

文章编号 1004-924X(2019)02-0421-12

加权 Schatten 范数低秩表示的高光谱图像恢复

张倩颖¹, 谢晓振^{2*}

(1. 暨南大学 深圳旅游学院, 广东 深圳 518053;

2. 西北农林科技大学 理学院, 陕西 杨凌 712100)

摘要: 高光谱图像在获取过程中常受到多种噪声的干扰, 如高斯噪声、脉冲噪声、条纹噪声等, 为确保后续应用的顺利进行, 提出了一种基于加权 Schatten 范数低秩表示的高光谱图像恢复方法。该方法引入低秩表示模型恢复高光谱数据, 采用加权 Schatten 范数代替核函数, 更精确地逼近秩函数; 并选用初步无噪图像作为低秩表示的字典, 进一步提高了模型对图像的恢复能力。另外, 引入拉普拉斯正则项刻画数据内部的几何结构, 能保持图像的细节。模拟和实际高光谱数据的实验结果表明, 较多种相关的方法在视觉效果和量化指标值都有很大地改进。与经典的基于低秩先验的恢复方法相比, 本文算法的平均峰值信噪比提高 2.74 dB, 平均结构相似性数值指标提高 0.03, 而平均光谱角降低 1.40。新模型不仅能充分利用高光谱图像光谱维的低秩先验, 而且保持了数据内部的几何结构, 有利于恢复出高质量的清晰图像。

关键词: 高光谱图像; 图像恢复; 低秩表示; Schatten 范数; 拉普拉斯

中图分类号: TP751 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20192702.0421

Hyperspectral image restoration via weighted Schatten norm low-rank representation

ZHANG Qian-ying¹, XIE Xiao-zhen^{2*}

(1. Shenzhen Tourism College, Jinan University, Shenzhen 518053, China;

2. College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

* Corresponding author, E-mail: xiexzh@nwfu.edu.cn

Abstract: Hyperspectral Image (HSI) always suffers from various noises such as Gaussian noise, impulse, stripe noise, etc. To ensure the performance of subsequent applications, a new method for HSI restoration was proposed based on weighted Schatten norm Low-Rank Representation (LRR). The proposed method introduced the LRR model into the HSI restoration. It can accurately approximate rank using the weighted Schatten norm instead of the nuclear norm. Furthermore, the initial noiseless image was utilized as the dictionary for LRR to improve the restoration ability. Then, the Laplacian regularizer was used to describe the intrinsic geometric information of the data and to protect details of the HSI. Experimental results on synthetic and real HSI data demonstrated that the proposed method achieves better visual quality and quantitative indices than several existing related methods. Compared with the classical restoration method based on low-rank priori, the mean peak

收稿日期: 2018-07-20; **修订日期:** 2018-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 61401368); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(No. 11617367); 暨南大学高水平大学建设(深圳校区)重点培育研究项目资助

signal-to-noise ratio and structural similarity indices of this algorithm increased by 2.74 dB and 0.03 respectively, and the mean spectral angle was reduced by 1.40. The new method not only takes advantage of the low-rank prior information in the spatial domain, but also keeps the intrinsic geometric structures in data, which helps restore quality clean images.

Key words: hyperspectral image; image restoration; low-rank representation; Schatten norm; Laplacian

1 引言

高光谱遥感技术是当前遥感领域的前沿技术,利用图像和光谱合一的特性,能同时获取丰富的空间特征和光谱信息。高光谱图像(Hyperspectral Image, HSI)的光谱特性可以提高很多计算机视觉任务的性能,如目标识别和分类^[1-2]、跟踪^[3]、以及分割^[4]等问题,在很多领域得到了广泛地应用。然而高光谱图像往往会受到不同类型噪声的污染^[5-6],这严重影响了图像质量及后续的应用前景。因此,研究高效且稳定的高光谱图像恢复方法是很有必要的。

近年来国内外学者提出了多种有效的 HSI 恢复方法。传统的 HSI 恢复方法将每个波段看作独立的二维图像,采用经典的二维图像去噪方法逐波段恢复 HSI 数据,例如基于全变差(Total-Variation, TV)的方法^[7]、完备字典下稀疏表示的方法^[8]、三维块匹配(Block-Matching 3-D, BM3D)算法^[9]等。然而,这种方法只利用了每个波段自身的空间信息,忽略了 HSI 数据不同波段间的相关性,其恢复能力具有很大地限制。将 HSI 看作三维图像,研究者们提出了基于多维数据的 HSI 恢复方法,如在三维块匹配算法上拓展的 BM4D 算法^[10]、引入 TV 约束的低秩张量分解方法^[11]等。这种多维数据的分析方法对 HSI 的空间和光谱域进行整体数据处理,能取得较好的恢复结果。

HSI 含有大量的冗余信息,临近的波段间具有全局相关性,同时临近像素间又存在空间相关性,HSI 数据具有其特有的低秩结构,基于低秩矩阵的方法在 HSI 恢复中有很强的应用。传统的基于低秩先验的主成分分析方法(Principle Component Analysis, PCA)^[12],通过正交变换将 HSI 数据映射为线性无关的主成分集,但该方法对异常值敏感。而 HSI 中包含大量的异常值,如脉冲噪声、死线噪声及条纹噪声等。鲁棒 PCA

(Robust PCA, RPCA)^[13]将异常值看作一个稀疏矩阵,把观测数据分解为低秩矩阵和稀疏矩阵两部分,RPCA 模型能有效地处理异常值问题,已经被成功地应用在 HSI 的恢复^[6, 14]。

低秩表示(Low-Rank Representation, LRR)模型是一种新的处理子空间恢复技术,目的是寻找数据在给定字典下的低秩表示系数^[15]。RPCA 模型中假定潜在的数据来源于单一的低秩子空间,而 LRR 模型通过系数矩阵的低秩约束来恢复数据,能有效地提取多个低维子空间,更符合 HSI 的线性混合模型^[16]。LRR 已被成功地应用于 HSI 的恢复^[16]、分类^[17]、异常检测^[18]等问题。LRR 模型中用核范数代替秩函数来约束系数矩阵,核范数为矩阵所有奇异值之和,核范数最小时对不同的秩成分做同等处理,易造成对秩成分的过度缩小,影响 LRR 的恢复结果。为解决这一问题,研究者们提出了加权的核范数^[19]、加权 Schatten 范数^[14]代替核范数逼近秩函数。另一方面,LRR 模型只考虑了数据的全局低秩先验,忽略了其局部的几何结构。基于此,Yin 等^[20]提出了拉普拉斯正则化的 LRR 模型,利用超图中的成对结点关系,能较好地保持数据的内在结构特征。

本文受文献[14]和[20]的启发,提出基于拉普拉斯正则化加权 Schatten 范数低秩表示(Laplacian Regularizer Weighted Schatten Norm LLR, LRWSN-LRR)的 HSI 恢复方法。该方法对 LRR 模型中引入一个新的 WSN 低秩正则项,与文献[20]相比,LRWSN-LRR 在 HSI 含有多种混合噪声时仍能较精确地逼近系数矩阵的秩函数,恢复出清晰的图像。相比常用的基于 RPCA 的 HSI 恢复方法,LRWSN-LRR 模型通过对系数矩阵引入低秩约束和拉普拉斯正则项,能充分地利用光谱间的全局相关性和局部几何结构。仿真和实际 HSI 数据的实验结果都表明,所提出方法的性能表现优于现有的典型的 HSI 恢复方法,验证了该方法的有效性。

