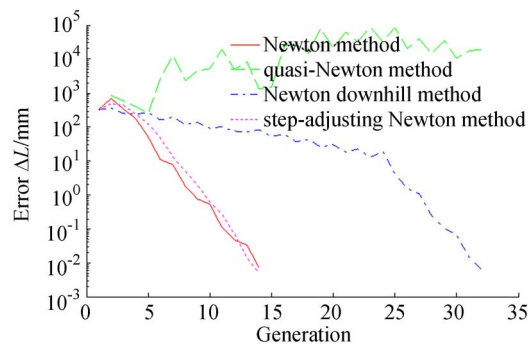


图 7 各算法  $T_b$  位姿迭代过程

Fig. 7 Iterative process of  $T_b$  pose of different algorithms

表 6 各算法迭代次数及时间

Tab. 6 Iterative number and time of different algorithms

Pose	Newton method		Quasi-Newton method		Newton downhill method			Step-adjusting Newton method		
	Iterations	Time/ms	Iterations	Time/ms	Iterations	$\lambda$	Time/ms	Iterations	$[\lambda]$	Time/ms
$T_a$	1 000	44.308	18	0.544	124	415	16.646	17	10	1.131
$T_b$	14	0.616	1 000	40.659	32	34	2.410	14	2	0.721
$T_c$	13	0.567	1 000	27.423	11	2	0.568	12	0	0.548

表 7  $T_b$  位姿调整步长牛顿法迭代过程Tab. 7 Iteration process of step-adjusting newton method of  $T_b$ 

Iterations	Pose						$\ F(T_i)\ $ /mm <sup>2</sup>	$[\lambda]$	Max( $\Delta L$ ) /mm
	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	$\gamma/(^\circ)$	$x_{oi}/\text{mm}$	$y_{oi}/\text{mm}$	$z_{oi}/\text{mm}$			
1	0	0	0	0	0	1 574.38	2 875 590.40	$[\lambda_0]$	332.500
2.0	13.53	-19.85	9.98	970.69	540.01	1 613.40	3 620 099.45	$[\lambda_0]$	589.102
2.1	-4.66	-4.67	-1.04	-152.73	-177.43	1 320.89	3 598 172.93	$[\lambda_0] * W$	677.874
2.2	-4.74	-9.20	5.97	545.95	393.41	1 690.42	2 301 617.13	$[\lambda_0] * W^2$	447.331
3	-15.74	-23.54	6.25	961.36	296.15	1 404.71	1 892 025.83	$[\lambda_0]$	434.910
4	-19.21	-29.55	6.41	728.60	283.57	1 428.20	954 635.75	$[\lambda_0]$	242.208
5	-20.54	-32.71	9.52	584.28	353.08	1 435.19	515 096.35	$[\lambda_0]$	124.453
6	-22.04	-33.60	11.68	483.56	361.17	1 444.80	220 940.69	$[\lambda_0]$	47.363
7	-23.03	-33.80	12.71	441.96	351.10	1 448.25	85 674.94	$[\lambda_0]$	13.531
8	-23.49	-33.79	13.13	427.71	341.74	1 450.60	31 448.03	$[\lambda_0]$	4.845
9	-23.67	-33.75	13.25	424.28	335.95	1 451.90	10 950.78	$[\lambda_0]$	1.940
10	-23.71	-33.73	13.27	424.22	333.27	1 452.41	3 623.77	$[\lambda_0]$	0.639
11	-23.72	-33.73	13.27	424.67	332.37	1 452.54	1 112.03	$[\lambda_0]$	0.274
12	-23.71	-33.73	13.26	424.94	332.18	1 452.55	311.31	$[\lambda_0]$	0.070
13	-23.71	-33.73	13.26	425.03	332.17	1 452.54	87.97	$[\lambda_0]$	0.014
14	-23.71	-33.73	13.26	425.04	332.19	1 452.53	30.21	$[\lambda_0]$	0.005

## 6 结 论

本文提出了将调整步长牛顿法应用于并联机构位置正解,设计了基于调整步长牛顿法的 Stewart 并联机构位置正解流程,并采用遗传算

法优化得到步长矩阵初值及等比参数最优值。通过数值算例,设置机构杆长的绝对误差为 0.01 mm,基于调整步长牛顿法对 64 种极限位姿进行正解的时间均小于 2.0 ms,为 Stewart 并联机构位置正解的实时应用提供了理论指导。

### 参考文献:

- [1] 黄真,赵永生,赵铁石.高等空间机构学[M].北京:高等教育出版社,2006.  
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: High Education Press, 2006. (in Chinese)
- [2] HUANG X, LIAO Q, WEI S. Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6-6 Stewart platform using algebraic elimination [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(2): 327-334.
- [3] 胡鹏浩,李松原. 3-PSS 并联机构正解及其在坐标测量机中的应用[J]. 光学精密工程, 2012, 20(4): 782-788.  
HU P H, LI S Y. Kinematic solution of 3-PSS parallel mechanism and its application in parallel CMM [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(4): 782-788. (in Chinese)
- [4] 赵磊,梁超,张德福,等. 基于 3-RRR 结构的光学

元件柔顺微动调整机构的位姿正解[J]. 光学精密工程, 2016, 24(6): 1373-1381.

