

文章编号 1004-924X(2016)07-1703-08

## 椭圆弧柔性铰链刚度简化计算及优化设计

付锦江<sup>1,2\*</sup>, 颜昌翔<sup>1</sup>, 刘伟<sup>1</sup>, 袁婷<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学, 北京 100039)

**摘要:** 本文主要研究了椭圆弧柔性铰链刚度的优化设计方法。首先, 针对椭圆弧柔性铰链刚度计算公式过于复杂的问题, 采用幂函数非线性曲线拟合的方法, 推导了椭圆弧柔性铰链刚度的近似理论计算公式。然后, 基于近似理论计算公式, 分析了柔性铰链的精度特性及工作时的最大应力; 采用 GlobalSearch 全域优化指令和 Fmincon 局域优化指令对椭圆弧柔性铰链工作方向的最大刚度进行了优化设计。最后, 采用有限元仿真和实验验证的方法证实近似理论计算公式的适用性和优化结果的可靠性。验证显示: 实验结果与近似理论计算结果的相对误差小于 5%, 表明提出的方法不仅省去了繁杂的有限元模型建立以及计算和修改的过程, 大大提高了设计效率; 而且通过优化计算可以得到椭圆弧柔性铰链的最大刚度。

**关键词:** 椭圆弧柔性铰链; 转动刚度; 刚度计算; 非线性曲线拟合; 优化设计; 有限元分析

**中图分类号:** TH131 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20162407.1703

## Stiffness calculation and optimal design of elliptical flexure hinges

FU Jin-jiang<sup>1,2\*</sup>, YAN Chang-xiang<sup>1</sup>, LIU Wei<sup>1</sup>, YUAN Ting<sup>1,2</sup>

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

\* Corresponding author, E-mail: ytfjj17@tom.com

**Abstract:** An optimization design method for elliptical flexure hinges is researched. As the traditional calculation formula for the stiffness of elliptical flexure hinges is more complex, this paper deduces an approximate theoretical formula by nonlinear fitting method with power function. Based on the approximate theoretical formula, it analyzes the precision characteristics of the flexure hinges and their maximum stresses at working. Then, the global optimization solver GlobalSearch and local optimization solver Fmincon are used to design optimally the maximum stiffness of an elliptical flexure hinge at a working direction. Finally, the applicability of the approximate theoretical calculation equation and the accuracy of the optimization results are assessed by comparison with the results from finite element analysis and experimental data. The results show that the relative errors between the finite element simulation, experimental data and the approximate theoretical calculation for the stiffness of elliptic hinge are within 5%. It concludes that the method avoids establishing the complex finite element mode and the processes of calculation and modification, and greatly improves the design efficiency. Moreover, it can obtain the maximum stiffness of the elliptical flexure hinges by optimization

收稿日期: 2015-11-12; 修订日期: 2015-12-15.

基金项目: 国家 863 高新技术发展资助(No. 2011AA12A103); 中国地质调查局工作项目支持(No. 1212011120227)

calculation.

**Key words:** elliptical flexure hinge; rotation stiffness; stiffness calculation; nonlinear curve fitting; optimization design; finite element analysis

## 1 引言

柔性铰链在实际使用时集成在两个刚体之间,通过材料的弹性变形,作为旋转运动副而实现刚体运动的传递。因其具有加工简单、无机械摩擦、无间隙、高精度和免组装等优点而受到光学结构研究人员的重视,被广泛应用于精密机器人,装配及高精度位移平台,如柔性关节爬行机器人<sup>[1]</sup>,柔性探头微夹持器<sup>[2]</sup>,高精度、高速率的 XY 位移平台<sup>[3]</sup>和压电驱动位移平台<sup>[4]</sup>等领域。

影响柔性铰链工作性能的因素主要包括 3 个方面:刚度,运动行程和工作时的最大应力。国内外众多学者对柔性铰链准静态性能的研究较多,1965 年,Paros 和 Weisbord<sup>[5]</sup>最早根据欧拉-伯努利梁理论推导出圆弧型柔性铰链刚度计算的精确和近似理论计算公式;Tseytlin<sup>[6]</sup>通过对圆弧型轮廓采用逆保角映射推导出了圆弧型柔性铰链刚度计算公式,与 Paros 和 Weisbord 推导的理论公式相比,其结果与实验结果的误差更小;Wu<sup>[7]</sup>在 2004 年推导出了相对简单又准确的圆弧型柔性铰链的刚度计算公式;LOBONTIU<sup>[8]</sup>等推导了抛物线和双曲线的柔度,精度及应力特性;RYU<sup>[9]</sup>等人分析了机械加工误差对柔性铰链性能的影响;Chen<sup>[10]</sup>等人在 2014 年通过有限元的方法得到了切口型柔性铰链的应力集中系数的经验计算公式。根据凹口曲线类型不同,柔性铰链又分为圆弧型,椭圆弧型,抛物线型,双曲线型,V 型及其各种混合型等。SMITH<sup>[11]</sup>等人研究了椭圆弧柔性铰链的刚度计算式;Tian<sup>[12]</sup>等人研究了 V 型倒角柔性铰链等;近些年混合型柔性铰链的研究也比较多如:LOBONTIU 等人研究了圆角抛物线混合型<sup>[13]</sup>,倒圆角直梁型<sup>[14]</sup>;Lin<sup>[15]</sup>等人研究了一边为双曲线,另一边为倒圆角的混合不对称柔性铰链的性能;Chen<sup>[16]</sup>研究了椭圆弧倒角直梁柔性铰链。

目前国内外对柔性铰链的分析大多集中于刚度,精度及应力的分析,对柔性铰链的优化设计比较少;Chen<sup>[17]</sup>采用粒子群遗传算法对椭圆弧柔性铰链的柔度进行了优化;Bona 等<sup>[18]</sup>和 Zelenika 等<sup>[19]</sup>都基于参数化有限元模型的方法分别对柔性

机械进行了刚度优化设计和对柔性铰链进行了自由形状优化;2011 年,北京理工大学的 Xie<sup>[20]</sup>采用有限元方法进行了圆弧型柔性铰链的优化设计,优化后全柔性五杆机构的柔度增大,满足优化要求。

虽然 SMITH 和 Chen 等对椭圆弧柔性铰链都进行了研究,推导出了其刚度计算公式,但其计算公式都比较复杂,不利于椭圆弧柔性铰链的优化计算;目前柔性铰链的优化设计大多集中于柔性铰链的数值仿真计算,过程比较复杂,不利于工程应用。针对椭圆弧柔性铰链刚度计算公式过于复杂的问题,本文采用非线性曲线拟合的方法得出了椭圆弧柔性铰链工作方向刚度近似理论计算公式,进一步推导出了椭圆弧柔性铰链许用应力和精度的近似理论计算式;然后,综合考虑材料的许用应力和铰链的精度要求,采用 Matlab 软件进行椭圆弧柔性铰链工作方向最大刚度的优化设计;最后,通过有限元仿真和实验验证了近似理论计算公式的适用性和优化结果的准确性。借助于近似理论计算公式,采用 Matlab 进行刚度优化,大大提高了设计效率,省去了繁杂的有限元模型建立,计算和修改的过程,且通过优化计算可以得到椭圆弧柔性铰链最大刚度。

## 2 椭圆弧柔性铰链性能分析

### 2.1 椭圆弧柔性铰链工作方向刚度

图 1 所示为弓形椭圆弧柔性铰链在  $z=0$  平面内的示意图,弓形圆心角为  $\varphi_{\max}$ ,左端固定,右端自由,长半轴为  $a$ ,短半轴为  $b$ ,宽度为  $w$ ,最小切割厚度为  $t$ 。

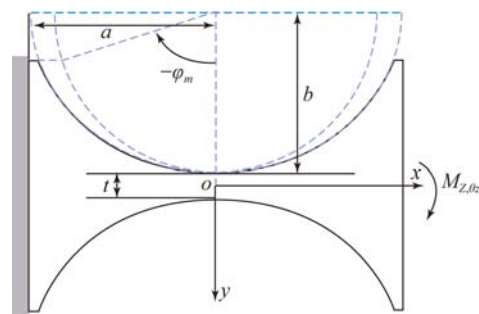


图 1 椭圆弧柔性铰链参数及坐标系

Fig. 1 Parameters and coordinates of elliptic cross section

z 轴为柔性铰链的输入轴,当  $\varphi_m = \pi/2$  时,柔性铰链为正椭圆柔性铰链,根据文献[10]可知,式(1)是椭圆弧柔性铰链工作方向上转动刚度的理论计算公式,其计算比较准确,但过于复杂,不便于椭圆弧柔性铰链的优化设计:

$$\delta_{\theta_z, M_z} = \frac{12a}{E\omega t^2} \cdot$$

$$\frac{(12s^2 + 8s + 2)\sqrt{4s+1} + 12s(2s+1)^2 \arctan \sqrt{4s+1}}{(4s+1)^{5/2}(2s+1)},$$

令

$$f = \frac{(12s^2 + 8s + 2)\sqrt{4s+1} + 12s(2s+1)^2 \arctan \sqrt{4s+1}}{(4s+1)^{5/2}(2s+1)}$$

$$\Rightarrow \delta_{\theta_z, M_z} = \frac{12a}{E\omega t^3} \cdot f \Rightarrow K_{\theta_z, M_z} = \frac{E\omega t^3}{12af}, \quad (1)$$

式中:  $a$  为椭圆弧柔性铰链的长半轴;  $\omega$  为椭圆弧柔性铰链的宽度;  $E$  为材料的弹性模量;  $t$  为柔性铰链的最小切割厚度;  $s = b/t$ ,  $b$  为椭圆弧柔性铰链的短半轴;  $K_{\theta_z, M_z}$  为柔性铰链准确计算的工作刚度。

### 2.2 转动刚度近似理论计算公式的推导

式(1)中的  $f$  函数过于复杂,采用非线性曲线拟合的方法,对  $f$  函数进行化简,可以得到转动刚度的近似理论计算公式,曲线拟合优度采用残差平方和(SSE),判定系数(R-Square),调整的判定系数(Adjusted R-Square),均方根误差(RMSE)和残差( $\hat{\epsilon}_i$ )分布图进行判定,残差平方和,均根误差,残差越接近于 0,判定系数和调整的判定系数越接近 1,则曲线拟合程度越好,各参数的计算公式为:

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i, SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2},$$

$$Adjusted.. R^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p-1},$$

$$RMSE = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

式中:  $y_i$  表示实验值;  $\hat{y}_i$  表示预测值;  $\bar{y}_i$  表示实验平均值;  $n$  表示实验值数目;  $p$  表示自变量数目;  $\hat{\epsilon}_i$  表示残差。

对  $f$  函数进行非线性拟合,拟合结果和残差分布如图 2 所示,分别进行了幂函数拟合,指数拟合,二次多项式拟合和三次多项式拟合。

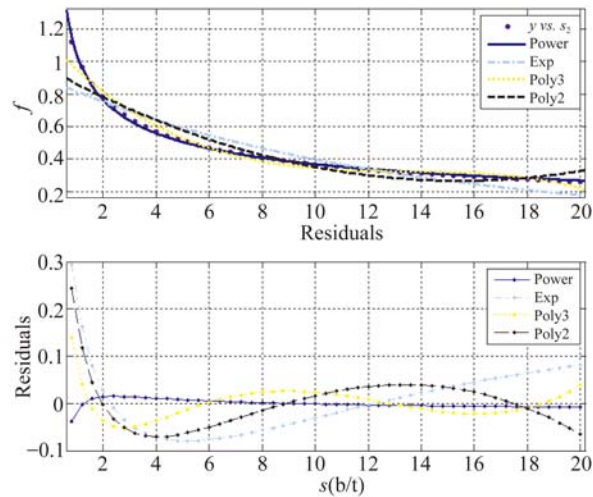


图 2 曲线拟合及残差分布图

Fig. 2 Figure of fitting curve and residuals

由残差图分布可知,对  $f$  函数进行幂函数拟合所得结果最为合理,最大残差小于 0.05。由图 2 可知:  $f$  函数采用幂函数拟合方式拟合效果最佳,拟合得到的函数为:

$$f' = ms^n = 1.122s^{-0.485}. \quad (3)$$

为使拟合函数更为简洁,取拟合函数系数  $m = 1.15, n = -0.5$ ,得到近似拟合函数:

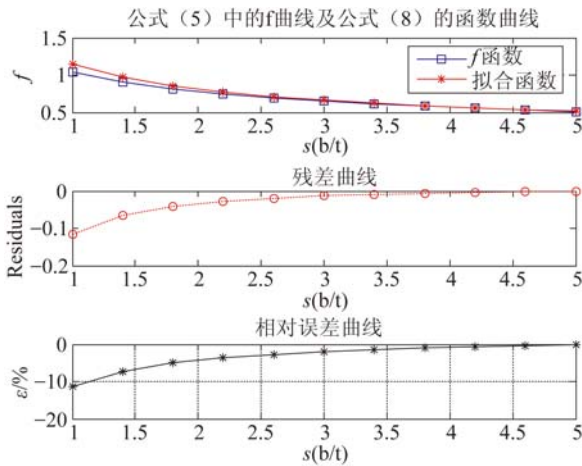
$$f'' = ms^n = 1.15s^{-1/2}. \quad (4)$$

图 3 所示为  $f$  函数曲线,拟合函数曲线  $f''$ , 残差曲线及近似拟合函数相对函数  $f$  的相对误差曲线,由图 3 可知,相对误差随着  $s$  的变化而变化,当  $s < 2$  时,相对误差大于 4%,当  $s > 4$  时,相对误差小于 1%,曲线拟合度好,近似拟合函数拟合优度评价参数结果如表 1 所示。

表 1 函数拟合评价参数表

Tab. 1 Evaluation parameters for kinds of nonlinear curve fitting

函数名称	SSE	R-Square	Adjusted R-Square	RMSE
Power1 (幂函数)	0.003 8	0.997 9	0.997 8	0.009 0
Exp1 (指数函数)	0.248 4	0.859 3	0.856 3	0.072 7
Poly2 (二次多项式)	0.144 1	0.918 4	0.914 8	0.056 0
Poly3 (三次多项式)	0.046 7	0.973 5	0.971 8	0.032 2
近似拟合 函数( $f''$ )	0.039 7	0.978 0	0.977 2	0.028 2

图 3  $f$  函数及其拟合函数结果比较Fig. 3 Contrast between functions  $f$  and  $f'$ 

将式(4)代入式(1),可得刚度近似理论为:

$$K'_{\theta z, Mz} = \frac{E\omega t^3}{12af''} = \frac{E\omega t^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{13.8a}. \quad (5)$$

当  $a=b=R$  时,椭圆弧柔性铰链变成了圆弧形柔性铰链,则刚度近似理论为:

$$K'_{\theta z, Mz \text{ 圆}} = \frac{E\omega t^3}{12af''} = \frac{E\omega t^{\frac{5}{2}}}{13.8R^{\frac{1}{2}}}. \quad (6)$$

1965年由 Paros 和 WEISBORD<sup>[14]</sup>推导出的圆弧形柔性铰链的简化公式为:

$$K''_{\theta z, Mz} = \frac{2E\omega t^{\frac{5}{2}}}{9\pi R^{\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

式(6)和(7)的区别只是系数的不同,系数的相对误差为 2.4%,证明了椭圆弧柔性铰链的近似刚度理论计算公式的相对准确性。

### 2.3 椭圆弧柔性铰链工作时最大应力分析

柔性铰链在最小切割厚度且距 X 轴最远处的抗弯截面模量最小,应力最大。考虑应力集中的影响,设应力集中系数为  $k$ ,根据材料力学中纯弯曲理论可以得到最大应力计算式:

$$\sigma_{\max} = k \cdot \frac{M}{W_z} = \frac{kM}{t^2 \omega/6} = \frac{6kM}{t^2 \omega}. \quad (8)$$

根据文献<sup>[10]</sup>,应力集中系数  $k$  的表达式为:

$$k = \frac{\zeta + 0.253}{\zeta + 0.097}, \quad (9)$$

其中:  $\zeta = \frac{\rho}{t} = a^2/(bt)$ ;  $\rho$  是椭圆弧柔性铰链应力最大处的曲率半径。

一般在设计时,往往只知道柔性铰链的偏转

角度范围,材料的允许应力大小,偏转精度的要求而不知道其所需要的弯矩大小,所以假设设计的柔性铰链的最大偏转角为  $\theta$ ,则对应的弯矩为:

$$M_z = K'_{\theta z, Mz} \cdot \theta = \frac{E\omega t^3 \theta}{12af''}. \quad (10)$$

将式(9), (10)代入式(8)可得铰链工作时最大应力和偏转角的关系:

$$\sigma_{\max} = \frac{E\theta k}{2af''}. \quad (11)$$

将式(4)代入式(11)得椭圆弧柔性铰链的最大工作应力计算公式:

$$\sigma_{\max} = \frac{E\theta k}{2.3as^{-1/2}}. \quad (12)$$

### 2.4 柔性铰链的精度特性分析

一般将铰链中心点的位移作为铰链精度的分析指标<sup>[8]</sup>,柔性铰链中心点的位移其实也就是铰链在中心点处的挠度:

$$y_c = \iint \frac{M(x)}{EI(x)} dx dx = \iint \frac{M(x)}{E\omega \cdot h^3(x)/12} dx dx,$$

又

$$\begin{aligned} x &= asin\varphi, dx = acos\varphi d\varphi, h(\varphi) = 2b + t - 2b\cos\varphi, \\ y_c &= \int_{-\pi/2}^0 \left[ \int_{-\pi/2}^{\varphi} \frac{12M}{E\omega(2b+t-2b\cos\beta)^3} \cdot acos\beta d\beta \right] \cdot \\ & \quad acos\varphi d\varphi = \frac{6Ma^2}{E\omega t^3 \cdot (1+2s)}. \end{aligned} \quad (13)$$

在铰链偏转角  $\theta$  一定的情况下,将式(10)代入式(13)得:

$$y_c = \frac{10a\theta s^{1/2}}{23(1+2s)}. \quad (14)$$

## 3 椭圆弧柔性铰链最大刚度优化设计实例分析

### 3.1 优化模型

椭圆弧柔性铰链的优化问题数学模型为:

$$\begin{aligned} f_{\text{obj}} &= \max(K_{\theta z, Mz}) = \min(-K_{\theta z, Mz}) = \\ & \min\left[-\frac{E\omega t^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{13.8a}\right], \end{aligned}$$

令:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = t, x(x_1, x_2, x_3)^T,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \text{非线性约束} \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ \text{ceq}(x) = 0 \end{cases} \\ \text{线性不等式约束: } A \cdot x \leq b \\ \text{边界约束: } lb < x < ub \end{cases} \quad (15)$$

为了提高椭圆弧柔性铰链的工作精度,  $a$  取值不宜过大,令椭圆弧的长半轴  $a < 20$  mm,由前面分析可知,当  $s > 4$  时,近似理论计算公式相对误差比较小,所以  $20 > a > b > 4t > 0$ ,由此可得:线性不等式约束矩阵  $\mathbf{A} = [-1 \ 1 \ 0; 0 \ -1 \ 4]$ ,  $\mathbf{b} = [0; 0]$ ,边界约束  $\mathbf{lb} = [0; 0; 0]$ ,  $\mathbf{ub} = [20; 20; 5]$ 。

非线性约束主要包括两部分:

(1) 柔性铰链强度等式约束:根据式(12),可得强度等式非线性约束条件为:

$$ceq(x) = Et\theta k - 2.3as^{-1/2}\sigma_{y\max} = 0. \quad (16)$$

(2) 柔性铰链精度不等式约束:假设偏转角为 10 mrad,  $y_c < 10 \mu\text{m}$ ,根据式(14)可得非线性不等式约束条件为:

$$c(x) = \frac{10a\theta s^{1/2}}{23(1+2s)} - y_c \leq 0. \quad (17)$$

### 3.2 优化方法及优化评价参数

优化可以看作是寻找函数最小值点的过程,最小值点又可以分为局域最小值点和全域最小值点,优化模型是一求解带约束多变量非线性目标函数的最小值,根据各优化指令的使用特点,最终选择了 GlobalSearch 实施的全域优化指令和 Fmincon 局域优化指令。

Fmincon 优化结果的评价指标包括:目标函数值的变化趋势,约束冲突值(TolCon)和一阶优化系数(First-Order Optimality),对于同时具有等式约束和不等式约束的优化问题,一阶优化系数为:

$$\min f(x), \text{ s. t. } g_j(x) \leq 0 (j=1, 2, \dots, m),$$

$$h_k(x) = 0 (k=1, 2, \dots, l)$$

对应的拉格朗日函数为:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_{g,j} g_j(x) + \sum \lambda_{h,k} h_k(x).$$

库恩-塔克条件可表述为:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0, \lambda_{g,j} g_j(x) = 0,$$

$$\| \nabla_x L(x, \lambda) \| =$$

$$\| \nabla f(x) + \sum \lambda_{g,j} \nabla g_j(x) + \sum \lambda_{h,k} \nabla h_k(x) \|_{\infty}, \quad (18)$$

$\| \lambda_{g,j} \mathbf{g}_j(x) \|$  表示向量  $\lambda_{g,j} \mathbf{g}_j(x)$  的无穷范数,则一阶优化系数取  $\| \nabla_x L(x, \lambda) \|$  和  $\| \lambda_{g,j} \mathbf{g}_j(x) \|$  中的较大值。

由式(18)可知:一阶优化系数代表了迭代过

程中变量离变量最优值(目标函数取极小值时的变量)的远近程度,其值越小,代表迭代值越接近优化值,它是带约束目标函数取得极小值的必要非充分条件。

### 3.3 优化结果

椭圆弧柔性铰链的优化参数如表 2 所示,采用 Fmincon 局部搜索优化得到了局部最佳变量值,目标值、约束值和一阶优化系数在优化迭代中的变化,如图 4 所示,目标函数随着迭代的增加而减小,满足优化的要求,最终目标函数局部最优值为  $-95.8 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,随着迭代的进行约束值和一阶优化系数都在不断的接近于 0,最终经过 6 次迭代以后,约束值为 0,一阶优化系数(First-Order Optimality)为  $2.11 \times 10^{-6}$ ,接近于 0,说明局部优化结果可靠,最佳变量值为  $x = (10.35, 7.008, 1.752)$  即:  $a = 10.35 \text{ mm}$ ,  $b = 7.008 \text{ mm}$ ,  $t = 1.752 \text{ mm}$ ,将优化结果代入式(5)计算得:

$$K'_{\theta z, Mc} = \frac{Ewt^3}{12af^3} = \frac{Ewt^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{13.8a} = 95.73 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}.$$

计算结果与优化结果一致,说明理论计算和优化结果可靠。

表 2 优化模型及有限元仿真参数

Tab. 2 Parameters of optimization model and finite element simulation

参数	弹性模量 E/Gpa	厚度 w/mm	精度 y/ $\mu\text{m}$	疲劳应力 $\sigma/\text{Mpa}$	泊松比 $\mu$	偏转角 $\theta/\text{mrad}$
数值	106	12	10	160	0.33	10

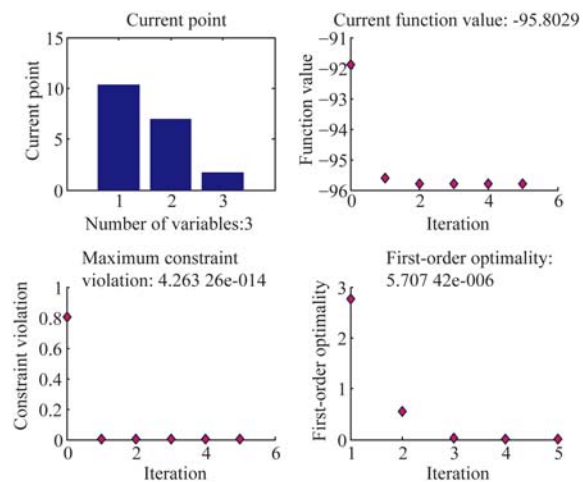


图 4 局部优化结果

Fig. 4 Results of local optimization

全局搜索优化结果如图 5 所示,全局优化目标函数最小值为  $-95.8 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,与局部优化结果一致。

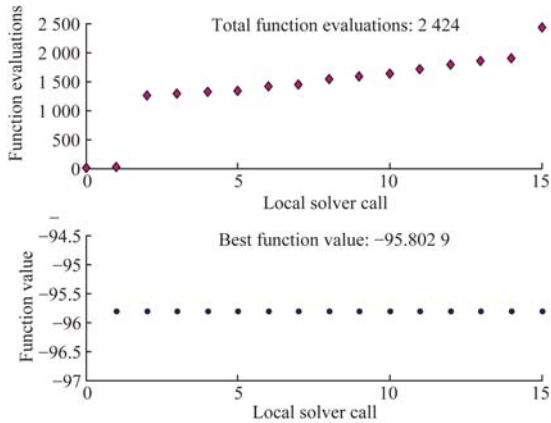


图 5 全局优化结果

Fig. 5 Results of global optimization

## 4 有限元仿真和实验验证

由前述优化分析可知:  $a=10.35 \text{ mm}$ ,  $b=7.008 \text{ mm}$ ,  $t=1.752 \text{ mm}$ ,  $w=12 \text{ mm}$  时,椭圆弧柔性铰链的工作方向刚度最大,考虑到加工的方便,柔性铰链参数确定为  $a=10.3 \text{ mm}$ ,  $b=7 \text{ mm}$ ,  $t=1.7 \text{ mm}$ ,  $w=12 \text{ mm}$ 。将铰链参数分别代入式(1),式(5)、(11)和(14),可以分别计算得到理论精确计算刚度  $K_{\theta_z, M_z} = 89.90 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$  近似计算刚度  $K'_{\theta_z, M_z} = 89.22 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,工作最大应力  $\sigma_{y_{\max}} = 154.4 \text{ Mpa}$ ,精度  $y_c = 9.84 \mu\text{m}$ ,满足约束条件且理论精确计算刚度和近似理论计算刚度的相对误差为  $0.76\%$ 。

### 4.1 有限元仿真

通过 UG 建立几何模型,Hypermesh 建立有限元模型,有限元模型如图 6 所示,模型由 3870 个单元组成,铰链部分网格单元比较密,左端完全固定,右端施加绕工作轴方向的弯矩,通过有限元仿真计算得到该柔性铰链的刚度为  $86.4 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,精度  $y_c$  为  $9.98 \mu\text{m}$ ,应力  $\sigma_{y_{\max}}$  为  $156.6 \text{ Mpa}$ ,仿真结果与近似理论计算结果误差分析如表 3 所示。

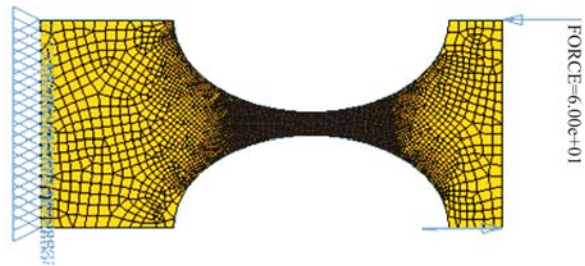


图 6 柔性铰链有限元模型

Fig. 6 Finite element model of flexible hinge

表 3 有限元仿真与近似理论计算结果的误差分析

Tab. 3 Errors predicted from finite element analysis and approximate theoretical calculation

	刚度 /( $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ )	精度 / $\mu\text{m}$	应力 /Mpa
有限元仿真结果	86.4	9.98	156.6
近似理论计算结果	89.2	9.84	154.4
有限元仿真与近似理论 计算的相对误差/%	3.14	-1.42	-1.42

由表 3 可知:仿真结果和近似理论计算结果的相对误差都小于  $4\%$ ,且精度和应力的相对误差小于  $2\%$ ,仿真结果满足优化模型的约束条件。

### 4.2 工作刚度的实验验证

采用电火花线切割工艺加工了该柔性铰链并搭建实验来检测优化柔性铰链的工作刚度,实验原理如图 7 所示。主要包括一分辨率为  $0.2''$  的平行光管,优化柔性铰链,黏接在连接板上的反射镜,与柔性铰链固连的连接板和基座,基座又与光学平台固连,不同质量的砝码,细线和量块。通过细线穿过连接板的细孔在连接杆的一端施加力  $mg$ ,用平行光管测量砝码施加前后反射镜的偏转角即柔性铰链的偏转角  $\theta$ ,实际的实验装置如图 8 所示。由此,椭圆弧柔性铰链的工作刚度计算公式为:

$$K_{\text{实验}} = M/\theta = mgL \cos \theta / \theta, \quad (19)$$

式中:  $K_{\text{实验}}$  是实验检测刚度 ( $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ );  $m$  是砝码的质量 ( $\text{g}$ );  $g$  为重力加速度 ( $9.8 \text{ m}/\text{s}^2$ );  $L$  为常数 ( $L=0.0475 \text{ m}$ );  $\theta$  为偏转角 ( $\text{mrad}$ )。

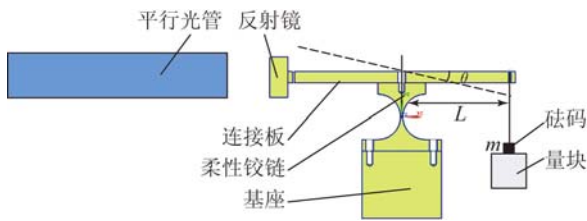


图7 柔性铰链刚度测试实验原理图

Fig. 7 Diagram of experimental arrangement for the calculation for the stiffness of notch hinge



图8 刚度检测实验装置图

Fig. 8 Set up of stiffness measurement experiments

在实际实验时,砝码质量依次为 10 g, 20 g, 50 g, 100 g 和 200 g。为了减少测量随机误差,不同力矩情况下实验进行了多次重复测量,偏转角取多次测量的平均值,对实验结果进行数据处理,得到该优化柔性铰链的转角-弯矩曲线,如图 9 所示,曲线的斜率即为该优化柔性铰链的工作刚度  $K_{\text{实验}}$  为 93.47 N · m/rad,实验结果与近似理论计算结果的相对误差为:

$$\delta_{\text{实验-近似理论}} = (K'_{\theta_z, M_z} - K_{\text{实验}}) / K'_{\theta_z, M_z} \quad (20)$$

## 参考文献:

- [1] SEOT W, SITTI M. Tank-like module-based climbing robot using passive compliant joints [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, 18(1): 397-408.
- [2] WASON J D, WEN J T, DAGALSKIS N G. Dexterous manipulation of a micropart with multiple compliant probes through visual force feedback [C]. in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, Shanghai, 2011: 6991-6996.
- [3] POLLITS, DONG J. Development of a high-bandwidth XY nanopo-sitioning stage for high-rate mi-