2 相关工作

2.1 HSI 降质模型

设真实的 HSI 为 $x \in \mathbf{R}^{M \times N \times B}$, 图像的空间大小为 $M \times N$, B 为波段数。若将每个波段拉成列向量, 则立方体数据 x 可表示成矩阵形式 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_B]$ 。假定实际的观测图像受到混合噪声的影响, 则图像的降质模型为:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

其中: \mathbf{X} 表示真实图像, \mathbf{Y} 是观测的降质图像, \mathbf{S} 表示稀疏噪声, \mathbf{N} 是高斯噪声, \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{S} , \mathbf{N} 的大小均为 $MN \times B$ 。

HSI 恢复的目的是从降质图像 \mathbf{Y} 重构真实图像 \mathbf{X} , 可见该问题是病态的。目前求解该逆问题最具普适性、在理论上最完备且行之有效的方法是最大后验概率 (Maximum A Posteriori, MAP) 方法。基于 MAP 估计理论, HSI 恢复问题可表示为如下带约束的最小二乘问题:

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{MN \times B}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} - \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \tau R(\mathbf{X}), \quad (2)$$

其中: 第一项为数据保真项, 表示真实图像 \mathbf{X} 和观测图像 \mathbf{Y} 的误差; $R(\mathbf{X})$ 被称为正则项, 表示真实高光谱图像 \mathbf{X} 的先验信息, 它直接影响了 HSI 恢复方法的质量; τ 是正则化参数, 平衡保真项和正则项。

2.2 基于 LRR 的 HSI 恢复

HSI 是包含数百个连续的窄波段的地物图像, 具有很高的光谱分辨率, 各波段间存在高相关性。这种相关性体现为 \mathbf{X} 的列空间具有低秩结构, 采用 RPCA 模型^[3], 式(2)可改写为:

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{S}} \|\mathbf{X}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1, \text{ s. t. } \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} - \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon, \quad (3)$$

其中: $\|\cdot\|_*$ 表示矩阵的核范数, 是矩阵的奇异值之和; $\|\cdot\|_1$ 表示矩阵的 l_1 范数, 为矩阵元素的绝对值之和; λ 为正则化参数; ϵ 表示噪声的方差水平。

模型(3)已经被成功应用在 HSI 的恢复。但是 RPCA 假定真实图像 \mathbf{X} 存在于单一的低秩子空间, 当 \mathbf{X} 由多个子空间生成时, 该模型的准确性可能会大幅度降低, 这也是实际中 HSI 数据常见的情况。不同于 RPCA, LRR 模型^[15] 假定真实数据 \mathbf{X} 来源于多个子空间的并集, 即 $\mathbf{X} \subset \bigcup_{i=1}^k P_i$,

其中 P_1, P_2, \dots, P_k 是低维的子空间, 该模型能有效地挖掘数据中的低维子空间结构。LRR 模型是求解观测数据 \mathbf{Y} 在给定字典下的低秩表示, 其优化问题为:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{S}} \|\mathbf{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1, \text{ s. t. } \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon, \quad (4)$$

其中: \mathbf{D} 是生成数据子空间的字典, \mathbf{Z} 是系数矩阵。令 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, 则模型(4)就退化为式(3), 所以基于 LRR 的模型(4)可看作 RPCA 的一般形式。求解问题(4)得到低秩解 \mathbf{Z}^* , 由于 $\operatorname{rank}(\mathbf{DZ}^*) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{Z}^*)$, 可见从观测图像 \mathbf{Y} 中恢复出的清晰图像 $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{DZ}^*$ 同样具有低秩性。

3 基于 LRWSN-LRR 的 HSI 恢复方法

3.1 LRWSN-LRR

LRR 模型(4)中用系数矩阵的核范数逼近秩函数, 本文引入加权 Schatten 范数 (Weighted Schatten Norm, WSN) 作为低秩正则项, 定义为:

$$\|\mathbf{Z}\|_{\mathbf{w}, s_p} = \left(\sum_i \mathbf{w}_i \sigma_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (5)$$

其中: $0 < p \leq 1$; σ_i 表示 \mathbf{Z} 的第 i 个奇异值; \mathbf{w} 是非负的向量, 表示对不同的秩成分做加权处理。进一步地, 矩阵 \mathbf{Z} 的 WSN 的 p 次方可表示为:

$$\|\mathbf{Z}\|_{\mathbf{w}, s_p}^p = \sum_i \mathbf{w}_i \sigma_i^p,$$

令 $\mathbf{w} = [1, 1, \dots, 1]$, 当 $p=1$ 时, $\|\mathbf{Z}\|_{s_p}$ 变为常用的核范数, 而随着 p 值的减小, $\|\mathbf{Z}\|_{s_p}^p$ 将越来越接近于真实的秩函数, 即:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_i \sigma_i^p = \operatorname{rank}(\mathbf{Z}),$$

其中定义 $0^0 = 0$ 。

相比核范数, 采用 WSN 逼近秩函数有以下优点: 核范数最小化采用奇异值阈值 (Singular Value Thresholding, SVT) 算法^[21] 求解, 对每个奇异值收缩同等的量, 违背了低秩先验中较大奇异值应收缩更小以保留数据的主成分, 较小奇异值大幅度收缩来增加矩阵的低秩性。但对于 WSN, 通过选取升序的权数向量 \mathbf{w} , 使得大的奇异值进行小的收缩, 而小的奇异值尽可能较大的收缩, 从而保留主要的数据成分。核范数是所有奇异值之和, 当奇异值特别大时对秩函数的逼近易产生偏差, 而实际的 HSI 数据会受到高强度噪声的污染, 进而影响 LRR 的恢复效果。对于这一

问题,通过调节 WSN 中的 p 值,能较精确地逼近秩函数,提高 LRR 的效率。因此,本文提出基于 WSN 低秩表示的 HSI 恢复模型,表示为:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{S}} C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \lambda \|\mathbf{S}\|_1, \text{ s. t. } \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}\|_F^2 \leq \epsilon, \quad (6)$$

其中 C 为低秩正则项的参数。

基于图的正则化方法已被广泛地用于探索数据的内部几何结构^[20]。令观测图像 $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_B]$, 矩阵 $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_B]$, 则 \mathbf{Z}_i 可看作 \mathbf{Y}_i 在字典 \mathbf{D} 下的线性表示系数。根据基于图的流形学习方法,如果两个数据点 \mathbf{Y}_i 和 \mathbf{Y}_j 在原空间是邻近点,为保持其内在的局部结构,则对应的 \mathbf{Z}_i 和 \mathbf{Z}_j 也是邻近点。可表示为如下的最小化问题:

$$\min_{\mathbf{Z}} \sum_{ij} \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j\|_2^2 \mathbf{Q}_{ij}, \quad (7)$$

其中 \mathbf{Q}_{ij} 表示数据点 \mathbf{Y}_i 和 \mathbf{Y}_j 的权重,令 $N_k(\mathbf{Y}_i)$ 表示 \mathbf{Y}_i 的 k 最近邻的数据集,有:

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{cases} 1, \mathbf{Y}_i \in N_k(\mathbf{Y}_j) \text{ or } \mathbf{Y}_j \in N_k(\mathbf{Y}_i) \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

图正则项(7)中 \mathbf{Z}_i 和 \mathbf{Z}_j 的距离可作为原数据空间中 \mathbf{Y}_i 和 \mathbf{Y}_j 之间的相异性度量,该约束可保证原始数据空间邻近的点在系数空间中的表示系数仍然比较接近^[20]。定义 $\mathbf{L} = \mathbf{A} - \mathbf{Q}$, 其中 \mathbf{A} 是对角矩阵, $A_{ii} = \sum_j \mathbf{Q}_{ij}$, \mathbf{L} 是拉普拉斯矩阵,则式(7)可改写为:

$$\min_{\mathbf{Z}} \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{Z}^T), \quad (8)$$

将拉普拉斯正则项(8)代入到模型(6)中,可得 LRWSN-LRR 的最小化目标函数如下:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{S}} C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \alpha \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{Z}^T) \\ \text{ s. t. } \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}\|_F^2 \leq \epsilon, \quad (9)$$

其中 α 为正则化参数。模型(9)在利用 HSI 光谱域全局低秩先验的基础上,引入拉普拉斯正则项,能保护数据内部的几何结构。另外,采用 WSN 作为低秩正则项,能更灵活、精确地逼近秩函数,提高算法对不同类型及强度噪声的恢复能力。

3.2 模型求解

交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)是求解含多个正则项目标函数的有效算法^[22],本文采用 ADMM 方法求解 LRWSN-LRR 模型(9)。首先写出其增广的拉格朗日函数:

$$\ell(\mathbf{Z}, \mathbf{S}, \mathbf{M}) = C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \alpha \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{Z}^T) + \\ \langle \mathbf{M}, \mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}\|_F^2, \quad (10)$$

其中: μ 是惩罚参数, \mathbf{M} 为拉格朗日乘子。使用交替优化的方法更新变量 \mathbf{Z} , \mathbf{S} , \mathbf{M} , 在第 $k+1$ 次迭代中,更新方法如下。

固定 \mathbf{S}^k 和 \mathbf{M}^k ,更新 \mathbf{Z}^{k+1} 等价于求解如下的最小化问题:

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \alpha \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{Z}^T) + \\ \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}^k + \mathbf{M}^k / \mu\|_F^2. \quad (11)$$

根据文献^[23], WSN 最小化问题可采用广义的迭代收缩(Generalized Soft-Thresholding, GST)算法^[24]求解。注意式(11)中由于拉普拉斯正则项和字典 \mathbf{D} 的存在,GST 算法不再适用。本文采用带自适应惩罚项的线性化交替方向迭代(Linearized Alternating Direction Method with Adaptive Penalty, LADMAP)方法^[25]求解问题(11)。记为:

$$f(\mathbf{Z}, \mathbf{S}^k, \mathbf{M}^k) = \alpha \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{Z}^T) +$$

$$\frac{\mu}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{S}^k + \mathbf{M}^k / \mu\|_F^2.$$

根据 LADMAP 算法,最小化优化问题(11)可转化为:

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \\ \langle \nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k), \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k \rangle + \frac{\eta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k\|_F^2 = \\ \arg \min_{\mathbf{Z}} C \|\mathbf{Z}\|_{w, s_p}^p + \frac{\eta}{2} \|\mathbf{Z} - (\mathbf{Z}^k - \nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k) / \eta)\|_F^2, \quad (12)$$

其中 $\nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k)$ 是 f 关于 \mathbf{Z} 的梯度:

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k) = \alpha (\mathbf{Z}^k \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{Z}^k) +$$

$$\mu^k \mathbf{D}^T (\mathbf{DZ}^k - \mathbf{Y} + \mathbf{S}^k - \mathbf{M}^k / \mu).$$

用线性化的 $\langle \nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k), \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k \rangle$ 与邻近项 $(\eta/2) \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^k\|_F^2$ 之和来逼近 f 。取 $\eta > 2\alpha \|\mathbf{L}\|_2 + \mu \|\mathbf{D}\|_2^2$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数,为矩阵的最大奇异值,此时问题(11)可等价地转化为式(12)。

记 $\mathbf{Z}^k - \nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}^k) / \eta$ 的奇异值分解为 $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, 其中 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, 则对于升序的权数向量 w , 式(12)的解为^[23]:

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T, \quad (13)$$

其中: $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ 对角阵, δ_i 是如下优化问题的解:

$$\min_{\delta_i} (\delta_i - \sigma_i)^2 + w_i \delta_i^p \text{ s. t. } \delta_i \geq 0. \quad (14)$$

问题(14)可采用 GST 方法^[24]求解。

算法 1 利用 LADMAP 算法求解 LRWSN-LRR

输入:含噪 HSI 数据 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{M \times N \times B}$,最近邻数 k ,及正则化参数 λ, α ;

a. 初始化: $\mathbf{Z}^0 = \mathbf{S}^0 = \mathbf{M}^0 = 0, \mu^{\max} = 10^6, \rho = 1.5, \epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-2}$;

b. 选取字典 \mathbf{D} ,构建 \mathbf{Y} 的最近邻图,计算拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} ;

c. 重复以下步骤直至收敛.

求解式(13)和(14)更新 \mathbf{Z} ,

求解式(15)更新 \mathbf{S} ;

求解式(16)更新 \mathbf{M} ;

用 $\mu^{k+1} = \min(\rho\mu^k, \mu^{\max})$ 更新 μ ;

检查收敛条件:

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{S}^{k+1}\|_F / \|\mathbf{Y}\|_F < \epsilon_1 \text{ 且} \\ \max(\|\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{Z}^k\|_F / \|\mathbf{Y}\|_F, \|\mathbf{S}^{k+1}$$

$$- \mathbf{S}^k\|_F / \|\mathbf{Y}\|_F) < \epsilon_2;$$

输出:恢复的 HSI 矩阵 $\mathbf{D}\mathbf{Z}^*$ 。

由式(10),更新 \mathbf{S}^{k+1} 为求解:

$$\min_{\mathbf{S}} \|\mathbf{S}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{S} - (\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{Z} + \mathbf{M}^k / \mu)\|_F^2.$$

利用软阈值方法^[21],其闭合解是:

$$\mathbf{S}^{k+1} = \mathfrak{R} \left[\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{Z}^{k+1} + \frac{\mathbf{M}^k}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu} \right], \quad (15)$$

其中软阈值算子 $\mathfrak{R}(x, \theta) = \text{sgn}(x) \max(|x| - \theta, 0)$ 。

最后更新拉格朗日乘子:

$$\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}^k + \mu^k (\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{S}^{k+1}). \quad (16)$$

LRWSN-LRR 模型(9)的求解进程如算法 1。

4 实验结果与分析

在本节中,分别在模拟 HSI 数据和实际图像数据上进行实验,来验证提出算法的有效性。模拟图像选取 Washington DC Mall 数据集,空间尺寸为 $1\ 208 \times 307$,包含 191 个波段,选取了大小为 $200 \times 200 \times 100$ 的子图像进行实验。实际 HSI 选取了 HYDICE Urban 数据集,该影像空间尺寸为 307×307 ,包含 210 个波段,选取了大小为 $200 \times 200 \times 210$ 的子图像为实验对象。

为了更好地验证实验效果,选用基于张量结构的 BM4D 算法^[10]、低秩矩阵恢复方法(LRMR)^[6]、LRR 模型^[15],以及基于迭代 WSN

最小化的低秩矩阵模型(WSNM)^[14]作为对比方法。选用平均峰值信噪比(Mean Peak Signal-to-Noise Ratio, MPSNR)^[6]、平均结构相似性指数(Mean Structural Similarity Indices, MSSIM)^[6]和平均光谱角(Mean Spectral Angle, MSA)三个量化指标对比不同方法的恢复效果,其中 MSA 能衡量恢复图像对光谱的保真作用。利用本文 LRWSN-LRR 模型进行实验时,首先对 HSI 各个波段数据归一化处理,再构建观测数据 \mathbf{Y} 的拉普拉斯矩阵。实验中,对比方法的参数均调至最优,其中 LRR 和 WSNM 模型中图像块尺寸为 20×20 ,相邻的图块重叠像素为 8,WSNM 算法迭代次数为 3。LRWSN-LRR 模型中设置图的最近邻数 $k=10$,能较好地平衡算法的去噪效果和计算时间^[20]。权数向量 \mathbf{w} 取值为:

$$\mathbf{w}_i = \sqrt{B} / (\sigma_i^{1/p} + \epsilon),$$

其中 $\epsilon=10^{-16}$,其他参数的设置将在下文做详细的讨论。

注意到 LRWSN-LRR 算法中一个重要的问题是如何选择字典 \mathbf{D} 。现有的基于 LRR 的 HSI 处理算法多直接选取观测数据为字典进行自我表示,即 $\mathbf{D}=\mathbf{Y}$ 。实验中,发现随着 \mathbf{Y} 含有噪声强度的增加,其作为字典的重构能力将大幅减弱,如果 \mathbf{Y} 中再含有多种类型的噪声,表示清晰图像的能力将更差,进而影响 LRR 模型的恢复效果。因此,本文提出对 \mathbf{Y} 进行噪声估计预处理,将得到的初步无噪图像 \mathbf{X}_0 作为 LRR 模型的字典。文中采用文献^[26]中基于多重回归理论的方法获取无噪估计 \mathbf{X}_0 ,该方法利用相邻光谱间的高度相关性来估计无噪图像,它有两个优点:能较好地表示数据子空间且保持数据的低秩结构;该算法复杂度低,计算快速。实验结果如图 1 所示,对选用的 Washington DC Mall 数据集的每个波段都添加方差为 v 的高斯噪声,当 v 增大时,以 \mathbf{Y} 为字典的 LRWSN-LRR 模型恢复图像的 MPSNR 和 MSSIM 值下降显著,而 $\mathbf{D}=\mathbf{X}_0$ 的模型对噪声强度的鲁棒性较好,其中 LRMR 模型为对比方法。另外,以无噪图像 \mathbf{X}_0 作为字典,此时系数矩阵 \mathbf{Z} 中的元素 \mathbf{Z}_{ij} 表示光谱带 \mathbf{X}_j 对重构 \mathbf{X}_i 的贡献,反

映了两光谱带图像的相似性。在求解表示系数时,LRWSN-LRR 中的拉普拉斯正则项将倾向于选择邻近的数据点而非偏远的样本,最优解 Z 呈现近似的块对角结构,使恢复结构较好地保持原始图像的内部几何信息。

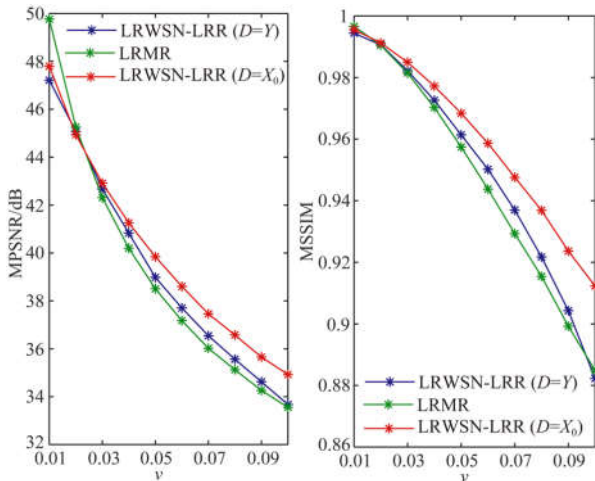


图 1 不同字典恢复结果的 MPSNR 和 MSSIM

Fig. 1 MPSNR and MSSIM of restoration results by different dictionary

4.1 模拟图像实验

HSI 中主要包含高斯噪声以及具有稀疏性质的脉冲噪声、死线噪声和条纹噪声。为比较不同方法对不同类型噪声的恢复效果,在模拟实验中,对 Washington DC Mall 数据添加以下 4 种噪声:

Case 1: 对每个波段分别加入均值为零、方差为 0.05 的相等强度高斯噪声。

Case 2: 对每个波段加入不同强度的高斯噪声和脉冲噪声,其中高斯噪声均值为零,方差随机取 $0 \sim 0.1$ 之间;脉冲噪声的比例随机取 $0 \sim 0.1$ 之间。

Case 3: 按照 Case 2 中的方法加入高斯噪声和脉冲噪声。另外,随机选取 20 个波段加入竖向的死线噪声,其中每个光谱带随机添加 3~10 条,每条宽度随机取 1~3 像素之间。

Case 4: 按照 Case 2 中的方法加入高斯噪声

和脉冲噪声。另外,随机选取 20 个波段加入横向的条纹噪声,其中条纹宽度随机取 5~10 像素之间,相邻条纹的间隔随机取 10~15 像素之间。

5 种方法在不同噪声类型下恢复结果的定量指标值如表 1 所示。可见,当 HSI 数据每个波段只含有等强度的高斯噪声时,所有方法都能恢复出较好的结果,但 BM4D 模型对稀疏脉冲噪声、死线及条纹噪声的去除效果较差(如 Case 2~4)。基于低秩矩阵恢复的 LRMR 和 WSNM 方法利用光谱的低秩信息,可以去除脉冲噪声,但当图像中含有死线及条纹噪声时,恢复效果退化明显(如 Case 3~4)。与 LRMR 方法相比,LRR 模型对不同类型噪声的恢复结果都有明显地改善,说明了 LRR 在恢复 HSI 数据时的优势。另外,LRMR 和 WSNM 模型需对 HSI 做分块处理,而基于 LRR 的恢复方法对各波段整体恢复,提高算法效率的同时能有效地消除光谱畸变,表 1 中可见 LRR 和 LRWSN-LRR 模型具有较高的 MSA 值。本文 LRWSN-LRR 引入 WSN 低秩正则项和保持光谱内部几何结构的拉普拉斯正则项,恢复效果较 LRR 模型有显著的提升,数值结果显示其较好的性能。图 2 给出了 4 种噪声类型下不同方法逐波段的 PSNR 和 SSIM 值,可以看出 LRMR 和 WSNM 方法在含多种噪声的波段上,PSNR 和 SSIM 值凹陷明显,而 LRWSN-LRR 方法对 4 种类型噪声去除效果都很稳定。

