

文章编号 1004-924X(2018)01-0095-10

空间刚柔耦合并联机构的逆动力学建模与控制

刘 凉*, 赵新华, 王收军, 秦帅华

(天津理工大学 天津市先进机电系统设计与智能控制重点实验室 机械工程学院, 天津 300384)

摘要: 为了提高 3-RRRU 空间刚柔耦合并联机构的轨迹跟踪精度, 提出了一种基于瞬态刚体校正法的逆动力学模型求解方法来构建该机构的非线性控制策略。首先, 利用自然坐标法和绝对节点坐标法建立该机构的非线性逆动力学模型, 它考虑了各支链柔性空间梁单元的剪切效应, 并能描述柔性梁的大范围非线性弹性变形。然后, 通过分析刚柔耦合动力学模型在求解过程中出现的相容性问题, 结合自然坐标法与理想运动学模型, 提出了瞬态刚体校正法并求出逆动力学模型的稳定数值因果解。最后, 基于该数值解构建并联机构的非线性控制策略, 通过仿真与实验验证了该方法的可行性与有效性。仿真与实验结果表明: 逆动力学方程组的求解精度为 10^{-6} , 约束方程的相容误差为 10^{-8} ; 与刚性并联机构的控制方法相比, 该方法在圆形轨迹下的最大跟踪误差降低了 0.465 mm, 圆度误差降低了 0.416 mm。结果表明: 该求解方法解决了闭链机构多体动力学方程的违约问题, 有效地改善了系统的综合收敛性能, 所构建的控制策略提高了并联机构的轨迹跟踪精度。

关键词: 空间机器人; 并联机器人; 动力学; 多体系统; 控制策略

中图分类号: TP273; TH113 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20182601.0095

Inverse dynamic modeling and control of spatial rigid-flexible parallel manipulator

LIU Liang*, ZHAO Xin-hua, WANG Shou-jun, QIN Shuai-hua

(Tianjin Key Laboratory of Design and Intelligent Control of Advanced Mechatronical System, School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

* Corresponding author, E-mail: liuliang_tjut@126.com

Abstract: To improve the trajectory tracking performance of a spatial rigid-flexible 3-RRRU parallel manipulator, a nonlinear control strategy based on a multibody inverse dynamic solution by means of a transient kinematic correction method was proposed. First, the nonlinear inverse dynamics of a spatial 3-RRRU parallel robot with flexible links was developed according to both the Natural Coordinate Formulation (NCF) and the Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF). The derived models consider the shear deformation and can describe the large deformation for each beam. By analyzing the compatibility problem during the solution process of the rigid-flexible dynamics of the close-chain mechanism, we were able to develop the transient kinematic correction method and the derived stable causal solutions according to the NCF and the ideal kinematic model. Finally, the control strategy for

收稿日期: 2017-05-02; 修订日期: 2017-08-08.

基金项目: 天津市应用基础与前沿技术研究计划资助项目 (No. 17JCYBJC18300, No. 14JCZDJC39100); 国家自然科学基金资助项目 (No. 51275353); 天津市教委科研计划资助项目 (No. 2017KJ259)

the manipulator is presented, which was based on the solutions and simulations, and experiments were performed to verify the feasibility and effectiveness of the method. The results showed that the solution precision of the inverse dynamics was 10^{-6} and that the compatibility error of the constraints was 10^{-8} . Compared with those based on the control strategy of the rigid parallel mechanism, the maximum tracking error and the roundness error of a prescribed circular trajectory based on the provided control strategy can decrease by 0.465 mm and 0.416 mm, respectively. The presented method can solve the compatibility problem of multibody dynamics with constraints, thus effectively improving the overall convergent performance of a dynamic system. The control strategy can provide better tracking performance for the parallel mechanism.

Key words: spatial manipulator; parallel manipulator; dynamics; multibody system; control strategy

1 引言

多体系统建模复杂、求解与控制困难,所以一直是国内外研究的难题和热点^[1-2]。目前,该领域多数研究成果集中于平面柔性机构,主要建模方法包括运动弹性动力学法、浮动坐标系法、单通建模方法和绝对节点坐标法。其中,运动弹性动力学法建模和求解简单,但却忽略了大范围刚体运动与弹性变形之间的耦合特性,故无法对弹性体的大变形进行精确描述^[3-4]。浮动坐标系法对该方法进行了适当改善,能够描述小变形条件下柔性构件的变形状态与大范围刚体运动之间的耦合特性^[5],但由于刚柔耦合项的存在,致使复杂柔性机构的求解变得十分困难。单通建模方法提出了一种三节点平面梁单元模型,它所描述的绝对平动位移和转动角度包含了大范围的刚体运动和小范围的弹性变形^[6-7],因此刚柔耦合项不再出现。Shabana 等提出了绝对节点坐标法描述的柔性梁单元模型^[8-9],它将绝对位置坐标及其变形梯度作为节点坐标,能直接描述柔性梁的大范围刚体运动和大弹性变形以及二者的非线性耦合特性,因此应用愈加广泛。其优点是质量矩阵为常量对称矩阵,但应变能的形式复杂,可通过稀疏不变矩阵提高应变能的计算效率^[10],在求解时应规避泊松闭锁问题。由于描述多体动力学模型的微分方程具有刚性特性,因此求解时隐式积分法要优于显式积分法^[11]。此外,Generalized- α 方法由于可对高频模态实现可控的人工耗散,因此也是多体系统常用的一种高效求解方法^[12]。目前,非因果解仍然是评判多体系统逆动力学解特性的重要标准,因为它能够求出系统唯一有界解^[13]。但其求

解方法不适用于大范围弹性变形的柔性多体系统。因此应构建合理的求解方法来寻求系统稳定的数值因果解。多体系统的控制策略主要包括主动抑振控制法和逆动力学模型控制法。前者通过模态分析利用主动抑振设备来降低柔性构件的振动^[1,14],此方法适用于产生小变形的弹性体,而且为了简化模型通常要忽略高阶模态,因此控制效果具有局限性;相比之下,逆动力学模型控制法更为合理^[3],因为合理构建和精确求解多体系统的数学模型依然是实施精确控制的重要理论依据。因此,需要深入研究刚柔耦合系统的动力学特性,这对于提高运动机构的工作效率、降低能源消耗具有重要的理论意义与应用价值。