ZHAO L, LIANG CH, ZHANG D F, *et al.*. forward kinematics of 3-RRR flexure parallel mechanism used in lens micro-adjustment [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(6): 1373-1381. (in Chinese)

- [5] 刘得军,刘彩平,韦荣方. 基于粒子群算法的 6-DOF 并联坐标测量机的测量建模[J]. 光学精密工程, 2008, 16(1): 76-81.

LIU D J, LIU C P, WEI R F. Measurement modeling for 6-DOF parallel-link coordinate measuring machine based on particle swarm optimization [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(1): 76-81. (in Chinese)

- [6] 吴小勇,谢志江,宋代平,等. 基于改进蚁群算法的 3-PPR 并联机构位置正解研究[J]. 农业机械学报, 2015, 46(7): 339-344.

WU X Y, XIE ZH J, SONG D P, *et al.*. Forward kinematics of 3-PPR parallel mechanism based on improved ant colony algorithm [J]. *Transaction of*



- the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2015,46(7): 339-344. (in Chinese)
- [7] 毛冰滢, 谢志江, 吴小勇, 等. 基于引导人工蜂群算法的 3-RPS 并联机构正解优化[J]. 农业机械学报, 2017,48(1): 339-345.  
MAO B Y, XIE ZH J, WU X Y, *et al.*. Forward kinematics optimization of 3-RPS parallel manipulator based on global-best artificial bee colony algorithm[J]. *Transaction of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2017,48(1):339-345. (in Chinese)
- [8] 董彦良, 吴盛林. 一种实用的 6-6 Stewart 平台的实时位置正解法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2002,34(1): 116-119.  
DONG Y L, WU SH L. A hybrid method to solve forward kinematics of general 6-6 stewart platform [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2002,34(1): 116-119. (in Chinese)
- [9] MAHMOODI A, SAYADI A, MENHAJ M B. Solution of forward kinematics in Stewart platform using six rotary sensors on joints of three legs[J]. *Advanced Robotics*, 2013, 28(1): 27-37.
- [10] 刘艳梨, 程世利, 蒋素荣, 等. 带位移传感器的 6-UPS 并联机构运动学正解[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 1-7.  
LIU Y L, CHENG SH L, JIANG S R, *et al.*. Forward kinematics of 6-UPS parallel manipulators with one displacement sensor[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(5): 1-7. (in Chinese)
- [11] NGUYEN C C, ZHOU Z L, ANTRAZI S S, *et al.*. Efficient computation of forward kinematics and Jacobian matrix of a Stewart platform-based manipulator [J]. *IEEE Proceedings of IEEE*, 2002(2): 869-874.
- [12] 卢启鹏, 李勇军, 彭忠琦, 等. 六杆并联机构运动学正解研究及其在同步辐射光束线中的应用[J]. 光学精密工程, 2008, 16(10):1874-1879.  
LU Q P, LI Y J, PENG ZH Q, *et al.*. Forward kinematics of six-bar parallel mechanism and its applications in synchrotron radiation beam-line[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 674(10):8-14. (in Chinese)
- [13] 贺新升, 高春甫, 王彬, 等. 太阳自动跟踪机构的设计和位姿分析[J]. 光学精密工程, 2012, 20(5):1048-1054.  
SHENG H X, GAO CH, WANG B, *et al.*. Design and positional posture analysis of parallel sun auto-tracking mechanism [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(5):1048-1054. (in Chinese)
- [14] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2015, 51(9):28-36.  
GENG M CH, ZHAO T SH, WANG CH, *et al.*. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-newton method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(9):28-36. (in Chinese)
- [15] 刘停战, 刘伟, 何颖. 调整步长牛顿法[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2012, 19(1):8-10.  
LIU T ZH, LIU W, HE Y. Step-adjusting newton method [J]. *Journal of Communication University of China: Natural Science Version*, 2012, 19(1):8-10. (in Chinese)
- [16] 马建明. 飞行模拟器液压 Stewart 平台奇异位形分析及其解决方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.  
MA J M. *Analysis of Singular Configuration and Research of Its Solving Method of the Hydraulic Stewart Platform of Flight Simulator* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010 (in Chinese)

#### 作者简介:



强红宾(1991—),男,河北石家庄人,博士研究生,2014年于燕山大学获得学士学位,主要从事并联机构优化及协同控制的研究。E-mail: hbqiang927@163.com

#### 导师简介:



张立杰(1969—),男,吉林辽源人,教授,博士生导师,1992年、1996年、2006年于燕山大学分别获得学士、硕士和博士学位,主要从事机构学及机器人、液压可靠性及电液控制系统的研究。E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn