

文章编号 1004-924X(2019)04-0771-13

## 激光跟踪仪多基站转站精度模型与误差补偿

李 辉, 刘 巍\*, 张 洋, 张仁伟, 周志龙, 贾振元  
(大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116033)

**摘要:**为实现大空间域激光跟踪仪的高精度测量,本文针对由转站误差导致的激光跟踪仪分时多基站测量精度难保证的问题,提出了基于多站位下单台激光跟踪仪测量误差的转站误差模型与转站参数修正的补偿方法。首先分析了激光跟踪仪测量误差的来源以及具体形式,阐述了激光跟踪仪测量误差影响空间任意点测量精度的具体形式;其次分析了激光跟踪仪的随机测量误差和系统测量误差对多基站转站参数求解精度的影响。在此基础上,建立了考虑随机、系统测量误差的激光跟踪仪多基站转站误差模型和转站参数误差补偿模型。蒙特卡洛仿真结果表明:当激光跟踪仪的长度测量误差为  $0.5 \mu\text{m}/\text{m}$ , 角度测量误差为  $5 \mu\text{m} + 6 \mu\text{m}/\text{m}$  时,最大转站误差为  $0.1747 \text{ mm}$ , 补偿后最大转站误差为  $0.04 \text{ mm}$ , 转站精度提高了  $77\%$ 。分时多基站转站测量实验结果表明:直接转站测量时最大转站误差为  $0.0542 \text{ mm}$ , 补偿后转站误差为  $0.0331 \text{ mm}$ , 转站精度提升了  $38.9\%$ 。激光跟踪转站补偿后测量精度有明显的提高。

**关键词:**大尺寸测量;激光跟踪仪;随机测量误差;系统测量误差;转站误差;蒙特卡洛仿真

**中图分类号:** TB96 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20192704.0771

## Model establishment and error compensation of laser tracker station-transfer

LI Hui, LIU Wei\*, ZHANG Yang, ZHANG Ren-wei, ZHOU Zhi-long, JIA Zhen-yuan

(College of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116033, China)

\* Corresponding author, E-mail: lw2007@dlut.edu.cn

**Abstract:** A station-transfer model was established in this study to improve the accuracy of laser tracker station-transfer measurement in larger-scale metrology. The accuracy of the laser tracker is related to the measurement errors, such as random and system measurement errors. First, the source and precise form of measurement error of the laser tracker system was analyzed according to the measurement principle of the laser tracker. Moreover, a spatial point measurement model containing the laser tracker measurement error was established. Second, a station-transfer calculation model was established, which was linked to random and systematic measurement errors. Finally, an error compensation model of the laser tracker station-transfer was established, which is similarly related to the random and system measurement errors, by analyzing the station-transfer calculation model. The results are verified by Monte Carlo simulation and show that when the error of length measurement is  $0.5 \mu\text{m}/\text{m}$  and the error of angle measurement is  $5 \mu\text{m} + 6 \mu\text{m}/\text{m}$ , and the maximum station-transfer

**收稿日期:** 2018-09-27; **修订日期:** 2018-11-20.

**基金项目:** 优秀青年科学基金资助项目(No. 51622501); 大连市高层次人才创新支持计划项目(No. 2017RJ04); 创新研究群体科学基金资助项目(No. 51321004)

error is 0.174 7 mm. Hence, the maximum station-transfer error after compensation is 0.04 mm, and the accuracy of the transfer station is increased by 77%. A multi-base time-sharing station-transfer measurement experiment shows that the direct station-transfer error is 0.054 2 mm, the error of the station-transfer after compensation is 0.033 1 mm, and the accuracy of the transfer station is increased by 38.9%. Thus, the measurement accuracy of the laser tracker station-transfer exhibits significant improvement after compensation.

**Key words:** large-scale metrology; laser tracker; random measurement error; systematic measurement error; station-transfer error; Monte Carlo simulation

## 1 引 言

激光跟踪仪具有测量范围大、测量精度高、测量速度快、操作要求低等特点,以莱卡 AT960 型激光跟踪仪为例,其测量范围为 20 m,累计测量误差为  $\pm 15 \mu\text{m} + 6 \mu\text{m}/\text{m}$ 。这种大范围高精度的测量特性,使得它在精密制造<sup>[1]</sup>、大型海洋零部件的高精度装配和检验<sup>[2]</sup>,特别是航空航天等领域中得到了广泛的应用<sup>[3]</sup>。当零件结构复杂,测量空间有限导致激光跟踪仪测量光路受遮挡时,需要多台激光跟踪仪同步或单台分时多站位测量,这种多基站测量条件下的单体激光跟踪仪对不同空间位置公共点的测量误差成为制约转站精度提高的重要因素。因此,建立单台激光跟踪仪测量误差(随机测量误差与系统测量误差)与转站精度的关联模型并实施补偿,对提高多基站激光跟踪仪的转站测量精度至关重要。

激光跟踪仪转站是指利用多台激光跟踪仪或者单台激光跟踪仪在多个测量站位下通过测量空间公共点的方式,将不同激光跟踪仪或者不同测量坐标系下的测量数据进行统一的一种测量方法。在此过程中,激光跟踪仪测量精度的降低会导致激光跟踪仪转站精度的降低。许多专家和学者对大尺寸测量中如何提高激光跟踪仪的转站测量精度问题进行了研究。张皓林等<sup>[4]</sup>研究了不同分布形式的公共点对转站精度的影响,对三维坐标转换提供了精度评价依据,建立了坐标转换精度空间分布的数学模型,有效地提高了三维转换精度。林嘉睿等<sup>[5]</sup>采用激光跟踪仪在多站位下对空间测量区域内若干被测点进行测量。与传统基于角度交汇原理的多站位冗余测量不同,该方法只利用各站位所观测的高精度测长值建立误差方程,通过测长方向的矢量位移约束激光跟踪仪的

测长误差,获得测点三维坐标的相对修正值,实现了激光跟踪仪高精度转站测量。金涨军等<sup>[6]</sup>建立了大飞机装备过程中激光跟踪仪转站参数的误差模型,分析了公共点分布形式对激光跟踪仪转站精度的影响,并评价了转站不确定度。Zhao G 等<sup>[7]</sup>将视觉测量技术与激光跟踪仪转站相结合,利用视觉测量条件对空间公共点进行约束,通过图像校正提高公共点的测量精度,与传统方法相比可以提高激光跟踪仪定位空间公共点的准确性。孙海丽等<sup>[8]</sup>通过分析激光跟踪仪测量原理来校准激光跟踪仪的测量精度,大幅提高了短距离激光跟踪仪的测量精度。卢荣胜<sup>[9]</sup>等利用自准直仪结合多面棱体对激光跟踪仪金属圆光栅的测角误差进行了离散标定,验证了角度测量精度是影响激光跟踪仪空间测点精度的重要因素。林嘉睿等<sup>[10]</sup>提出了一种受限空间下球坐标测量的双向互瞄定向方法,可在较小的空间中完成仪器定向,与传统的转站测量方法相比在保证测量精度的同时提高了测量效率。刘力等<sup>[11]</sup>对激光跟踪仪的测角误差进行溯源,提出了一种基于 S 多项式的测角误差校正方法,验证了激光跟踪仪测量误差的可补偿性,对提高激光跟踪仪的空间点测量精度有重要意义。Acero R 等<sup>[12]</sup>研究了含有序列计量平台的激光跟踪仪的测量精度,使激光跟踪仪和可移动的序列平台在转动过程中保持相对固定,可以提高激光跟踪仪的标定效率,但该方法在现场测量条件下有一定局限性。综上所述,目前激光跟踪仪测量误差以及转站方法的研究主要集中在公共点的分布形式,以及使用冗余测长信息进行高精度转站等方面。在利用单体激光跟踪仪测量误差提升激光跟踪仪多基站转站精度方面的研究较少。