本文针对含有柔性杆的空间 3-RRRU 并联机构,利用自然坐标法(Natural Coordinate Formulation, NCF)和绝对节点坐标法(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)构建该刚柔耦合系统的拉格朗日动力学模型,为规避泊松闭锁问题采用缩减积分法求出空间柔性杆的应变能,通过分析刚、柔构件的运动特性提出一种瞬态刚体校正法,来解决多体系统逆动力学模型在求解过程中的相容性问题,最后根据该数值解构建系统非线性控制策略,并通过仿真与实验验证了所提方法的有效性和正确性。

2 刚性构件与柔性构件的质量矩阵

由于空间 3-RRRU 并联机构中含有刚性梁单元、刚性三角动平台和柔性梁单元,所以应先分别求出其质量矩阵以便构建系统的动力学方程。

2.1 空间刚性梁单元的质量矩阵

基于 NCF 法对一种各向同性、质量分布均匀

且横截面一致的空间刚性梁单元进行描述,如图 1 所示。梁的中性线上任意一点的绝对位置矢量可表示为:

$$\mathbf{r}_i(x) = \mathbf{r}_{ji} + x(\mathbf{r}_{j+1i} - \mathbf{r}_{ji}) / |\mathbf{r}_{j+1i} - \mathbf{r}_{ji}| = \mathbf{S}_r \mathbf{q}_i, \quad (1)$$

式中: \mathbf{S}_r 为刚性梁的形函数且 $\mathbf{S}_r \in \mathbf{R}^{3 \times 6}$; \mathbf{q}_i 为刚性梁的自然坐标矢量且 $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^6$ 。它们可进一步表示为:

$$\mathbf{S}_r = [1 - x/l_i \quad x/l_i] \otimes \mathbf{I}_3, \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_i = [x_{ji} \quad y_{ji} \quad z_{ji} \quad x_{j+1i} \quad y_{j+1i} \quad z_{j+1i}]^T, \quad (3)$$

式中: \otimes 为克罗内科张量积。

根据惯性力的虚功率计算公式^[13], 刚性梁单元的质量矩阵可表示为:

$$\mathbf{M} = \rho_i \iiint_V \mathbf{S}_r^T \mathbf{S}_r dV = \begin{bmatrix} m_i/3 & m_i/6 \\ m_i/6 & m_i/3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3, \quad (4)$$

式中: ρ_i 为刚性梁的密度; m_i 为刚性梁的质量。显然, 式(4)的质量矩阵为对称的常数矩阵。

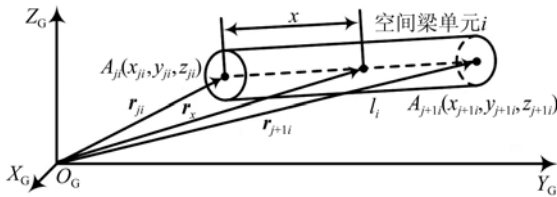


图 1 NCF 法描述的空间刚性梁单元模型

Fig. 1 Model of spatial rigid beam described by NCF

2.2 刚性三角形平台的质量矩阵

基于 NCF 法描述的各向同性、质量分布均匀且厚度一致的空间正三角形平台如图 2 所示, 其外接圆半径为 r 。为求出其质量矩阵, 需要引入两个空间基点 A_{41} 与 A_{42} 以及在局部坐标系 $\bar{o}-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 下描述的两个单位矢量 $\bar{\mathbf{u}}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}$ 。其中, 两个基点亦可在局部坐标系下分别用矢量 $\bar{\mathbf{r}}_i$ 和 $\bar{\mathbf{r}}_j$ 来描述。此时三角形平台上任意一点在全局坐标系下的度量:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \mathbf{q}^a, \quad (5)$$

式中: \mathbf{C} 为平台的形函数且 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{3 \times 12}$; \mathbf{q}^a 为平台的自然坐标矢量且 $\mathbf{q}^a \in \mathbf{R}^{12}$ 。其中, 形函数可表示为:

$$\mathbf{C} = [(1 - c_1) \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3] \otimes \mathbf{I}_3, \quad (6)$$

式中未知元素 c_1, c_2 和 c_3 可由下式进行计算:

$$[c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T = [\bar{\mathbf{r}}_j - \bar{\mathbf{r}}_i \quad \bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{v}}]^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_i). \quad (7)$$

此外, 三角形平台的自然坐标矢量可表示为:

$$\mathbf{q}^a = [\mathbf{r}_i \quad \mathbf{r}_j \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}]^T, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{u}$ 和 \mathbf{v} 分别为 $\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}_j, \bar{\mathbf{u}}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}$ 在全局坐标系下的描述。同理, 根据惯性力的虚功率可得出三角形平台的质量矩阵:

$$\mathbf{M}_p = \rho \iiint_V \mathbf{C}^T \mathbf{C} dV = \begin{bmatrix} m_p/6 & m_p/12 & m_p/12 \\ m_p/12 & m_p/6 & m_p/12 \\ m_p/12 & m_p/12 & m_p/6 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3, \quad (9)$$

式中: ρ 为三角形平台的密度; m_p 为三角形平台的质量。该质量矩阵为对称的常数矩阵。此时, 对应的自然坐标矢量为:

$$\mathbf{q}_p = [x_3 \quad y_3 \quad z_3 \quad x_6 \quad y_6 \quad z_6 \quad x_9 \quad y_9 \quad z_9]^T, \quad (10)$$