为了进一步评价所有方法的性能,本文给出了恢复前后图像的光谱特征和视觉效果图。图 3 以噪声 Case 2 为例,给出了像素(100,100)的光谱特征。结合表 1 中的 MSA 值,说明本文提出的方法对保护 HSI 的光谱特征具有优势。图 4 和图 5 分别是在噪声 Case 2 的基础上添加随机的死线噪声和条纹噪声后,不同方法相应波段的恢复结果。从图 4 中可以看出,相比 LRMR 方法,LRR 和 WSNM 模型的恢复效果较好,但不能完全去除所有噪声。本文 LRWSN-LRR 方法恢复效果较前 3 种方法均有提升,说明了 LRR 模型处理 HSI 的优势和引入新正则项的作用。

表 1 模拟数据下不同方法的恢复结果

Tab. 1 Restoration results by different methods for simulated data

噪声类型	评判指标	BM4D	LRMR	LRR	WSNM	LRWSN-LRR
Case 1	MPSNR/dB	38.09	38.51	38.70	38.88	39.95
	MSSIM	0.953 7	0.957 6	0.956 1	0.958 4	0.968 5
	MSA	2.0719	2.092 6	1.855 4	1.817 3	1.623 3
Case2	MPSNR/dB	32.05	36.48	37.50	39.26	39.98
	MSSIM	0.830 9	0.933 2	0.952 7	0.968 0	0.968 5
	MSA	3.687 7	2.748 7	2.168 3	1.849 8	1.612 0
Case 3	MPSNR/dB	30.44	35.16	36.57	37.05	37.92
	MSSIM	0.803 9	0.921 0	0.949 0	0.951 1	0.954 4
	MSA	5.599 0	3.743 1	2.538 3	3.247 9	2.086 2
Case 4	MPSNR/dB	31.03	34.66	36.11	36.76	37.93
	MSSIM	0.818 3	0.923 1	0.939 3	0.944 9	0.954 1
	MSA	4.348 2	4.395 9	2.640 7	3.685 5	2.075 6