为提高大空间域和复杂测量环境下激光跟踪仪的测量精度,本文针对激光跟踪仪多基站测量

中由转站误差导致整体测量精度难以保证的问题,研究了单体激光跟踪仪测量过程中测量误差(随机测量误差与系统测量误差)对转站参数精度的影响,建立了与单体激光跟踪仪测量误差相关联的多基站转站参数模型,揭示了单体激光跟踪仪的随机测量误差与系统测量误差对转站测量精度的具体影响,并建立了基于激光跟踪仪随机测量误差与系统测量误差的多基站转站补偿模型。最后,分别采用蒙特卡洛仿真和单台激光跟踪仪多基站分时转站实验验证了补偿模型的有效性。

## 2 激光跟踪仪单站位测量精度分析

激光跟踪仪单站位下通过测量空间点相对于测量原点的径向长度  $R$  和两个空间角度(水平角  $\theta$  和垂直角  $\varphi$ )实现空间点的三维坐标测量<sup>[13-15]</sup>,如图1所示。

$$\begin{cases} x = f_x(R, \varphi, \theta) = R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = f_y(R, \varphi, \theta) = R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = f_z(R, \varphi, \theta) = R \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

单站位下影响激光跟踪仪测量精度的因素大致分为三类:环境、随机测量误差和系统测量误差。

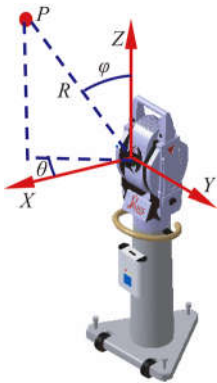


图1 激光跟踪仪测量原理

Fig. 1 Measurement principle of laser tracker

### 2.1 环境因素

测量空间温度、地基震动等属于环境因素。测量环境一般比较稳定,环境因素对单体激光跟踪仪测量精度的影响较小。

### 2.2 随机测量误差

激光跟踪仪反射靶球的安装位置影响激光反

射精度<sup>[16-17]</sup>,从而影响激光跟踪仪的测量精度。鉴于反射靶球安装具有人为性,将靶球安装位置不当引起的误差归为随机测量误差。

### 2.3 系统误差

激光跟踪仪的系统测量误差主要包括测距系统误差和测角系统误差两部分<sup>[18-19]</sup>。在  $(R_0, \varphi_0, \theta_0)$  处对公式(1)进行一阶泰勒展开,将三维空间变动量与激光跟踪仪的测长误差  $dR$ 、测角误差  $d\varphi, d\theta$  关联,得到:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x - f_{x_0} \\ f_y - f_{y_0} \\ f_z - f_{z_0} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(R_0, \varphi_0, \theta_0) \cdot \begin{bmatrix} dR \\ d\varphi \\ d\theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{T}(R_0, \varphi_0, \theta_0)$  表示泰勒展开式的矩阵形式:

$$\mathbf{T}(R_0, \varphi_0, \theta_0) = \begin{bmatrix} \sin \varphi_0 \cos \theta_0 & R_0 \cos \varphi_0 \cos \theta_0 & -R_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \\ \sin \varphi_0 \sin \theta_0 & R_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0 & R_0 \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \\ \cos \varphi_0 & -R_0 \cos \varphi_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令  $\mathbf{e} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$  表示空间点随机测量误差,  $(x_0, y_0, z_0)$  表示理想点值。激光跟踪仪的随机测量误差和系统测量误差对空间任一点的测量精度的具体影响如公式(3)所示:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}(R_0, \varphi_0, \theta_0) \begin{bmatrix} dR \\ d\varphi \\ d\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

## 3 多基站激光跟踪仪转站误差模型与补偿方法

### 3.1 单体激光跟踪仪测量误差的多基站转站模型

基于以上单体激光跟踪仪随机以及系统两项测量误差对空间点测量精度的影响分析,建立多站位下单个激光跟踪仪测量误差与转站误差的关系。分析单站位激光跟踪仪测量误差对多基站转站参数精度的影响。

激光跟踪仪转站的实质是不同测量站位或者多个激光跟踪仪通过测量公共三维点进行坐标系刚性转换的问题<sup>[20]</sup>,如图2所示。根据刚性矩阵转化理论,只要公共测量点的数量能够满足转换矩阵的最小求解要求,就可以实现两个坐标系间的转换,与具体的公共点分布形式无关。

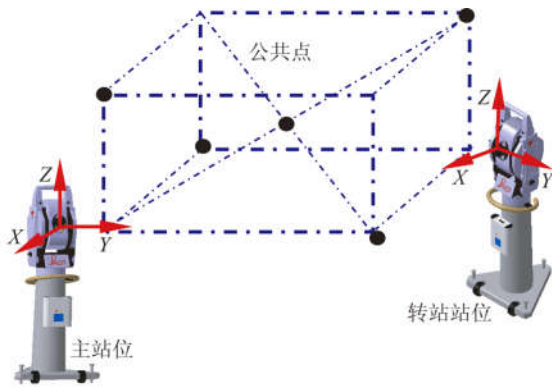


图 2 激光跟踪仪转站原理

Fig. 2 Principle of laser tracker station-transfer

激光跟踪仪的随机测量误差和系统测量误差会影响空间公共点的点位测量精度,进而影响激光跟踪仪转站精度,本文以两个激光跟踪仪或者两个测量站位为例进行分析。当涉及更多激光跟踪仪转站或者更多测量站位时,与两站位激光跟踪仪转站类似,都是转站站位相对主站位的数据转换。在转站过程中,为了区分各个激光跟踪仪或者测量站位,将不进行坐标转换的测量坐标系作为主坐标系,即所有测量坐标系转站的方向;其余需要进行坐标转换才能将测量数据与主坐标系进行统一的坐标系为转站坐标系。设转站坐标系下的公共测量点为 $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ ,主坐标系下的公共测量点为 $(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i})$ 。根据空间三维坐标相似变换原理可得,两个坐标系间的基本转站公式为:

$$\begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ y_{3i} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{bmatrix} + \mathbf{T}, \quad (4)$$

其中: $\mathbf{R}$ 表示转站坐标系与主坐标系间的旋转关系矩阵, $\mathbf{T}$ 为转站坐标系与主坐标系间的平移关系矩阵。联合式(3)和式(4)可得公共点含有测量误差条件下的转站公式:

$$\mathbf{Y}_i^0 + \mathbf{T}_y(\mathbf{R}_y^0, \varphi_y^0, \theta_y^0) \cdot \begin{bmatrix} dR_y \\ d\varphi_y \\ d\theta_y \end{bmatrix} + \mathbf{e}_y = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_i^0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_x(\mathbf{R}_x^0, \varphi_x^0, \theta_x^0) \begin{bmatrix} dR_x \\ d\varphi_x \\ d\theta_x \end{bmatrix} + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{T}, \quad (5)$$

其中: $\mathbf{Y}_i^0 = (y_{1i}^0, y_{2i}^0, y_{3i}^0)^T$ 表示主坐标系下第*i*个点的理论坐标, $\mathbf{X}_i^0 = (x_{1i}^0, x_{2i}^0, x_{3i}^0)^T$ 表示转站坐标

系下的理论坐标, $\mathbf{e}_y = (\Delta x_y^0, \Delta y_y^0, \Delta z_y^0)$ 表示公共点在主坐标系下的随机测量误差, $\mathbf{e}_i = (\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0)$ 表示公共点在转站坐标系下的随机测量误差。

式(4)和式(5)中含有激光跟踪仪的随机测量误差项和系统测量误差项,影响转站参数 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{T}$ 的求解精度,进而影响激光跟踪仪多基站的转站测量精度。其次,激光跟踪仪的系统测量误差具有累加性,其大小与测量距离有关,因此公共点分布形式不同,求解得到的转站参数精度也不同。例如,平面公共点求解的转站参数精度比空间公共点要低,公共点分布范围大且均匀比公共点小范围随机分布的转站精度高。

### 3.2 激光跟踪仪多基站转站参数修正补偿模型

根据上节单体激光跟踪仪测量误差对多基站转站参数精度影响的分析,多基站转站参数 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{T}$ 的求解精度直接与单体激光跟踪仪的测量精度相关。因此,激光跟踪仪多基站转站误差补偿模型主要从转站参数 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{T}$ 修正的角度展开。

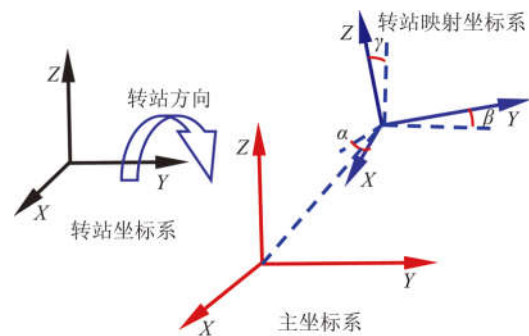


图 3 转站误差

Fig. 3 Station-transfer errors

利用含有测量误差的公共点求解转站参数时,实际求解的转站参数 $\mathbf{R}$ , $\mathbf{T}$ 与理想转站参数 $\mathbf{R}_0$ , $\mathbf{T}_0$ 相比会有偏差。利用实际转站参数将转站坐标系向主坐标系映射时,两个坐标系不能完全重合,如图3所示,转站映射坐标与主坐标间有微小的平移与旋转。令 $\alpha, \beta, \gamma$ 分别表示转站映射坐标系轴线 $X, Y, Z$ 与主坐标系对应轴线 $X, Y, Z$ 的夹角,用 $\Delta\mathbf{R}$ 表示, $\Delta\mathbf{T}$ 表示转站坐标与主坐标间的空间平移矩阵。假设实际转换参数与理想转换参数间的关系如公式(6)所示:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = \Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \\ \mathbf{T}_0 = \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \end{cases}, \quad (6)$$

其中:  $\Delta \mathbf{T}$  可以利用空间向量表示  $\Delta \mathbf{T} = [\Delta t_1 \ \Delta t_2 \ \Delta t_3]^T$ , 旋转矩阵  $\Delta \mathbf{R}$  的旋转方向为 O-X-Y-Z, 利用空间三维旋转矩阵求解。由于转站映射坐标系与主坐标系间是小偏转与小位移, 因此各轴的旋转角度都较小, 利用泰勒一阶展开对  $\Delta \mathbf{R}$  进行化简, 具体旋转矩阵为:

$$\Delta \mathbf{R} = \text{rot}(x) \cdot \text{rot}(y) \cdot \text{rot}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中:  $\text{rot}(x)$ ,  $\text{rot}(y)$ ,  $\text{rot}(z)$  分别为绕 X 轴、Y 轴、Z 轴旋转的旋转矩阵, 其表达式为:

$$\text{rot}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\text{rot}(y) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix},$$

$$\text{rot}(z) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

参数  $\Delta \mathbf{R}$ ,  $\Delta \mathbf{T}$  反应了多基站激光跟踪仪转站测量的精度, 其值与单体激光跟踪仪的随机测量误差与系统测量误差有关。令  $\mathbf{X}_i$  表示第  $i$  个公共点在转站坐标系下的理论值,  $\Delta \mathbf{x}_i$  表示第  $i$  个公共点转站坐标系下的系统测量误差,  $\mathbf{e}_i$  表示第  $i$  个点转站坐标系下的随机测量误差。则转站坐标系下的测量点可以表示为  $\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i + \Delta \mathbf{x}_i + \mathbf{e}_i$ 。令  $\bar{\mathbf{X}}_i$  表示第  $i$  个公共点在转站坐标系下多次测量的平均值,  $\bar{\mathbf{e}}_i$  表示随机测量误差的平均值, 因此  $\bar{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i + \Delta \mathbf{x}_i + \bar{\mathbf{e}}_i$ ;  $\bar{\mathbf{y}}_i$  表示第  $i$  个公共点在主坐标下多次测量的平均值,  $\Delta \mathbf{y}_i$  表示相应点的系统测量误差,  $\mathbf{e}\bar{\mathbf{y}}_i$  表示测量点多次测量的随机测量误差的平均值, 则  $\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_i + \mathbf{e}\bar{\mathbf{y}}_i$ 。

激光跟踪仪转站精度评价的方式一般是转站后对应公共点间的距离精度。由公式(4)可知, 理想点的转站公式为  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{X}_i + \mathbf{T}_0$ , 因此利用转站后转站映射坐标系下公共点与主坐标系下对应公共点间的距离进行转站精度评价, 则有:

$$W = \frac{1}{n} \sum_i^n \| (\mathbf{E} - \Delta \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} \cdot (\bar{\mathbf{X}}_i - \Delta \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{e}}_i) - \Delta \mathbf{T} + \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{y}_i - \mathbf{e}\bar{\mathbf{y}}_i \|_2, \quad (8)$$

其中:  $n$  代表公共点的个数。令  $W=0$ , 且根据随机测量误差服从均值为零的正态分布性质,  $\bar{\mathbf{e}}_i$ ,  $\mathbf{e}\bar{\mathbf{y}}_i$  的值可以近似为 0, 进一步化简公式(8)得到:

$$(\Delta \mathbf{R} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{R} \cdot (\bar{\mathbf{X}}_i - \Delta \mathbf{x}_i) + \Delta \mathbf{T}_i = \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{y}_i, \quad (9)$$

其中:  $\bar{\mathbf{X}}_i$  是第  $i$  个公共控制点坐标,  $\Delta \mathbf{x}_i$ ,  $\Delta \mathbf{y}_i$  表示对应第  $i$  个点的测量误差与激光跟踪仪自身测量系统有关, 可以通过标定激光跟踪仪得知;  $\mathbf{E}$  是单位矩阵;  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$  是初步转换矩阵, 是利用含有测量误差的公共点, 结合公式(5)得出的。因此公式中的未知量只有  $\Delta \mathbf{R}$ ,  $\Delta \mathbf{T}$ , 令  $\mathbf{P}_s = \mathbf{R} \cdot (\bar{\mathbf{X}}_i - \Delta \mathbf{x}_i) = [p_{11} \ p_{12} \ p_{13}]^T$ , 将公式(9)化简表示成转站参数误差与激光跟踪仪系统测量误差参数有关的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{13} & -p_{12} \\ -p_{13} & 0 & p_{11} \\ p_{12} & -p_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \\ \Delta t_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_x(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{bmatrix} dR_x \\ d\varphi_x \\ d\theta_x \end{bmatrix} - \mathbf{T}_y(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{bmatrix} dR_y \\ d\varphi_y \\ d\theta_y \end{bmatrix}. \quad (10)$$

公式(10)左边表示激光跟踪仪的转站参数误差, 公式右边表示激光跟踪仪的系统测量误差, 即激光跟踪仪转站精度相关参数  $\Delta \mathbf{R}$ ,  $\Delta \mathbf{T}$  与激光跟踪仪测量误差的关系。进一步可以在公式(5)的基础上建立基于激光跟踪仪系统测量误差的多基站转站补偿模型, 可表示为:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} (\bar{\mathbf{X}}_i - \Delta \mathbf{x}_i) + \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}. \quad (11)$$

将激光跟踪仪的随机测量误差引入公式(11), 最终建立基于单体激光跟踪仪测量误差的多基站转站误差补偿模型:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} - \mathbf{e}_i - \mathbf{T}_x(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{bmatrix} dR \\ d\varphi \\ d\theta \end{bmatrix} + \mathbf{T} + \begin{bmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \\ \Delta t_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中:  $(x_i, y_i, z_i)^T$  表示空间中任意点坐标,  $\mathbf{e}_i$  表示该点处激光跟踪仪的随机测量误差,  $\mathbf{T}_x(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$  表示激光跟踪仪的系统测量误差。经过补偿之后转站精度利用转站前后理想点与转站点间的距离进行评价,

化简之后的具体评价方式为:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i\|_2$ , 与激光跟踪仪的随机测量误差有关。由于激光跟踪仪的随机测量误差的规律性不可控,  $\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i$  可以通过多次测量求解平均值的方式减少激光跟踪仪随机测量误差的影响, 提高多基站激光跟踪仪的转站测量精度。

#### 4 计算机仿真实验

利用蒙特卡洛仿真验证单体激光跟踪仪测量误差对多基站转站测量精度的影响, 从而验证本文提出的转站误差模型的合理性和转站误差补偿模型的有效性。仿真实验内容为: 激光跟踪仪随机测量误差对转站误差的影响; 激光跟踪仪的随机测量误差和系统测量误差对转站精度的影响以及转站补偿模型精度的验证。

结合本文第二节中单体激光跟踪仪测量点误差产生的原因, 建立仿真实验中关于单体激光跟踪仪的系统测量误差  $\mathbf{X} = (dR, d\varphi, d\theta)^T$ 、随机测量误差  $\mathbf{e}$  的传递模型, 得到:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{P} + \mathbf{T}(\mathbf{R}, \varphi, \theta) \cdot \begin{pmatrix} dR \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix} + \mathbf{e} \quad (13)$$

确定单体激光跟踪仪测量误差的具体分布形式之后, 将标准公共点通过误差传递模型转换为含有误差的仿真公共点进行实验。公共点的理想坐标点如表 1 所示。

表 1 标准公共点坐标

Tab. 1 Standard coordinate values (mm)

站位	主坐标系			转站坐标系		
	x	y	z	x	y	z
1	3 000	0	0	5 000	2 000	0
2	-2 000	5 000	0	0	7 000	0
3	-2 000	0	5 000	0	2 000	5 000
4	-7 000	0	0	-5 000	2 000	0
5	-2 000	0	0	0	2 000	0

##### 4.1 随机测量误差对转站精度的影响

为了分析激光跟踪仪随机误差对转站精度的

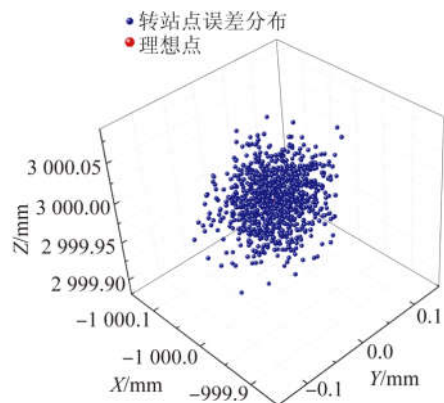
具体影响, 根据莱卡 AT960-MR 型激光跟踪仪的出厂标定精度, 仿真实验中设定长度随机测量误差为  $1 \mu\text{m}/\text{m}$ , 角度测量精度为  $5 \mu\text{m} + 6 \mu\text{m}/\text{m}$ , 误差分布模型为正态分布。将随机测量误差注入到表 1 中的标准公共点坐标中, 重复 1 000 次生成大量样本。求解每次注入随机误差后的转站参数, 利用该参数求解表 2 中标准点的转站结果并与理想转站点相比, 其中点(1 000, 2 000, 3 000)的仿真结果如图 4 所示(彩图见期刊电子版)。

表 2 任意空间点坐标

Tab. 2 Measuring point coordinates (mm)

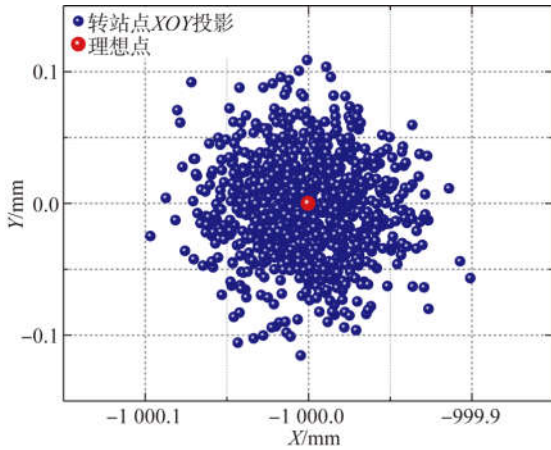
编号	x	y	z
1	0	4 000	0
2	1 000	2 000	3 000
3	2 000	2 000	0
4	3 000	4 000	5 000
5	4 000	1 000	0

从图 4 得, 利用含有随机测量误差的转站参数求解空间点(1 000, 2 000, 3 000)时, 其相应转站点相对于理想点(-1 000, 0, 3 000)离散随机分布。转站点的点云重心(-1 000.001, -0.003, 3 000.001)与理想点的偏移量为 0.003 mm。虽然点云重心偏移量相对理想点较小, 但图 4(b)~4(d)显示转站点在各个方向上的最大偏差可达到 0.1 mm。激光跟踪仪的随机测量误差对转站精度的影响可以通过多次测量求解平均值的方式进行消减。