式中: $x_i, y_i, z_i (i=3, 6, 9)$ 为平台顶点的自然坐标。

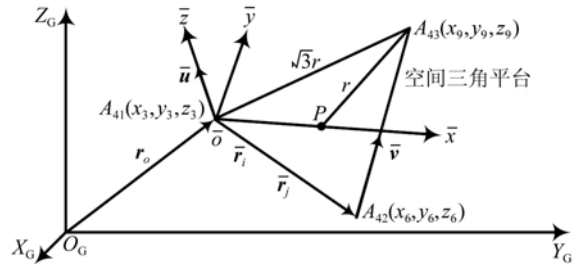


图 2 NCF 法描述的空间刚性三角形平台模型

Fig. 2 Model of spatial rigid triangular platform described by NCF

2.3 空间柔性梁单元的质量矩阵

利用 ANCF 法可对各向同性、质量分布均匀且横截面一致的空间柔性梁单元进行建模。根据文献[8-9], 梁上任意一点的绝对位置矢量可表示为:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}^{ij}, \quad (11)$$

式中: \mathbf{S}^{ij} 为梁单元形函数; \mathbf{e}^{ij} 为梁单元首末端点的节点坐标矢量, 它可表示为:

$$\mathbf{e}^{ij} = [\mathbf{r}_x^{ijm^T}, \mathbf{r}_x^{ijn^T}, \mathbf{r}_y^{ijm^T}, \mathbf{r}_y^{ijn^T}, \mathbf{r}_z^{ijm^T}, \mathbf{r}_z^{ijn^T}, \mathbf{r}_x^{ijn^T}, \mathbf{r}_x^{ijm^T}, \mathbf{r}_y^{ijn^T}, \mathbf{r}_y^{ijm^T}, \mathbf{r}_z^{ijn^T}, \mathbf{r}_z^{ijm^T}]^T, \quad (12)$$

式中: \mathbf{r}^{ijm} 和 \mathbf{r}^{ijn} 分别为首端点 m 和末端点 n 的绝对位置矢量; $\mathbf{r}_x^{ijk}, \mathbf{r}_y^{ijk}, \mathbf{r}_z^{ijk} (k=m, n)$ 为两个端点处的绝对节点变形梯度矢量。

根据动能表达式,可知柔性梁单元的质量矩阵为:

$$\mathbf{M}^{ij} = \iiint_{V^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ijT} \mathbf{S}^{ij} dV^{ij}, \quad (13)$$

式中: ρ^{ij} 为柔性梁的密度; V^{ij} 为柔性梁的体积。该质量矩阵为对称的常数矩阵。

3 刚柔耦合并联机构的动力学方程

3.1 3-RRRU 刚柔耦合并联机构

含有柔性杆的 3-RRRU 并联机构如图 3 所示,它由静平台、动平台及三条结构对称的支链组成,其中静平台和动平台均为等边三角形,各支链包含三个运动杆件(前两个杆件为刚性杆,最后一个杆件为柔性杆)、三个转动副和一个虎克铰。所有运动关节都是刚性关节,与静平台相连的转动副为驱动副。若利用 NCF 法和 ANCF 法构建并联机构的动力学方程,则各杆件的广义坐标定义如图 4 所示。



图 3 3-RRRU 刚柔耦合并联机器人

Fig. 3 Composition of 3-RRRU rigid-flexible parallel manipulator

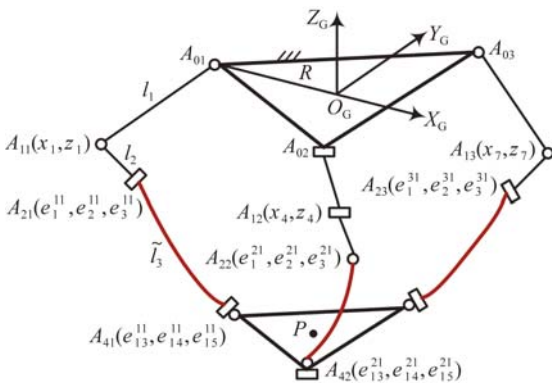


图 4 并联机器人的广义坐标

Fig. 4 Generalized coordinates of parallel mechanism

由于图 4 中各支链前两个杆件可简化为平面刚性梁单元,所以使用两个自然坐标 x_i 和 z_i ($i=1, 4, 7$) 即可描述其运动。柔性杆则构建为由 ANCF 法描述的柔性梁单元模型,其中节点坐标分量 e_k^j ($k=1, 2, 3, 13, 14, 15$) 为首末节点的绝对位置坐标,式(12)中描述变形梯度的坐标分量并未在图中列出。因此,描述该并联机构的广义坐标总数为 78 个。

3.2 并联机构的逆动力学模型

根据能量原理和前述的刚性、柔性构件的质量矩阵可求出系统的拉格朗日动力学方程,此时各支链的驱动力矩 τ_1 , τ_2 和 τ_3 为未知量,则并联机构在约束条件下的逆动力学模型表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_g + \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}_e - \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \end{cases}, \quad (14)$$

式中: \mathbf{M} 为系统的常质量矩阵; \mathbf{Q}_g 为广义重力矢量; \mathbf{Q}' 为广义驱动力矩矢量; \mathbf{Q}_e 为广义弹性力矢量; Φ 为系统的约束方程; Φ_q 为系统约束方程的雅克比矩阵; $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉格朗日乘子矢量; \mathbf{q} 为系统的广义坐标矢量,可表示为:

$$\mathbf{q} = [x_1 \quad z_1 \quad e^{11T} \quad x_4 \quad z_4 \quad e^{21T} \quad x_7 \quad z_7 \quad e^{31T}]^T. \quad (15)$$

由于逆动力学模型必须在系统约束条件下进行求解,因此,首先列出第一支链的几何约束方程:

$$\begin{cases} (x_1 + R)^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0 \\ (e_1^{11} - x_1)^2 + (e_3^{11} - z_1)^2 - l_2^2 = 0 \\ e_2^{11} = 0 \\ e_{11}^{11} = 0 \\ e_{10}^{11} (e_1^{11} - x_1) + e_{12}^{11} (e_3^{11} - z_1) = 0 \\ e_{22}^{11} (e_{13}^{31} - e_{13}^{21}) + e_{23}^{11} (e_{14}^{31} - e_{14}^{21}) + e_{24}^{11} (e_{15}^{31} - e_{15}^{21}) = 0 \end{cases}, \quad (16)$$