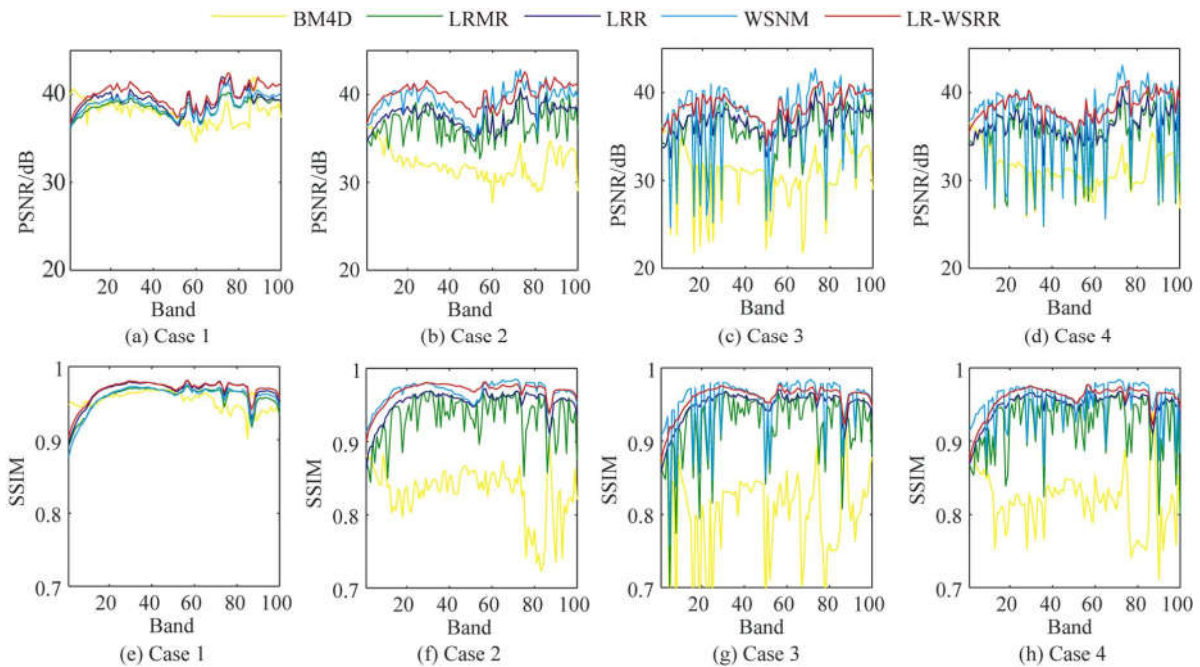


图 2 不同方法逐波段恢复结果的 PSNR 和 SSIM

Fig. 2 PSNR and SSIM of different methods for each band

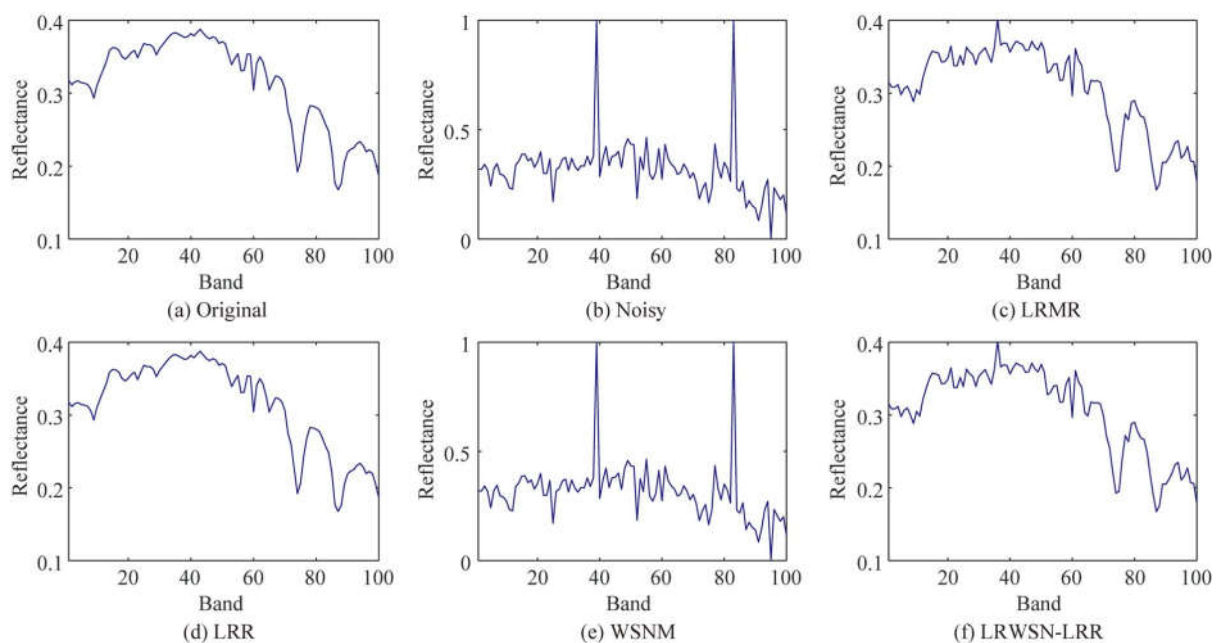


图 3 噪声 Case 2 中恢复结果像素(100,100)的光谱

Fig. 3 Spectrum of pixel (100, 100) of the restoration results in Case 2

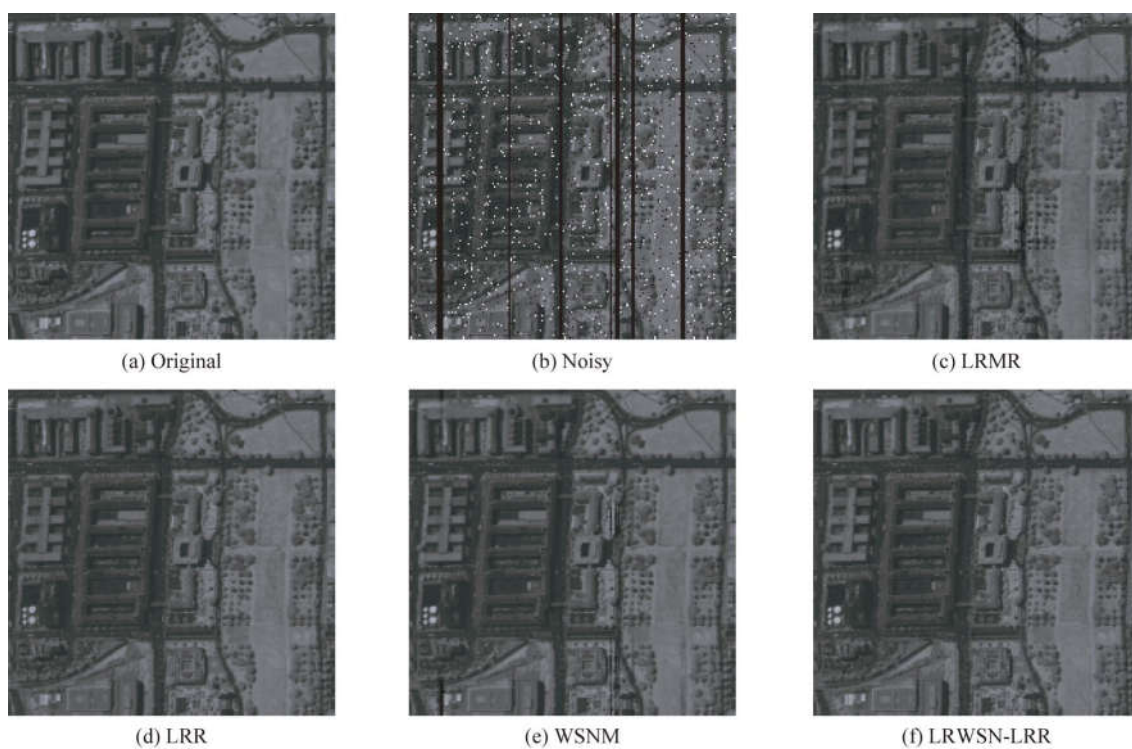


图 4 噪声 Case 3 中恢复结果的第 67 波段

Fig. 4 Restoration results of band 67 in Case 3

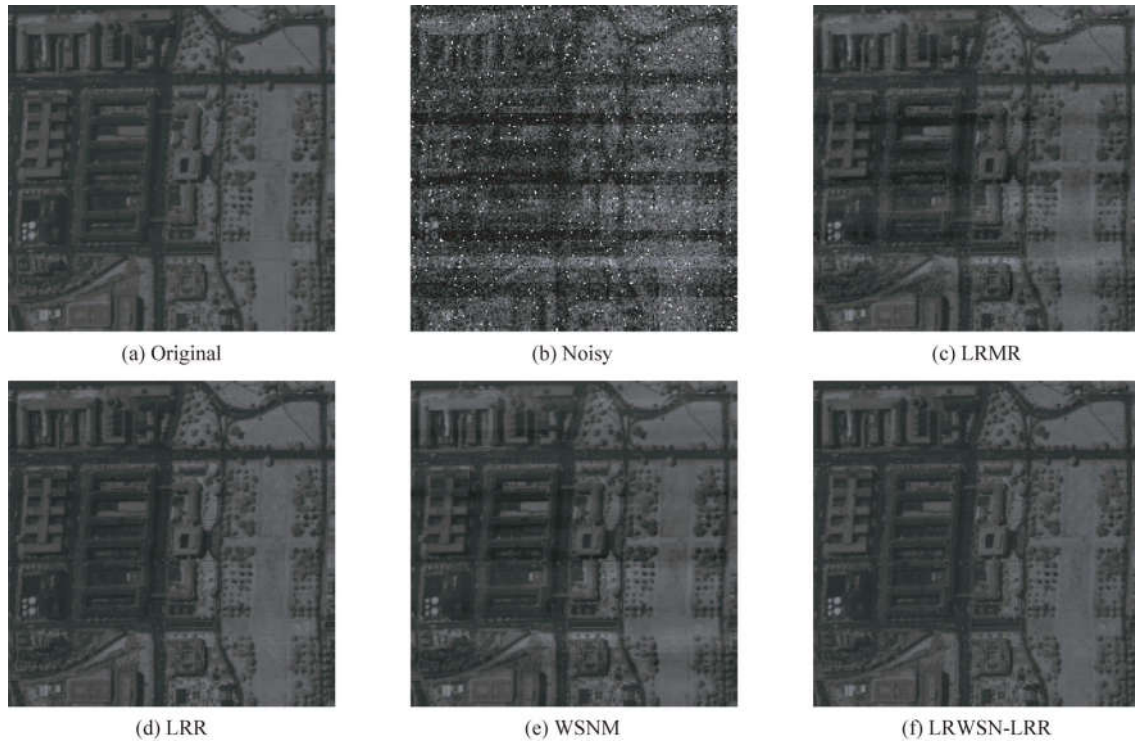


图 5 噪声 Case 4 中恢复结果的第 77 波段

Fig. 5 Restoration results of band 77 in Case 4

接下来,以噪声 case 4 为例,讨论 LRWSN-LRR 模型中参数对恢复结果的影响。图 6(a)和图 6(b)分别是固定其他参数,在 $[0, 0.8]$ 每隔 0.04 取一个值为 λ ,恢复结果中 MPSNR 和 MSSIM 的变化情况。固定 λ 、 C 和 p 值, α 在 $[0, 0.02]$ 范围内以 0.001 为步长取值,恢复结果如图 6(c)和图 6(d),可见拉普拉斯正则项的有效性。从区间 $[0.0001, 0.002]$ 中隔 0.0001 取一个 C 值,低秩参数的灵敏性分析如图 6(e)和图 6(f)。图 6(g)和图 6(h)为参数 p 在 $[0.1, 1]$ 以 0.1 为步长取值时,对模型结果影响的分析。注意到,参数 p 旨在调节 WSN 以更精确地逼近秩函数,实验中发现,随着 p 值的降低,越多的较小奇异值对应的高秩成分将变为 0,而低秩成分的奇异值则更接近于真值。另一方面,随着图像中含噪声强度的增大,更多的秩成分会受到污染,因此,应选用较小的 p 值惩罚高秩部分。噪声 Case 4 中含有高水平的混合噪声,由图 6(g)和图 6(h)可见,随着 p 值的增加,恢复图像的质量呈下降趋势。在该噪声类型下,实验中当 $\lambda=0.7$, $\alpha=0.015$, $C=0.002$,