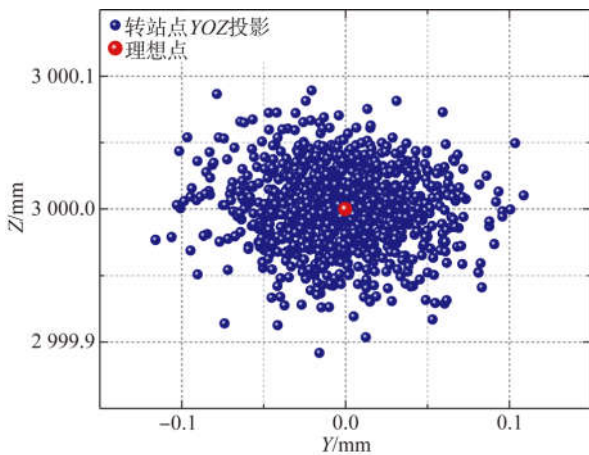
(a) 转站点空间分布

(a) Distribution of spatial points



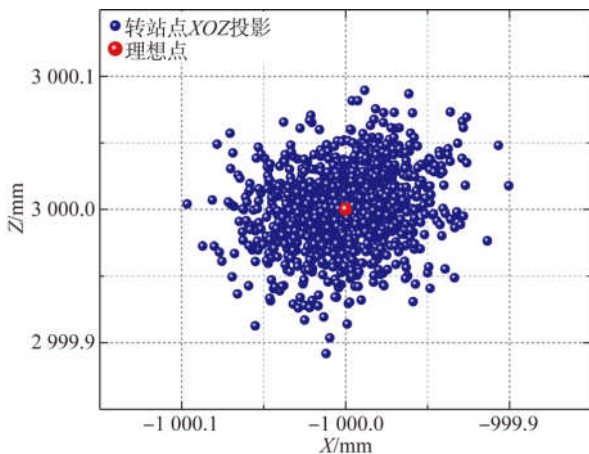
(b)转站点 XOY 平面投影

(b)Spatial point projection in XOY plane



(c)转站点 YOZ 平面投影

(c)Spatial point projection in YOZ plane



(d)转站点 XOZ 平面投影

(d)Spatial point projection in XOZ plane

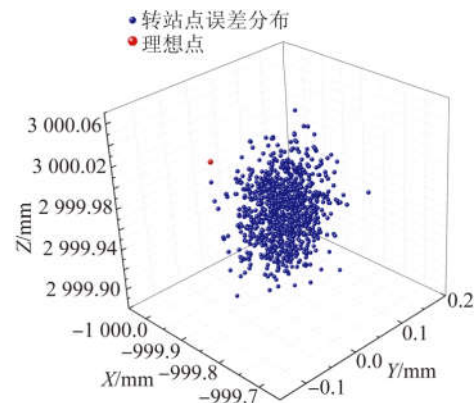
图 4 随机误差条件下转站点分布仿真

Fig. 4 Simulated distribution of station-transfer error under random error conditions

### 4.2 随机误差与系统测量误差对转站精度的影响

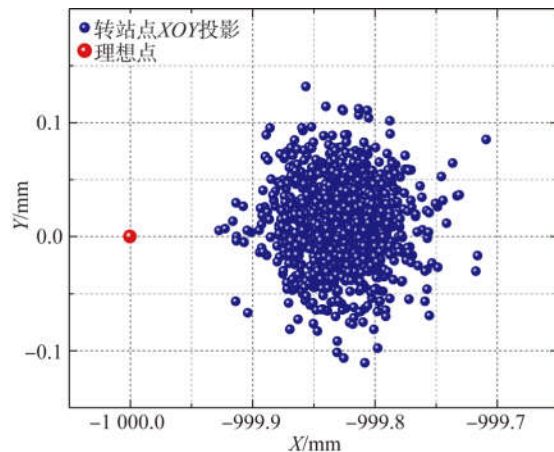
根据系统测量误差重复性和单向性的特点,为了更加明确地分析转站点云的变动情况,采用随机测量误差与系统测量误差相结合的方式进仿真实验。根据系统误差单向性的特点以及 AT960 激光跟踪仪的出厂精度,设定长度系统误差为  $0.5 \mu\text{m}/\text{m}$ ,角度系统误差为  $5 \mu\text{m}+6 \mu\text{m}/\text{m}$ ,长度随机测量误差为  $1 \mu\text{m}/\text{m}$ ,角度测量精度为  $5 \mu\text{m}+6 \mu\text{m}/\text{m}$ ,仿真结果如图 5 所示。

图 5 中公共点同时存在随机测量误差和系统测量误差时,转站点偏离理想转站点一定距离,并且随机误差的存在使得转站误差随机离散。转站点的点云重心坐标  $(-999.827, 0.0117, 2999.9787)$ 与理想转站点  $(-1000, 0, 3000)$ 相比,偏移量为  $0.1747 \text{ mm}$ 。由此表明,激光跟踪仪系统测量误差对转站精度的影响较大。



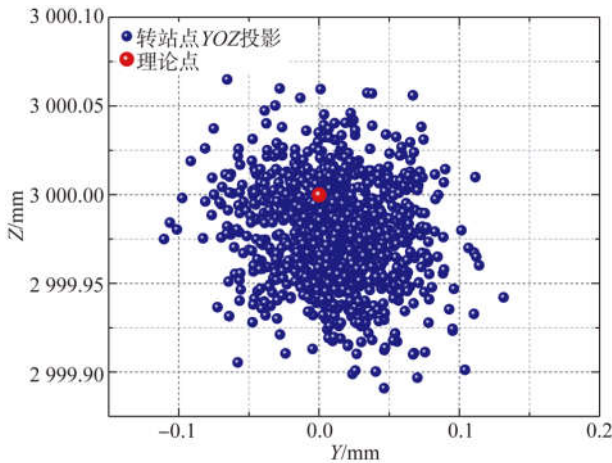
(a)综合测误差下转站点空间分布图

(a)Distribution of spatial points



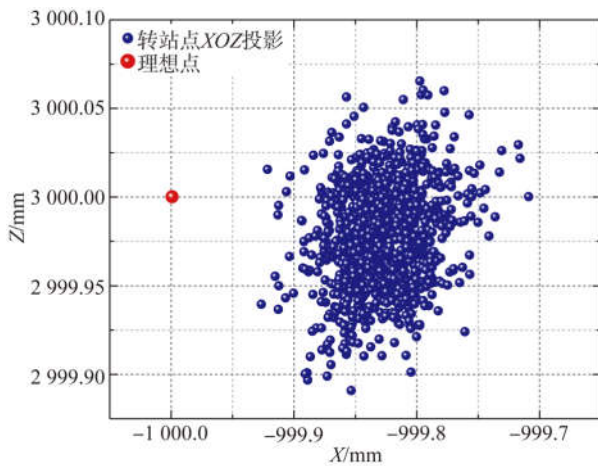
(b)转站点在 XOY 平面投影

(b)Spatial point projection in XOY plane



(c) 转站在 YOZ 平面投影

(c) Spatial point projection in YOZ plane



(d) 转站在 XOZ 平面投影

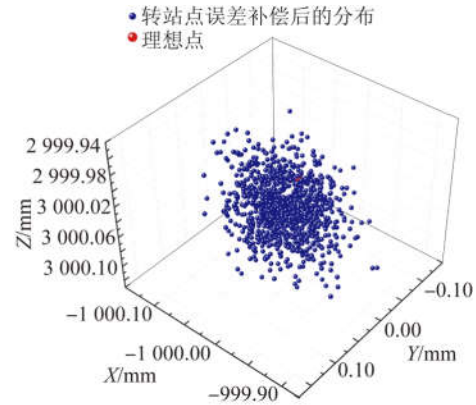
(d) Spatial point projection in XOZ plane

图 5 综合测量误差转站点分布图

Fig. 5 Distribution of station-transfer error under random and systematic measurement errors

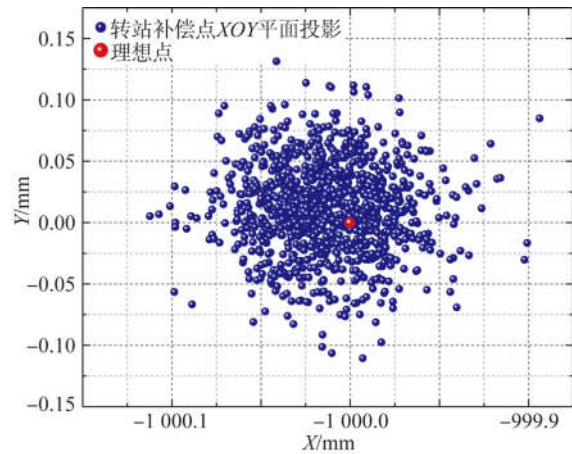
### 4.3 转站补偿模型精度验证

为了验证本文提出的激光跟踪仪转站补偿方法的合理性,在测量点同时含有随机测量误差和系统测量误差的情况下,利用本文第三节中的方法进行补偿模型有效性的验证。首先根据已有公共点求解初步转站参数  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{T}$ ,利用公式(10)进一步解得每组公共点对应的  $\Delta\mathbf{R}$  和  $\Delta\mathbf{T}$ ,进而根据公式(11)得到补偿后的转站结果。图 6 是利用空间公共点转站坐标系下坐标(1 000, 2 000, 3 000),主坐标系下理想坐标(-1 000, 0, 3 000)的具体结果。



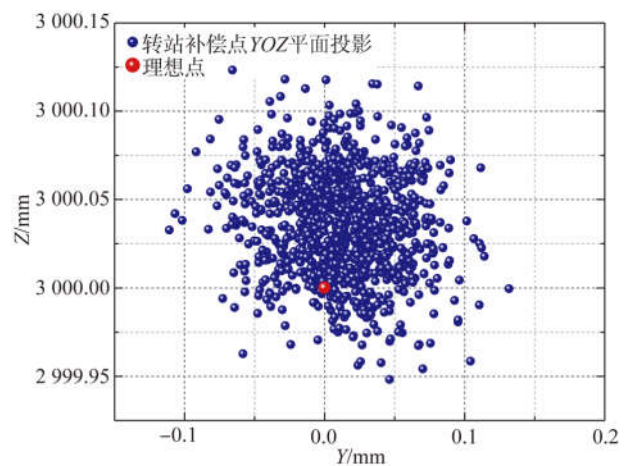
(a) 补偿后转站点空间分布

(a) Distribution of spatial points after station-transfer error compensation



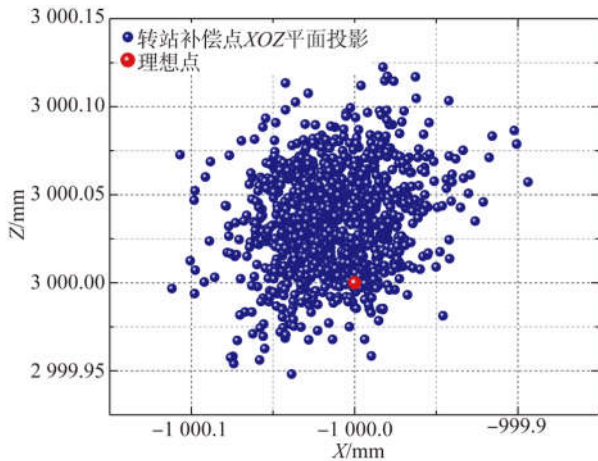
(b) 补偿点 XOY 平面投影

(b) Spatial point projection in XOY plane



(c) 补偿点 YOZ 平面投影

(c) Spatial point projection in YOZ plane



(d) 补偿点 XOZ 平面投影

(d) Spatial point projection in XOZ plane

图 6 转站补偿误差分布

Fig. 6 Distribution of station-transfer errors after compensation

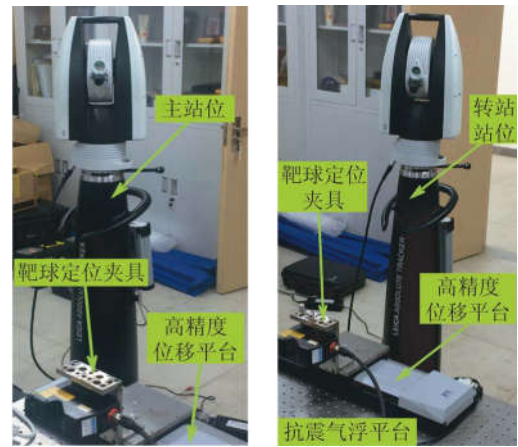
图 6 中,激光跟踪仪的随机测量误差不具有可补偿规律性,因此补偿后的图形与图 4 相近。点云重心为(-1 000.012 1,0.011 9,3 000.036 0),与理想点(-1 000,0,3 000)的偏差为 0.040 mm。与综合误差仿真实验得到的转站误差 0.174 7 mm 相比,补偿后转站精度提高了 77%。与随机误差仿真实验相比,转站补偿点不能与理想点完全重合,分析认为:激光跟踪仪的系统测量误差由于补偿算法的简化而不能完全消除。

### 5 激光跟踪仪分时转站实验

本文搭建了激光跟踪仪分时转站实验平台,如图 7 所示,靶球定位夹具安放在定位精度为 0.1  $\mu\text{m}$ 、移动范围为 200 mm 的直线平移台上,组成公共点控制平台。整个控制平台安放在气浮隔振平台上,以减少外界干扰对实验过程的影响。实验所用激光跟踪仪为莱卡 AT 960-MR 型激光跟踪仪,其有效测量量程为 20 m,出厂标称精度如下:激光测距精度为 0.5  $\mu\text{m}/\text{m}$ ,角度测量精度为 5  $\mu\text{m}$  + 6  $\mu\text{m}/\text{m}$ ,整体累计测量误差为 15  $\mu\text{m}$  + 6  $\mu\text{m}/\text{m}$ 。

实验利用 2 个偏置分别为 10 mm 和 12 mm 的靶球靶座,分别安装在夹具上任意 2 个定位孔中,在夹具的水平支撑面上安装另外一个靶球靶座,组成转站控制空间公共点。控制位移平台以 20 mm 的步距进行移动定位,总体可以获取 15 个空间公共点。在气浮隔震平台上的其他位置固定 3 个激光跟踪仪靶球作为任意的空间转站测试点,用以验证激光跟踪仪的转站精度。实验中移