式中:前两个约束方程分别描述了两个刚性杆的长度约束;第三个约束方程表明第二个刚性杆只做平面运动;其他方程则是对刚性转动关节和刚性虎克铰进行约束。同理,可对其余两条支链列剩下的 12 个约束方程。其次,刚性动平台的约束方程为:

$$\begin{cases} (e_{13}^{11} - e_{13}^{21})^2 + (e_{14}^{11} - e_{14}^{21})^2 + (e_{15}^{11} - e_{15}^{21})^2 - 3r^2 = 0 \\ (e_{13}^{21} - e_{13}^{31})^2 + (e_{14}^{21} - e_{14}^{31})^2 + (e_{15}^{21} - e_{15}^{31})^2 - 3r^2 = 0 \\ (e_{13}^{31} - e_{13}^{11})^2 + (e_{14}^{31} - e_{14}^{11})^2 + (e_{15}^{31} - e_{15}^{11})^2 - 3r^2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

最后,由于并联机构末端执行器的运动轨迹已知,因此动平台中心点 P 处的约束方程可表示为:

$$\begin{cases} (e_{13}^{11} + e_{13}^{21} + e_{13}^{31})/3 - x_p = 0 \\ (e_{14}^{11} + e_{14}^{21} + e_{14}^{31})/3 - y_p = 0, \\ (e_{15}^{11} + e_{15}^{21} + e_{15}^{31})/3 - z_p = 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中 x_p, y_p 和 z_p 为末端执行器已知的运动轨迹。因此,逆动力学模型的全部约束方程共计 24 个。

3.3 弹性广义力及其雅克比矩阵

为消除 ANCF 法构建的柔性梁单元在弯曲变形时发生的泊松闭锁问题^[15],将应变能分解为两部分:

$$U_e = U_{1e} + U_{2e}, \quad (19)$$

式中:

$$\begin{cases} U_{1e} = \frac{1}{2} \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E}^{0*} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \det(\mathbf{J}_0) dV \\ U_{2e} = \frac{1}{2} A \int_0^l \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E}^{v*} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \det(\mathbf{J}_0) d\xi |_{\eta=0, \zeta=0} \\ \mathbf{E}^{0*} = \text{diag}(\mathbf{E}, \mathbf{E}, \mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{G}k_2, \mathbf{G}k_3), \mathbf{E}^{v*} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{0*} \end{cases},$$

式中: $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为应变能矢量; \mathbf{J}_0 为相对于参考位型变形梯度的逆矩阵; \mathbf{E} 为弹性矩阵; A 为柔性杆的横截面积; \mathbf{E} 和 \mathbf{G} 分别为杨氏弹性模量与剪切模量; k_2 和 k_3 为剪切修正因子。由于在计算应变能时,第

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_{n+1} - \mathbf{Q}_g(\mathbf{q}_{n+1}) - \mathbf{Q}_e(\mathbf{q}_{n+1}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{M}_{n+1}) = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_{n+1}, t_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

为保证迭代过程中逆动力学模型的数值解满足系统的求解精度要求,应对式(14)描述的动力学方程和约束方程的误差函数进行定义。这里将逆动力学方程和约束方程的误差函数分别定义为:

$$E_{\text{Dyn}} = \|\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{78} M_k(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, t)^2}, \quad (23)$$

$$E_{\text{Con}} = \|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{21} \Phi_k(\mathbf{q}, t)^2}. \quad (24)$$

由于两个误差函数均采用了平方和的根式形式,所以给定一个误差值,能够保证对应方程组中每一个迭代方程的计算误差都小于该设定值。为了综合考虑系统的迭代误差,这里将动力学方程和约束方程的误差函数之和定义为系统的误差函数。

利用数值积分法求解时,在初始阶段动力学方程的收敛速度很快,系统的误差函数值会明显

二个方程采用了选择性的缩减积分法,所以它仅考虑了中性线上的泊松效应。

系统的弹性广义力及其雅克比矩阵分别表示为:

$$\mathbf{Q}_e = -\frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{K}\mathbf{e} = -(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{e}))\mathbf{e}, \quad (20)$$

$$\mathbf{J}_e = \frac{\partial \mathbf{Q}_e^i}{\partial \mathbf{e}} = -\frac{\partial \mathbf{K}\mathbf{e}}{\partial \mathbf{e}} = -\frac{\partial(\mathbf{K}_2(\mathbf{e}) + \mathbf{K}_1)\mathbf{e}}{\partial \mathbf{e}}, \quad (21)$$

式中: \mathbf{K} 为非线性刚度矩阵,由线性刚度矩阵 \mathbf{K}_1 和非线性刚度矩阵 \mathbf{K}_2 组成。式(20)和式(21)可通过引入不变矩阵来化简,以提高计算和求解效率^[10]。

4 刚柔耦合动力学系统求解方法

4.1 刚性动力学方程的数值积分法

由于描述系统逆动力学模型的微分方程具有刚性特性,所以在求解过程中利用 Generalized- α 法对高频分量实现可控的数值耗散能准确求出刚柔耦合动力学方程的数值解。该方法作为一种隐式数值积分法,在迭代求解时应将逆动力学方程改写为:

下降;但此后其下降幅度不断减小,这是因为动力学方程存在刚性问题。当并联机构开始运动并不断远离初始位型时,该误差函数值不再降低反而会不断升高,究其原因是系统约束方程的迭代误差在不断增加,这说明此时动力学方程与几何约束方程所保持的相容性原则被破坏。而出现该问题的根源在于系统中刚性构件与柔性构件的运动状态是在不同的时间尺度下变化的,但两种运动却混合在一起进行积分,造成描述刚性构件运动的自然坐标与描述柔性构件运动的绝对节点坐标在迭代时的更新速率不同,从而破坏了系统动力学方程与约束方程的相容性。

4.2 逆动力学瞬态刚体校正法

为了解决相容性问题,通过以上分析提出一种瞬态刚体校正法。它的基本思想是:在数值迭代过程中,将当前已产生变形的并联机构视为一个刚性机构,倘若此时几何约束方程的误差函数值超过了设定值,则必须在该瞬时状态对该刚性

机构的运动学模型进行重构求解,由于此刻的运动学模型与刚柔耦合动力系统的约束方程相容,同时能保持柔性杆的变形状态与弹性力不变,所以该校正法提供的辅助搜索路径或迭代路径能够保持动力学方程与几何约束方程的相容性。若此时的运动机构被视为刚性机构,则可利用 NCF 法来描述各个构件的瞬时运动状态。为此,先将图 4 中 $A_{2i}(i=1,2,3)$ 点处的绝对节点坐标依次改为自然坐标 (x_2, y_2, z_2) 、 (x_5, y_5, z_5) 和 (x_8, y_8, z_8) ;然后再将 $A_{4i}(i=1,2,3)$ 点处的绝对节点坐标依次改为自然坐标 (x_3, y_3, z_3) 、 (x_6, y_6, z_6) 和 (x_9, y_9, z_9) 。在校正过程中,应根据系统的几何约束方程重构各支链运动构件及动平台的运动状态。第一支连的瞬时几何约束方程为:

$$\begin{cases} (x_1+R)^2+z_1^2-l_1^2=0 \\ (x_2-x_1)^2+(z_2-z_1)^2-l_2^2=0 \\ (x_3-x_2)^2+y_3^2+(z_3-z_2)^2-l_{31}^2=0 \\ (x_2-x_1)(z_3-z_1)/l_2-(x_3-x_1)(z_2-z_1)/l_2-d_1=0 \\ u_{6x}(x_6-x_9)+u_{6y}(y_6-y_9)+u_{6z}(z_6-z_9)=0 \end{cases}, \quad (25)$$

式中:首个方程约束了驱动杆的长度;接下来两个方程约束了第二杆与第三杆的长度;第四个方程是柔性杆上 A_{41} 点到一个给定平面的距离约束(距离为 d_1),这个给定平面通过点 A_{21} 并与第二转动副的轴线相垂直;最后一个方程对虎克铰两个转动副的轴线进行约束,其中 u_{3x} 、 u_{3y} 和 u_{3z} 为虎克铰第一转动副轴线在全局系下的描述。同理,可列出其他两个支链的十个瞬时几何约束方程。三角形刚性动平台的瞬时几何约束方程为:

$$\begin{cases} (x_3-x_6)^2+(y_3-y_6)^2+(z_3-z_6)^2-3r^2=0 \\ (x_6-x_9)^2+(y_6-y_9)^2+(z_6-z_9)^2-3r^2=0 \\ (x_9-x_3)^2+(y_9-y_3)^2+(z_9-z_3)^2-3r^2=0 \\ (x_3+x_6+x_9)/3-x_p=0 \\ (y_3+y_6+y_9)/3-y_p=0 \\ (z_3+z_6+z_9)/3-z_p=0 \end{cases}, \quad (26)$$

式中 x_p 、 y_p 和 z_p 为已知的末端执行器运动轨迹。

逆动力学瞬态刚体校正法就是利用各支链及动平台的 21 个瞬时几何约束方程来重构此时刚性机构的运动状态。为了提高求解效率,可采用基于 Sherman-Morrison 公式的 Broyden 迭代法对其进行求解。在每次迭代求解过程中,将瞬态

刚体校正法与 Generalized- α 法相结合,用校正后的自然坐标去替换模型中描述刚性杆与柔性杆的绝对位置坐标,即可求出刚柔耦合系统逆动力学模型稳定的数值因果解。根据各驱动杆求出的关节变量值建立系统的非线性控制策略,来实现并联机构的轨迹跟踪控制。

5 仿真分析与控制实验验证

5.1 仿真分析

刚柔耦合 3-RRRU 并联机构的仿真物理参数如表 1 所示。其静平台和动平台的外接圆半径分别为 0.175 m 和 0.06 m。各支链柔性杆的杨氏弹性模量 E 为 6.9×10^8 Pa,泊松比 ν 为 0.3,截面为圆形,截面半径为 0.01 m。各杆件的质量都是均匀分布的。

表 1 刚柔耦合并联机器人的仿真物理参数

Tab. 1 Physical parameters of rigid-flexible parallel robot

杆件	1	2	3	动平台
质量/kg	2	0.3	1.2	0.3
长度/m	0.375	0.09	0.815	—

为了验证所述方法的可行性,将并联机构末端执行器的运动轨迹设为平面 $Z_G = -0.8$ m 上半径为 0.1 m 的一个标准圆周,并将额定运动速度设为 0.5 m/s。为使运动轨迹更平滑,这里引入 S-型加减速机制。利用所提出的求解策略对刚柔耦合模型中驱动杆和柔性杆的运动状态进行仿真求解,其中几何约束方程和动力学方程的误差函数阈值分别设为 10^{-8} 和 10^{-6} 。图 5(a)和 5(c)描述了所求的驱动力矩和驱动角位移,由于动平台不再保持平动状态,所以各支链驱动力矩之间以及角位移之间的对称性已被完全破坏。其中,驱动力矩的最大值出现在第二支链,为 -11.1 N·m;最小值出现在第一支链,为 -8.3 N·m;而驱动角位移的正向最大值出现在第一支链,为 9.8° 。图 5(b)和 5(d)将二者与理想刚性并联机构的对应值进行了比较,其偏差值呈现出非线性的变化特征,其中第二支链的驱动力矩偏差值最大为 -0.39 N·m;而第一支链的角度偏差值最大为 0.84° 。各支链柔性杆中心点处

的横向变形与剪切角如图 5(e)所示,二者均呈现出非常规范的周期性变化规律,其中第一支链柔性杆的横向变形最大为 7.73 mm;而剪切角都小于 0.0004° ,由于柔性杆为细长梁,所以符合 Euler-Bernoulli 梁的假设。从以上分析可知,基于逆动力学解的控制方法是通过控制驱动杆的关节变量来合理地控制弹性杆的变形状态,从而保证末端执行器准确平稳地按照理想圆周轨迹进行运动。

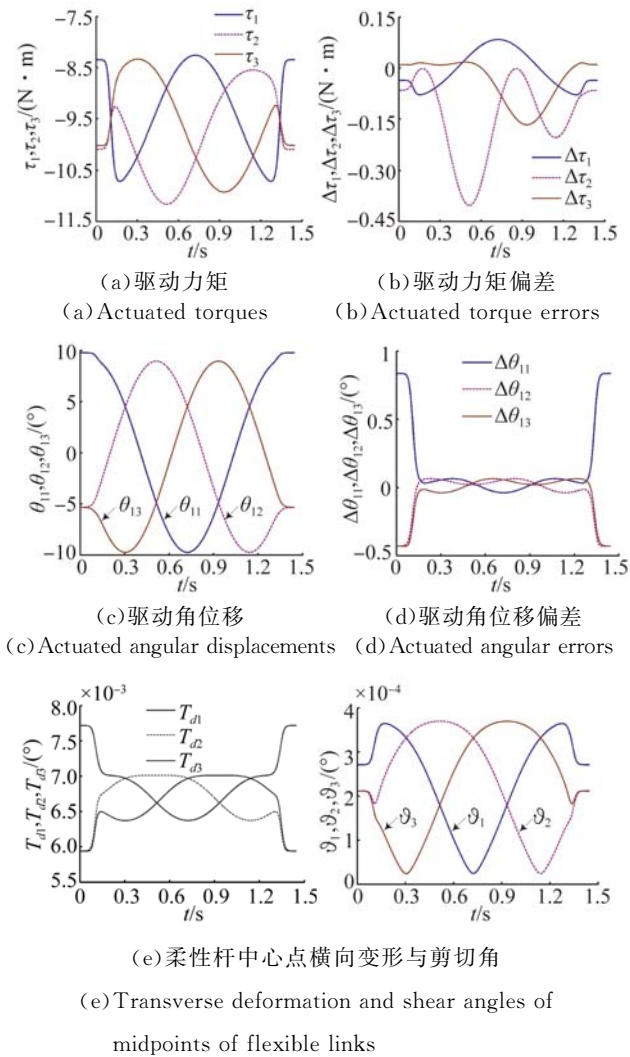


图 5 驱动杆与柔性杆的运动状态

Fig. 5 Motion states of actuated links and flexible links

图 6 给出了末端执行器的运动状态。由于求解过程中动平台不再保持平动状态,所以图 6(a)给出了动平台法向量与 Z_G 轴的夹角,它呈现出周期性的变化规律,其最大值为 5.3° ,出现在起止

位置处;在进入匀速运动段后,该夹角均低于 0.5° ,而且变化过程平稳,没有大幅度振动的现象发生,这说明所求的逆动力学解通过控制驱动杆的运动状态能够实现刚柔耦合机构平稳的轨迹跟踪控制。由于系统模型只能求出 $A_i (i=1,2,3)$ 处的广义坐标值,所以需要末端执行器的运动轨迹进行计算和校核。图 6(b)和 6(d)分别为末端执行器的运动轨迹和运动速度,它们都与理想值十分接近,误差分别低于 $2 \times 10^{-11} \text{ m}$ 和 $3 \times 10^{-8} \text{ m/s}$,如图 6(c)和 6(e)所示,这满足大多数理论分析与工程应用的要求。

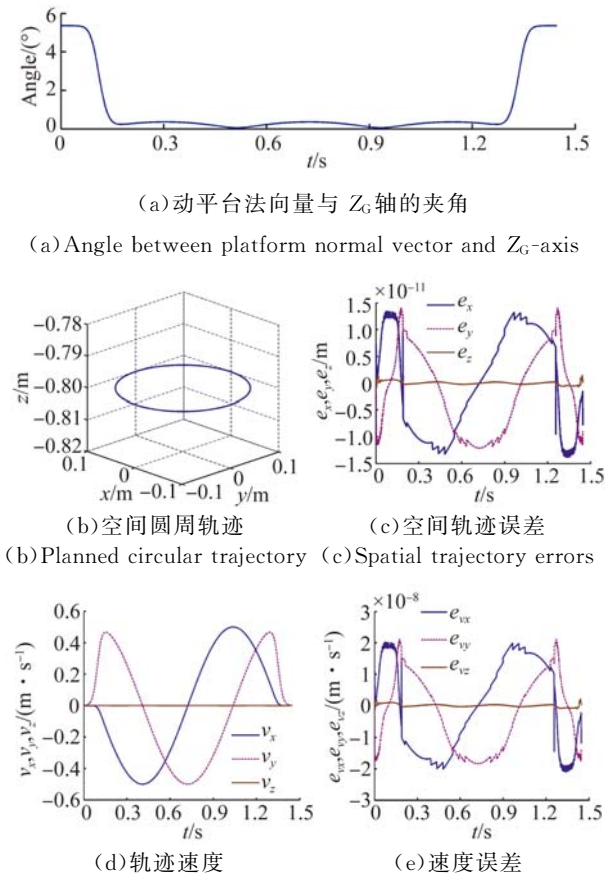


图 6 末端执行器的运动状态

Fig. 6 Motion state of end-effector

在刚柔耦合系统的求解过程中,约束方程和动力学方程的迭代误差如图 7 所示,二者均低于预设值 10^{-8} 和 10^{-6} ,这充分验证了逆动力学瞬态刚体校正法的有效性。本文采用 MATLAB 语言进行建模和仿真。

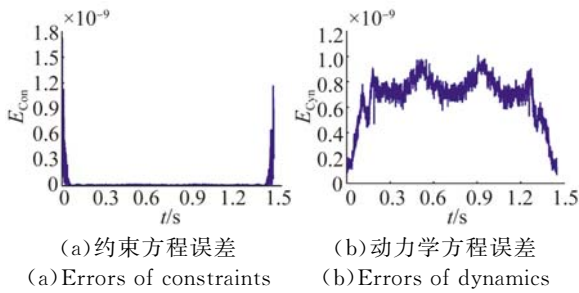


图 7 约束方程与动力学方程的迭代误差

Fig. 7 Iterative errors of constraint and dynamic equations

5.2 控制实验验证

为了验证控制方法的有效性,采用机电一体化设计方法搭建实验平台。该平台包含一个刚柔耦合 3-RRRU 并联机器人样机,其柔性杆的弹性模量为 6.9×10^{10} Pa,其他参数与仿真分析中相同;驱动关节通过高精度减速器由交流伺服电机驱动,并采用绝对位置编码器提供关节角度值,分辨率为 0.005° ;多轴运动控制器采用 Power PMAC,插补周期为 $221 \mu\text{s}$;测量设备采用 FARO 激光跟踪仪,重复定位精度为 0.02 mm 。由于定位靶标的接触面为球面,其圆心到末端执行器的垂直距离为 25 mm ,因此,实际测量的空间轨迹与末端执行器的运动轨迹会存在偏差,如图 8 所示。

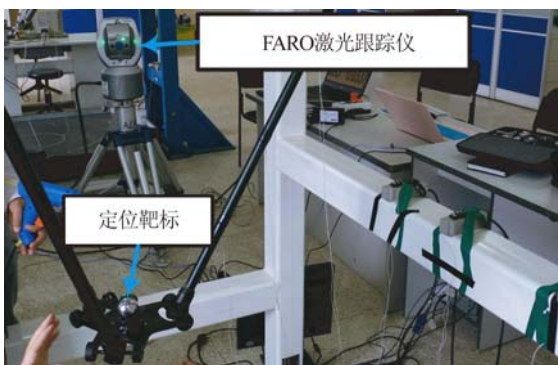


图 8 激光跟踪仪测量系统

Fig. 8 Photo of laser tracker measuring system

刚柔耦合并联机器人的控制实验包含两部分:首先,研究系统的空间定位精度;其次,利用仿真分析中的圆周轨迹研究系统的轨迹跟踪性能。为了便于对比分析,实验过程中分别利用理想刚性模型和刚柔耦合模型的静力学和逆动力学解来

控制机器人,记录并分析比较末端执行器的空间位置和轨迹精度,以验证求解策略的有效性。

控制实验的具体实施过程如下:

(1)实验之前先对系统中的机械设备、电控设备和测量设备进行调试和标定,这包括对运动机构关节零位的确定、控制设备参数的整定与调节、测量设备的初始化与标定工作等。

(2)计算逆动力学模型的稳定数值因果解,将求出的驱动关节位置、力矩等控制量输入控制器,控制器根据插补算法构建被控量完整的状态变化曲线,并将其输出给伺服驱动器进行轨迹跟踪控制。在控制过程中,根据伺服系统内部关节转角、力矩等检测装置,采用 PID 闭环控制方法实现刚柔耦合系统的轨迹跟踪控制。

(3)利用激光跟踪仪对测量靶标的圆心点进行轨迹跟踪测量,实时记录末端执行器的空间运动轨迹坐标,作为后续轨迹精度分析的依据。

在研究空间定位精度时,选取平面 $Z_G = -0.8 \text{ m}$ 上的四个象限点,它们与 Z_G 轴的距离为 0.1 m 。首先利用这些点进行重复定位精度研究,此时无论基于何种理论模型进行控制,其重复定位精度都能达到 0.02 mm 。然后,将二种模型下测出的绝对定位误差进行对比,如图 9 和表 2 所示。由两次测量结果可知机器人的空间定位精度得到了明显提高。其中,理想刚性模型(补偿前)定位误差的最大值为 0.960 mm ,最小值为 0.838 mm ,平均误差为 0.895 mm ;而刚柔耦合模型(补偿后)定位误差的最大值为 0.491 mm ,最小值为 0.410 mm ,平均误差为 0.454 mm 。因此,补偿前后平均误差提高了 0.441 mm ,初步验证了所述控制方法的有效性。

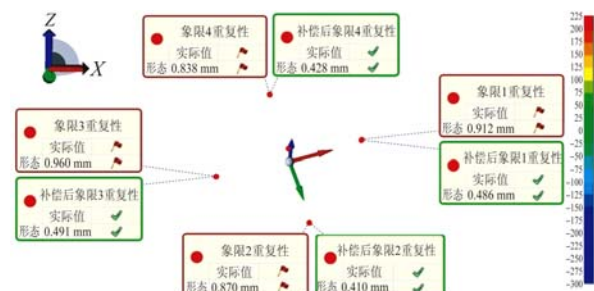


图 9 空间点定位精度的比较

Fig. 9 Comparison of position accuracy for spatial points

表 2 刚柔耦合并联机器人的定位误差

Tab. 2 Positioning errors of rigid-flexible parallel robot

空间定位误差	象限点 1	象限点 2	象限点 3	象限点 4
刚性模型/mm	0.912	0.870	0.960	0.838
刚柔耦合模型/mm	0.486	0.410	0.491	0.428

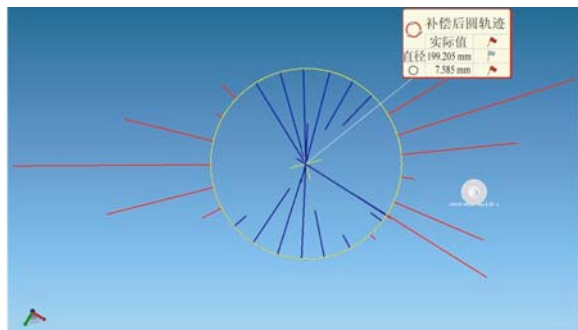
表 3 圆周轨迹跟踪测量结果

Tab. 3 Tracking results of circular trajectory

实验类型	拟合	圆度	最大	最小
	直径/mm	误差/mm	误差/mm	误差/mm
刚性模型	199.205	7.585	4.501	0.135
刚柔耦合模型	199.231	7.169	4.036	0.039