$p=0.1$ 时,取得最好的恢复效果。

4.2 实际图像实验

HYDICE Urban 数据集受到死线、条纹、水吸收等其他噪声的污染,选取 LRMR 和 WSNM 方法作为对比方法。图 7~图 8 分别给出了 3 种方法恢复结果的第 138 和 109 波段。从图中可以看出,含有低强度的稀疏噪声时,LRMR 和 WSNM 方法能获得较好的恢复效果,但当遇到高强度噪声,这两种方法去噪不彻底,结果中仍存在随机噪声和条纹噪声(如图 8(b)和图 8(c))。相比而言,本文提出的方法在两种情况下都能有效地恢复出较清晰的图像。图 9 给出了第 109 波段图像恢复前后的水平平均剖面,其中横坐标为行数,纵坐标表示每行的平均数字量化值(Mean Digital Number, MDN)。如图 9(a)所示,由于存在混合噪声,曲线出现快速波动。经过恢复处理后,波动在一定程度上受到抑制。可以看出,本文 LRWSN-LRR 方法获得最好的恢复效果,这和图 8 中所示的视觉结果是一致的。

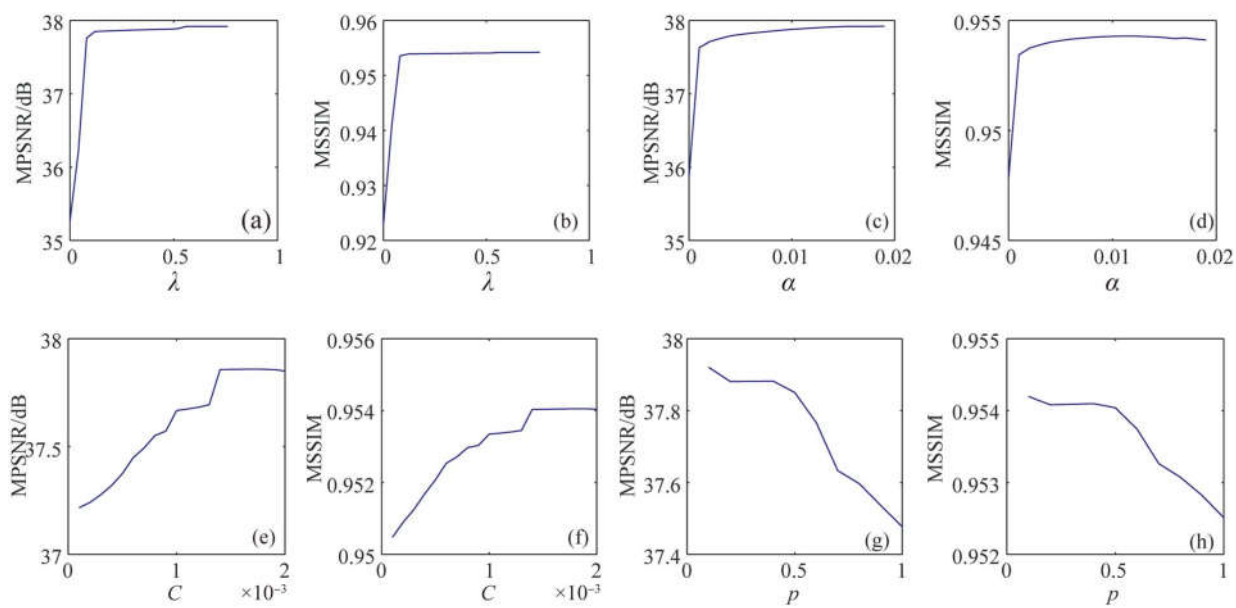


图 6 参数灵敏度分析

Fig. 6 Sensitivity analysis of parameters

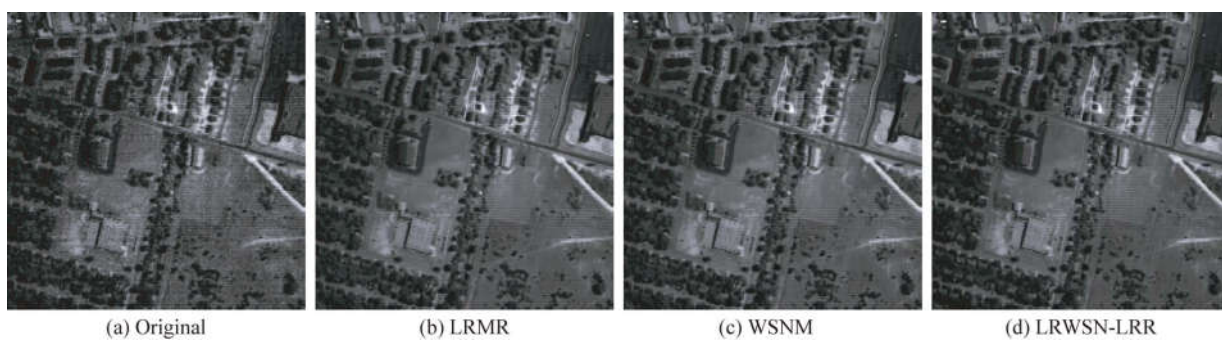


图 7 Urban 数据恢复结果的第 138 波段

Fig. 7 Restoration results of band 138 in Urban data

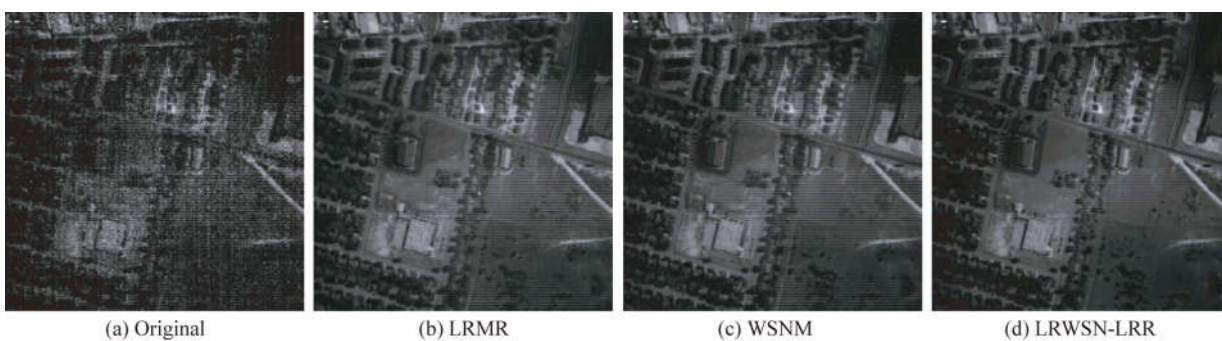


图 8 Urban 数据恢复结果的第 109 波段

Fig. 8 Restoration results of band 109 in Urban data

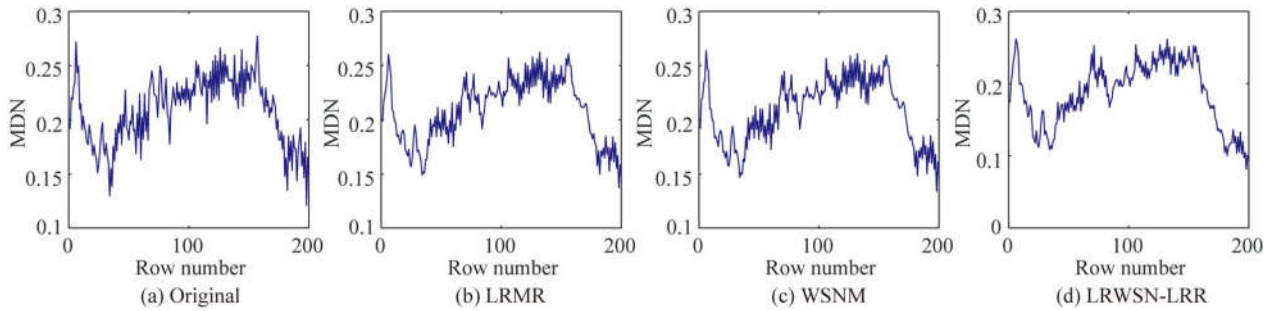


图9 Urban数据恢复结果中第109波段的水平平均剖面

Fig. 9 Horizontal mean profiles of band 109 in restoration results of Urban data

5 结 论

LRWSN-LRR模型采用更符合HSI数据特点的LRR模型恢复HSI,引入WSN代替核函数作为低秩正则项,能更灵活、精确地逼近秩函数。实验中,对观测数据做噪声估计预处理,将得到的初步无噪图像作为LRR的字典,进一步提高了LRR模型的性能,进而更好地恢复HSI的低秩部分。另外,该方法引入了拉普拉斯正则项来保持数据内部的几何结构,可有效地改善HSI的恢

复效果。实验结果表明,所提出方法能保留图像的细节信息,去除多种类型的噪声,恢复结果的视觉质量和量化指标值均显示出本文方法恢复HSI的优势。在Washington DC Mall数据库上模拟4种噪声类型,相比经典的LRMR方法,LRWSN-LRR的MPSNR和MSSIM平均提高了2.74 dB和0.03,而MSA降低1.40。在实际HSI数据库HYDICE Urban上的结果表明,当图像中含有强稀疏噪声时,基于低秩矩阵恢复的方法去噪不彻底,而LRWSN-LRR仍能取得较好的恢复结果。

参考文献:

- [1] 王庆超,付光远,汪洪桥,等.多核融合多尺度特征的高光谱影像地物分类[J].光学精密工程,2018,26(4):980-988.
WANG Q CH, FU G Y, WANG H Q, *et al.*. Fusion of multi-scale feature using multiple kernel learning for hyperspectral image land cover classification [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2018, 26(4): 980-988. (in Chinese)
- [2] 黄鸿,陈美利,段宇乐,等.空-谱协同流形重构的高光谱影像分类[J].光学精密工程,2018,26(7):1827-1836.
HUANG H, CHEN M L, DUAN Y L, *et al.*. Hyper-spectral image classification using spatial-spectral manifold reconstruction [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2018, 26(7): 1827-1836. (in Chinese)
- [3] TOCHON G, CHANUSSOT J, MURA M D, *et al.*. Object tracking by hierarchical decomposition of hyperspectral video sequences: application to chemical gas plume tracking [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2017, 55(8): 4567-4585.
- [4] 何芳,王榕,于强,等.加权空谱局部保持投影的高光谱图像特征提取[J].光学精密工程,2017,25(1):263-273.
HE F, WANG R, YU Q, *et al.*. Feature extraction of hyperspectral images of weighted spatial and spectral locality preserving projection (WSSLPP) [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25(1): 263-273. (in Chinese)
- [5] 张良培,李家艺.高光谱图像稀疏信息处理综述与展望[J].遥感学报,2016,20(5):1091-1101.
ZHANG L P, LI J Y. Development and prospect of sparse representation-based hyperspectral image processing and analysis [J]. *Journal of Remote Sensing*, 2016, 20(5): 1091-1101. (in Chinese)
- [6] ZHANG H, HE W, ZHANG L, *et al.*. Hyperspectral image restoration using low-rank matrix recovery [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2014, 52(8): 4729-4743.
- [7] CAI J, DONG B, OSHER S, *et al.*. Image restoration: total variation, wavelet frames, and beyond [J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2012, 25(4): 1033-1089.
- [8] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006,

- 15(12): 3736-3745.
- [9] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, *et al.*. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2080.