动 2 次激光跟踪仪进行分时转站实验,即建立 2 个测量站位,公共点测量值如表 3 和表 4 所示,转站测试点的测量值如表 5 所示。



(a) 主测量站位

(b) 转站测量站位

(a) Main station

(b) Transfer station

图 7 激光跟踪仪分时转站实验装置

Fig. 7 Instrument of laser tracker time-sharing station-transfer experiment

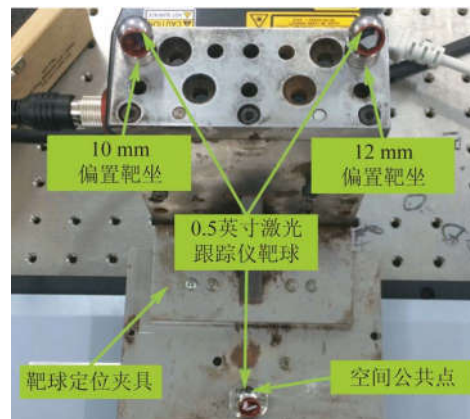


图 8 公共点分布

Fig. 8 Distribution of common points

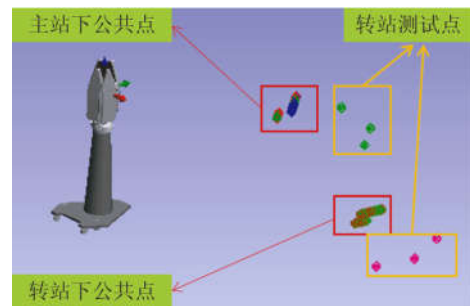


图 9 转站测量

Fig. 9 Station-transfer measurement

对表 3 和表 4 中的公共点,结合公式(5)利用最小二乘法求解两个站位之间的基础转站参数,求得基本转站参数为:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.645\ 5 & 0.763\ 9 & 0.001\ 5 \\ -0.763\ 9 & 0.645\ 5 & 0.001\ 1 \\ -0.000\ 2 & -0.001\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 674.041\ 8 \\ -174.441\ 0 \\ -2.761\ 4 \end{bmatrix}.$$

表 3 主坐标系下公共点测量值

Tab. 3 Common point coordinates in base coordinate frame

(mm)

站位	偏置 10 mm			偏置 12 mm			空间点		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	2 058.052 1	853.699 3	-423.132 5	2 047.556 5	773.812 8	-425.370 3	1 939.206 6	821.067 8	-542.496 5
2	2 053.222 3	813.990 7	-423.272 3	2 042.731 2	734.103 3	-425.504 6	1 934.378 8	781.360 4	-542.628 8
3	2 050.811 0	794.136 7	-423.346 2	2 040.317 2	714.250 6	-425.574 8	1 931.965 0	761.508 4	-542.704 5
4	2 048.398 0	774.288 1	-423.417 0	2 037.903 4	694.402 7	-425.645 5	1 929.542 9	741.652 0	-542.774 3
5	2 045.986 5	754.430 6	-423.482 7	2 035.491 7	674.546 1	-425.711 6	1 927.133 6	721.797 0	-542.845 8

表 4 转站坐标系下公共点测量值

Tab. 4 Common coordinates in transfer station frame

(mm)

站位	偏置 10 mm			偏置 12 mm			空间点		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	108.124 0	1 721.504 2	-417.153 4	162.364 4	1 661.921 2	-419.493 9	56.351 0	1 609.884 0	-536.737 8
2	135.341 8	1 692.186 6	-417.338 4	189.581 9	1 632.605 1	-419.677 6	83.567 5	1 580.566 6	-536.925 8
3	148.947 3	1 677.529 3	-417.430 0	203.190 3	1 617.950 4	-419.772 5	97.174 5	1 565.908 1	-537.015 7
4	162.554 8	1 662.869 1	-417.523 1	216.797 7	1 603.292 8	-419.862 8	110.784 5	1 551.252 1	-537.109 4
5	176.163 6	1 648.215 5	-417.617 8	230.405 1	1 588.632 3	-419.955 2	124.390 9	1 536.595 0	-537.201 2

表 5 转站测试点测量值

Tab. 5 Test point coordinates of transfer station

(mm)

结果	主站位			转站		
	x	y	z	x	y	z
1	2 387.200 8	1 090.841 7	-590.093 7	139.502 4	2 126.266 9	-583.367 3
2	2 589.332 4	712.943 9	-588.928 0	558.597 1	2 036.751 7	-582.268 0
3	2 545.791 6	394.046 7	-590.232 4	774.072 3	1 797.680 2	-583.956 4

利用初步获得的激光跟踪仪转站参数,对表 5 中空间转站测试点进行转站计算,以转站后

对应点间的距离作为转站精度评价,具体转站测量结果如表 6 所示。

表 6 转站测量结果

Tab. 6 Results of transfer station measurement

(mm)

转站结果	测试点 1		测试点 2		测试点 3	
	站位	转站值	站位	转站值	站位	转站值
$x$	2 387.200 8	2 387.204 0	2 589.332 4	2 589.347 9	2 545.791 6	2 545.828 6
$y$	1 090.841 7	1 090.821 4	712.943 9	712.944 4	394.046 7	394.052 6
$z$	-590.093 7	-590.107 7	-588.928 0	-588.913 1	-590.232 4	-590.193 3
误差评价	0.024 9		0.021 5		0.054 2	

此实验条件下,激光跟踪仪主测量站位(主坐标系)公共点的系统测量误差为  $0.5 \times (0.5 \mu\text{m}/\text{m}, (5+6) \mu\text{m}/\text{m}, (5+6) \mu\text{m}/\text{m})^T \times R(\bar{X}_i)$ , 其中  $R(\bar{X}_i)$  表示公共点在球坐标系下的距离;转站站位(转站坐标系)公共点的系统测量误差为

$$\Delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2.888\ 5 \times 10^{-6} & -6.617\ 9 \times 10^{-7} \\ -2.888\ 5 \times 10^{-6} & 1 & -1.233\ 0 \times 10^{-6} \\ 6.617\ 9 \times 10^{-7} & 1.233\ 0 \times 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.004\ 6 \\ 0.004\ 3 \\ -0.005\ 1 \end{bmatrix}.$$

利用前文提出的转站误差修正模型对表 6 中的转站值进行修正,转站补偿结果如表 7 所示。实验结果表明,利用文中提出的转站补偿算法可以提高激光跟踪仪转站精度,由表 7 中计算结果可知转站精度提升均值在 40% 左右。实验补偿结果相比仿真结果在转站精度提升趋势上大致吻

合。但仿真实验转站误差大于实验转站误差,其原因一方面是仿真实验的公共点分布范围更大,激光跟踪仪的累计误差明显;另一方面是仿真实验中设置的测量误差大于实际测量过程中的系统误差,因此仿真实验转站误差明显,转站误差补偿明显。

表 7 转站误差补偿结果

Tab. 7 Compensation result of transfer station

(mm)

转站结果	测试点 1		测试点 2		测试点 3	
	站位	转站值	站位	转站值	站位	转站值
$x$	2 387.200 8	2 387.195 0	2 589.332 4	2 589.332 6	2 545.791 6	2 545.807 5
$y$	1 090.841 7	1 090.833 1	712.943 9	712.952 1	394.046 7	394.073 2
$z$	-590.093 7	-590.0829 9	-588.928 0	-588.926 9	-590.232 4	-590.220 4
误差评价	0.014 8(提升 40.6%)		0.008 4(提升 60.9%)		0.033 1(提升 38.9%)	

## 6 结 论

本文建立了单台激光跟踪仪单站位测量误差与多基站转站参数求解精度的关联模型,在分析激光跟踪仪随机测量误差和系统测量对多基站激光跟踪仪转站测量精度影响的基础上,建立了基

于单台激光跟踪仪测量误差的多基站转站参数补偿模型。该模型揭示了激光跟踪仪转站过程中公共点测量误差以及单台激光跟踪仪系统测量误差对激光跟踪仪转站精度的影响,通过误差补偿与优化的方式解除了公共点的分布形式与范围对多基站激光跟踪仪转站测量精度的限制,即当被转站处于公共点分布空间范围外(超出公共点包

络原则)时,也可以获得较高的激光跟踪仪转站测量精度。通过蒙特卡洛仿真实验验证了激光跟踪仪的随机和系统两种测量误差对转站精度的影响,利用本文提出的补偿模型可以实现转站误差