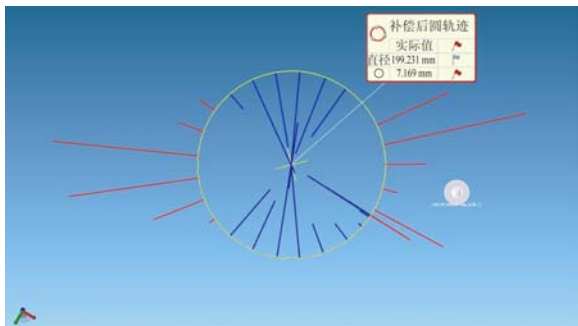
在研究空间轨迹跟踪性能时,利用激光跟踪仪分别测量理想刚性模型和刚柔耦合模型下的圆周轨迹,如图 10 所示。图中圆弧上引出的直线段表示运动轨迹与拟合圆之间的误差,其长度值代表拟合误差的幅值。由表 3 可知,补偿前后的拟合直径差距不大,为 0.026 mm,但圆度误差却降低了 0.416 mm,轨迹最大误差值降低了 0.465 mm,最小误差值降低了 0.096 mm。由图 10 可知,补偿后大部分采样点处的轨迹误差要比补偿前更低,虽然也有几处采样点的轨迹误差变大的现象发生,但是通过综合对比分析可知,补偿后系统的圆度误差和最大误差都明显降低,系统的整体轨迹跟踪性能得到了提升。因此,基于刚柔混合动力学模型的控制效果要优于基于理想刚性模型的控制效果。这进一步验证了所述控制方法的有效性。

综合表 2 和表 3 的测量结果可知,基于刚柔耦合模型的控制方法在空间定位精度和轨迹跟踪精度上都优于基于刚性模型时的精度。这说明利用稳定因果解实施控制能提高刚柔耦合并联机器人的空间轨迹精度,从而验证了该方法的有效性。必须指出,实验过程中定位靶标的实际测量轨迹与末端执行器的真实运动轨迹存在偏差。由于单台激光跟踪仪无法测量动平台的旋转运动,所以该偏差很难通过定量计算加以分析和补偿。为解决该问题,未来可通过修改动平台的结构来提高系统的轨迹测量精度。



(a)理想刚性模型

(a) Ideal rigid dynamics



(b)刚柔混合模型

(b) Flexible dynamics

图 10 刚柔耦合并联机器人的轨迹跟踪实验

Fig. 10 Trajectory tracking experiments of rigid-flexible parallel manipulator

6 结 论

本文针对空间刚柔耦合并联机构提出了一种基于瞬态刚体校正法的逆动力学模型求解方法,用来构建此类机构的非线性控制策略。该方法能有效地解决空间闭链机构多体动力学模型在求解过程中出现的相容性问题,改善系统的综合收敛性能,由此构建的控制策略可提高并联机构的轨迹跟踪精度。针对 3-RRRU 刚柔耦合并联机器人进行了仿真分析与实验验证,结果表明:约束方程和动力学方程的迭代误差均低于预设值 10^{-8} 和 10^{-6} ;与基于刚性模型的控制方法相比,该方法空间定位误差的最大值为 0.491 mm,最小值为 0.410 mm,平均误差提高了 0.441 mm;圆形轨迹下的最大跟踪误差降低了 0.465 mm,圆度误差降低了 0.416 mm。所构建的控制策略提高了该机构的轨迹跟踪精度,对设计同类刚柔耦合机构的控制方法具有重要的借鉴意义和应用参考价值。

参考文献:

- [1] YAVUZ Ş, MALGACA L, KARAGÜLLE H. Vibration control of a single-link flexible composite manipulator [J]. *Composite Structures*, 2016, 140: 684-691.
- [2] 薛志鹏, 厉明, 贾宏光, 等. 模态方法下的悬臂梁/类悬臂梁弹性构件的动力学建模 [J]. *光学精密工程*, 2015, 23(8): 2250-2257.
XUE ZH P, LI M, JIA H G, *et al.*. Modal method based dynamic analysis of cantilever type elastic structures [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(8): 2250-2257. (in Chinese)
- [3] YU Y Q, DU ZH C, YANG J X, *et al.*. An experimental study on the dynamics of a 3-RRR flexible parallel robot [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(5): 992-997.
- [4] 赵磊, 赵新华, 周海波, 等. 并联测量机柔性动力学建模与误差耦合 [J]. *光学精密工程*, 2016, 24(10): 2471-2479.
ZHAO L, ZHAO X H, ZHOU H B, *et al.*. Flexible dynamic modeling and error coupling of parallel measuring machine [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(10): 2471-2479. (in Chinese)
- [5] WANG X Y, MILLS J K. Dynamic modeling of a flexible-link planar parallel platform using a substructuring approach [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(6): 671-687.
- [6] YANG Z, SADLER J P. A one-pass approach to dynamics of high-speed machinery through three-node lagrangian beam elements [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(7): 995-1007.
- [7] ZHANG X P, MILLS J K, CLEGHORN W L. Coupling characteristics of rigid body motion and elastic deformation of a 3-PRR parallel manipulator with flexible links [J]. *Multibody System Dynamics*, 2009, 21(2): 167-192.
- [8] YAKOUB R Y, SHABANA A A. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Implementation and applications [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2000, 123(4): 614-621.
- [9] SHABANA A A. *Dynamics of Multibody Systems* [M]. 4th ed.. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [10] GARCÍA-VALLEJO D, MAYO J, ESCALONA J L, *et al.*. Efficient evaluation of the elastic forces and the Jacobian in the absolute nodal coordinate formulation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 35(4): 313-329.
- [11] HUSSEIN B, NEGRUT D, SHABANA A A. Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 54(4): 283-296.
- [12] CHUNG J, HULBERT G M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(2): 371-375.
- [13] DE JALÓN J G, BAYO E. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge* [M]. New York: Springer, 1994.
- [14] ZHANG X P, MILLS J K, CLEGHORN W L. Experimental implementation on vibration mode control of a moving 3-PRR flexible parallel manipulator with multiple PZT transducers [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2010, 16(13): 2035-2054.
- [15] NACHBAGAUER K, GRUBER P, GERSTMAYR J. Structural and continuum mechanics approaches for a 3D shear deformable ANCF beam finite element: Application to static and linearized dynamic examples [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2012, 8(2): 021004-021004-7.

作者简介:



刘凉(1978—),男,黑龙江哈尔滨人,博士,讲师,2016年于天津大学获得博士学位,主要从事机器人动力学与智能控制技术等方面的研究。E-mail: liuliang_tjut@126.com



赵新华(1962—),男,吉林辽源人,博士,教授,博士生导师,2000年于天津大学获得博士学位,主要从事机器人技术和机电一体化技术方面的研究。E-mail: xinhua Zhao@tjut.edu.cn