将实验刚度值和理论计算刚度值代入式(20),得  $\delta_{\text{实验-近似理论}} = -4.76\%$ 。

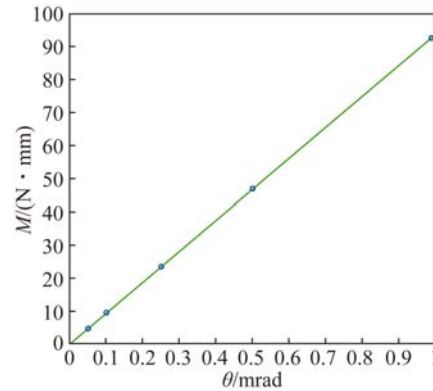


图9 柔性铰链弯矩-转角拟合曲线

Fig. 9 Fitting curve about the bending moments and rotation angles of the optimal elliptical hinge

## 5 结 论

本文采用幂函数非线性曲线拟合方法,得出了椭圆弧柔性铰链工作刚度的近似理论计算公式,当  $s(b/t) > 4$  时,近似理论计算公式和准确理论计算公式两者的相对误差不超过 2%。将近似理论计算公式用于椭圆弧柔性铰链的优化设计,利用 Matlab 软件对某一椭圆弧柔性铰链的最大刚度进行了优化计算,优化结果与近似理论计算结果相一致。通过有限元仿真和实验验证了椭圆弧柔性铰链工作刚度近似计算公式的适用性和优化结果的可靠性。椭圆弧柔性铰链工作刚度的仿真值,实验值与近似理论计算结果的相对误差都小于 5%。

cro-nonmanufacturing [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011, 16(4): 724-733.

- [4] BASHASHS, JALILI N. Robust adaptive control of coupled parallel piezo-flexural nano-positioning stages [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, 14(1): 11-20.
- [5] PAROS J M, WEISBORD L. How to design flexure hinges [J]. *Machine Design*, 1965, 37(27): 151-156.
- [6] TSEYTLIN Y M. Notch flexure hinges: an effective theory [J]. *Review of Scientific Instrument*, 2002, 73(9): 3363-3368.
- [7] WU Y F, ZHOU ZH Y. Design calculations for flexure hinges [J]. *Review of Scientific Instru-*

- ment, 2002, 73(8):3101-3106.
- [8] LOBONTIU N, PAINE J, MALLEY E, *et al.*. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations [J]. *Precision Engineering*, 2002, 26:183-192.
- [9] RYU J W, GWEON D G. Error analysis of a flexure hinge mechanism induced by machining imperfection [J]. *Precision Engineering*, 1997, 21: 83-89.
- [10] CHEN G M, WANG J L, LIU X Y. Generalized equations for estimating stress concentration factors of various notch flexure hinges [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2014, 136(1): 1-8.
- [11] SMITH S T, BADAMI V G, DALE J S, *et al.*. Elliptical flexure hinges [J]. *Review of Scientific Instrument*, 1997, 68(3):1474-1483.
- [12] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D. Closed-form compliance equations of filleted V-shaped flexure hinges for compliant mechanism design [J]. *Precision Engineering*, 2010, 34:408-418.
- [13] LOBONTIU N, MATT C, PETERSEN T. Planar compliances of symmetric notch flexure hinges; the right circularly corner-filletted parabolic design [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2014, 11(1):169-176.
- [14] LOBONTIU N, PAINE J S N. Corner-filletted flexure hinges [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(3): 346-352.
- [15] LIN R ZH, ZHANG X M, LONG X J, *et al.*. Hybrid flexure hinges [J]. *Review of Scientific Instrument*, 2013, 84, 085004.
- [16] CHEN G M, SHAO X, HUANG X. Elliptically-arc-fillet flexure hinges; toward a generalized model for commonly used flexure hinges [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2011, 133(081002).
- [17] CHEN G M, JIA J Y, HAN Q. Geometrical profile optimization of elliptical flexure hinge using a modified particle swarm algorithm [C]. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2005, 3644:533-542.
- [18] BONA F D, MUNTEANU M G. Optimized flexural hinges for compliant micro-mechanisms [J]. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 44(2)(2005) 163-174.
- [19] ZELENKA S, MUNTEANU M G, BONA F D. Optimized flexural hinge shapes for micro-systems and high-precision applications [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44:1826-1839.
- [20] XIE Z Y, QIU L F, BIAN X X, *et al.*. Derivation of the precise calculation formula of compliance and optimal design of circular flexure hinge [C]. *Proceedings of IEEE*, 2011.

## 作者简介:



付锦江(1988—),男,江西高安人,博士研究生,2010年于武汉理工大学获得学士学位,主要从事光学精密机械设计 & 检测研究。E-mail: ytfjj17@tom.com

## 导师简介:



颜昌翔(1973—),男,湖北洪湖人,研究员,2001年于中国科学院长春光学精密机械与物理研究所获得博士学位,主要从事空间光学遥感技术方面的研究。E-mail: yan cx@ciomp.ac.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)