补偿,补偿之后多基站激光跟踪仪的转站测量精度提升 77%。激光跟踪仪分时多基站转站实验表明,利用本文提出的转站补偿模型,转站测量精度平均提高了 40%左右。

### 参考文献:

- [1] 杨占立,范百兴,西勤,等.基于空间平面 TLS 算法的跟踪仪动态测量精度分析 [J]. 测绘地理信息, 2017,42(5):42-45.  
YANG ZH L, FAN B X, XI Q, *et al.*. Accuracy assessment of dynamic measurement from laser tracker based on TLS algorithm [J]. *Journal of Geomatics*, 2017, 42(5): 42-45. (in Chinese)
- [2] 樊印久,张福民,曲兴华,等.海洋工程装备制造现场大尺寸组网测量 [J]. 电子测量与仪器学报, 2017,31(3):369-376.  
FAN Y J, ZHANG F M, QU X H, *et al.*. Large-scale network measurement in the field of marine engineering equipment manufacturing [J]. *Journal of Electrounig Measurement and Instrumnetation*, 2017, 31(3): 369-376. (in Chinese)
- [3] 范晓龙,刘韶光,范欢欢.一种基于激光跟踪仪的大飞机外形测绘建模方法 [J]. 航空制造技术,2016(14):69-74.  
FAN X L, LIU SH G, FAN H H. Large aircraft shape modeling technology from surveying and mapping based on laser tracker [J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2016(14): 69-74. (in Chinese)
- [4] 张皓琳,林嘉睿,郝继贵.三维坐标转换精度及其影响因素的研究 [J]. 光电工程,2012,39(10):26-31.  
ZHANG H L, LIN J R, ZHU J G. Three-dimensional coordinate transformation accuracy and its influencing factors [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2012, 39(10): 26-31. (in Chinese)
- [5] 林嘉睿,郝继贵,张皓琳,等.激光跟踪仪测角误差的现场评价 [J]. 仪器仪表学报,2012,33(2):463-468.  
LIN J R, ZHU J G, ZHANG H L, *et al.*. Field evaluation of laser tracker angle measurement error [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2012, 33(2): 463-468. (in Chinese)
- [6] 金涨军,李江雄,俞慈君,等.大尺寸空间测量中转站误差分析与估计 [J]. 浙江大学学报:工学版, 2015,49(4):655-661.  
JIN ZH J, LI J X, YU C J, *et al.*. Registration error analysis and evaluation in large-volume metrology system [J]. *Journal of Zhejiang University: Engineering Science*, 2015, 49(4):655-661. (in Chinese)
- [7] ZHAO G, ZHANG C, JING X, *et al.*. Station-transfer measurement accuracy improvement of laser tracker based on photogrammetry [J]. *Measurement*, 2016, 94: 717-725.
- [8] 孙海丽,姚连璧,周跃寅,等.激光跟踪仪测量精度分析 [J]. 大地测量与地球动力学,2015,35(1):177-181.  
SUN H L, YAO L B, ZHOU Y Y, *et al.*. Analysis of measurement accuracy of laser tracker [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2015, 35(1): 177-181. (in Chinese)
- [9] 卢荣胜,李万红,劳达宝,等.激光跟踪仪测角误差补偿 [J]. 光学精密工程,2014,22(9):2299-2305.  
LU R SH, LI W H, LAO D B, *et al.*. Angular error compensation of laser tracker [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(9): 2299-2305. (in Chinese)
- [10] 林嘉睿,孟伟,杨凌辉,等.激光跟踪仪的双面互瞄定向 [J]. 光学精密工程,2017,25(10):2752-2758.  
LIN J R, MENG W, YANG L H, *et al.*. Two face reciprocal orientation for laser tracker [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2017, 25(10): 2752-2758. (in Chinese)
- [11] 刘力,陈新东,熊玲,等.大口径非球面镜检测中激光跟踪仪测角误差研究 [J]. 中国激光,2016,43(11):160-170.  
LIU L, CHEN X D, XIONG L, *et al.*. Angle error investigation in laser tracker testing large aspheric mirrors [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2016, 43(11): 160-170. (in Chinese)
- [12] ACERO R, SANTOLARIA J, PUEO M, *et al.*. Verification of a laser tracker with an indexed metrology platform [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2016, 84(1-4): 595-606.
- [13] 尹寿宝.总装精测提高激光跟踪仪转站精度的方法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2016.  
YI SH S. *Research on Techniques of Improving Measuring Accuracy of Laser Tracker Orientation in Gener-*

- al Assembly Precision Measurement* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016. (in Chinese)
- [14] 宋凯. 大尺寸三坐标测量转站热变形误差补偿优化技术研究[D]. 杭州:浙江大学,2016.  
SONG K. *Research on the Error Compensation Technology of the Large Size Three Coordinate Measuring Orientation* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016. (in Chinese)
- [15] 金正琪. 提高激光跟踪仪转站测量精度的技术研究[D]. 杭州:浙江大学,2013.  
JIN ZH Q. *Research on Technology of Improving Measuring Accuracy in Laser Tracker Orientation* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013. (in Chinese)
- [16] 张滋黎,朱涵,周维虎. 激光跟踪仪转镜倾斜误差的标定及修正 [J]. 光学精密工程,2015, 23(5): 1205-1212.  
ZHANF Z L, ZHU H, ZHOU W H. Error calibration and correction of mirror tilt in laser trackers [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(5): 1205-1212. (in Chinese)
- [17] 刘万里,欧阳健飞,曲兴华. 激光光束入射角度变化对圆锥棱镜测量精度的影响 [J]. 光学精密工程,2009,17(2):286-291.  
LIU W L, OUYANG J F, QU X H. Effect of incident laser beam angle varying on cube corner retro-reflector measurement accuracy [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(2):286-291. (in Chinese)
- [18] 安其昌,张景旭,杨飞,等. GSSMP转动精度的测量与标定 [J]. 红外与激光工程,2018, 47(9):257-263.  
AN Q CH, ZHANG J X, YANG F, *et al.*. Metrology and calibration of GSSMP rotation accuracy [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47(9):257-263. (in Chinese)
- [19] 吴斌,许友,杨峰亭,等. 激光跟踪仪绝对测长多边法三维坐标测量系统 [J]. 红外与激光工程,2018, 47(8):140-145.  
WU B, XU Y, YANG F T, *et al.*. 3D coordinate measuring system based on laser tracking absolute length measurement multilateral method [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47(8):140-145. (in Chinese)
- [20] 李丽娟,赵延辉,林雪竹. 加权整体最小二乘在激光跟踪仪转站中的应用 [J]. 光学精密工程,2015,23(9):2570-2577.  
LI L J, ZHAO Y H, LIN X ZH. Application of WTLS in coordinate transformation of laser tracker [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(9):2570-2577. (in Chinese)

## 作者简介:



李 辉(1992—),男,河南商丘人,硕士研究生,2015年于石家庄铁道大学获得学士学位,主要从事激光跟踪仪测量及机器视觉等方面的研究。E-mail: lihui577372905@mail.dlut.edu.cn

## 导师简介:



刘 巍(1979—),男,内蒙赤峰人,博士,教授,博士生导师,2007年于大连理工大学获得博士学位,主要从事精密测量、精密控制、微执行器、微机器人等方面的研究。E-mail: lw2007@dlut.edu.cn