- [10] MAGGIONI M, KATKOVNIK V, EGIAZARIAN K, *et al.*. Nonlocal transform-domain filter for volumetric data denoising and reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 22(1): 119-133.
- [11] WANG Y, PENG J, ZHAO Q, *et al.*. Hyperspectral image restoration via total variation regularized low-rank tensor decomposition [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2018, 11(4): 1227-1243.
- [12] CHANG C I, DU Q. Interference and noise-adjusted principal components analysis [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1999, 37(5): 2387-2396.
- [13] CANDÈS E J, LI X, MA Y, *et al.*. Robust principal component analysis? *JACM* 58(3): 11 [J]. *Journal of the Acm.*, 2011, 58(3):1-37.
- [14] XIE Y, QU Y, TAO D, *et al.*. Hyperspectral image restoration via iteratively regularized weighted Schatten p-norm minimization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, 54(8): 4642-4659.
- [15] LIU G C, LIN Z C, YAN S C, *et al.*. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation [J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(1): 171-184.
- [16] 蔡荣荣, 王斌. 一种基于低秩表示的高光谱图像恢复方法[J]. *复旦学报(自然科学版)*, 2017, 56(3): 346-358.
- CAI R R, WANG B. Hyperspectral imagery restoration based on low-rank representation [J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 2017, 56(3): 346-358. (in Chinese)
- [17] SUMARSONO A, DU Q. Low-rank subspace representation for supervised and unsupervised classification of hyperspectral imagery[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2016, 9(9): 4188-4195.
- [18] XU Y, WU Z, LI J, *et al.*. Anomaly detection in hyperspectral images based on low-rank and sparse representation [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2016, 54(4): 1990-2000.
- [19] GU S, ZHANG L, ZUO W, *et al.*. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising [C]. *Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE*, 2014: 2862-2869.
- [20] YIN M, GAO J B, LIN Z C. Laplacian regularized low-rank representation and its applications [J]. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2016, 38(3): 504-517.
- [21] CAI J F, CAND, S, E J, *et al.*. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. *Siam Journal on Optimization*, 2008, 20(4): 1956-1982.
- [22] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al.*. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. *Foundations & Trends in Machine Learning*, 2010, 3(1): 1-122.
- [23] XIE Y, GU S, LIU Y, *et al.*. Weighted Schatten p-norm minimization for image denoising and background subtraction [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 25(10): 4842-4857.
- [24] ZUO W, MENG D, ZHANG L, *et al.*. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding [C]. *IEEE International Conference on Computer Vision. IEEE*, 2013: 217-224.
- [25] LIN Z, LIU R, SU Z. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low-rank representation [J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2011: 612-620.
- [26] JOSÉ M B-D, JOSÉ M P N. Hyperspectral subspace identification [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2008, 46(8): 2435-2445.

作者简介:



张倩颖(1990—),女,河南商丘人,讲师,2016年于北京航空航天大学获得博士学位,主要从事图像处理、机器学习方面的研究。E-mail: zhang_qy@sz.jnu.edu.cn



谢晓振(1984—),男,河南南阳人,副教授,2013年于北京航空航天大学获得博士学位,主要从事高光谱遥感图像分析方面的研究。E-mail: xiexzh@nwafu.edu.cn