

文章编号 1004-924X(2018)04-0906-10

敏捷卫星姿态机动的奇异最优控制

印明威, 李京阳, 宝音贺西*

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘要: 研究姿态机动的最优控制时, 通常只考虑最优解为 Bang-Bang 控制的情况, 假设了开关函数仅在有限个孤立点为零, 本文对假设之外的奇异最优控制进行探讨。以球对称光学敏捷卫星为对象, 根据姿态机动最优控制问题的数学模型, 证明了开关函数的特殊性质。在不同边界条件下, 结合一阶必要条件、广义勒让德-克莱伯西条件等, 分析了最优控制包含奇异区间的所有情况, 得到了奇异控制最优性的必要条件。结果表明, 对于起止角速度为 0, 乃至起止角速度相同的所有工况, 可以直接排除奇异控制最优的可能性, 最优控制中各个分量在 +1 和 -1 之间切换; 而起止角速度相异时, 存在奇异控制最优的情况, 且奇异分量的开关函数在全过程均为 0, 奇异阶数为无穷阶, 文中给出了相应算例予以佐证。

关键词: 刚体; 敏捷卫星; 时间最优; 姿态机动; 奇异最优控制

中图分类号: V448.22 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20182604.0906

Singular optimal control for three-axis reorientation of an agile satellite

YIN Ming-wei, LI Jing-yang, BAOYIN He-xi*

(School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

* Corresponding author, E-mail: baoyin@tsinghua.edu.cn

Abstract: The possibility of singular optimal control in the time-optimal reorientation of an agile satellite with independent three-axis control was investigated in this paper. Generally, it is assumed that the switching functions take the value zero only at isolated points, which dictates that the controls are "bang-bang". However, some new results were found in this paper. An inertially symmetric rigid body was considered. Based on the optimum model, two propositions about the switching functions were derived. All possible optimal control strategies under different boundary conditions were identified. These included bang-bang solution, one control singular, two controls singular and all three controls singular. Using Pontryagin's principle and the Generalized Legendre-Clebsch condition, necessary conditions for optimality of singular control were obtained. The research illustrated that all three control components could not be simultaneously singular at any point on an optimal path. For rest to rest maneuvers, singular control was proved to be not optimal. Actually, for the boundary conditions that the initial and final angular velocities were equal, the possibility of singular optimal control could be completely dismissed. The components of the optimal control switch between +1 and -1. On the

收稿日期: 2017-08-09; 修订日期: 2017-12-08.

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (No. 11372150); 中国博士后科学基金资助项目 (No. 2016T90086); 中国博士后科学基金面上资助项目 (No. 2015M581080); 国家自然科学基金资助项目 (No. 11602123)

other hand, the cases of singular optimal control exist while the final angular velocity was different from the initial one, the switching function of the singular component remained at zero all the time, and the order of the singular control was infinite. Numerical examples of time-optimal solutions with one control singular and two controls singular were presented.

Key words: rigid spacecraft; agile satellite; timeoptimal; reorientation; singular optimal control

1 引言

敏捷卫星^[1]是指具有三轴快速机动能力的光学遥感卫星,能够在短时间内对不规则条带目标、区域目标乃至多个目标进行遥感观测,对光学成像技术的发展意义重大,在光学监测^[2]及军事侦察^[3]等方面具有广泛的应用前景。欧美国家的研发不断跟进,而我国的第一颗敏捷卫星也正处于研制当中^[4-6]。时间最优的姿态机动问题是敏捷卫星快速机动的基本问题^[7-8],因而备受关注,然而目前为止,由于该问题的强非线性,仍然没有严格的解析解^[9]。

Li 和 Bainum^[10]等学者一度认为经典的欧拉定轴转动是最优控制或接近最优控制,而 Bilimoria 和 Wie^[11]的研究结果表明,一般情况下,欧拉定轴转动并不是时间最优的,他们以球对称刚体航天器为研究对象,发现航天器机动 180° 时,求得的局部最优解要比欧拉旋转快 8.514%; Bai 和 Junkins^[12]在该基础上,又发现了新的局部最优解,结果比 Bilimoria 和 Wie 的略优; Li^[13]通过不同的数值算法,再次验证了该局部最优解的可靠性,并给出了 $1^\circ \sim 180^\circ$ 不同机动角度最优控制的数值结果,该结果也是目前公开的最优结果;还有一些学者通过不同的姿态描述方式建模,对该问题进行了优化,结果基本一致^[14-15]。尽管目前有了一个较为可信的数值结果,但上述结果在利用极大值原理^[16]推导时,均假设了开关函数仅在有限个孤立点为零,即假定了最优解为正常的 Bang-Bang 控制,忽略了对奇异最优控制的考虑。而且上述研究仅考虑了卫星机动时,起止角速度为零的情况,对于敏捷卫星而言,其姿态机动的起止角速度可以是任意的,因此边界条件也更为复杂。

极大值原理通过开关函数的正负来确定最优控制,当开关函数的值为零时,最优控制的值无法确定。如果开关函数仅在有限个孤立点为零,不

论该点上的控制量如何,并不影响控制效果。如果开关函数在某一个时间区间恒等于零,称该区间的控制为奇异控制^[17],需要补充条件才能确定该区间的最佳控制,此时的最佳控制称为奇异最佳控制,该时间区间称为奇异区间^[18]。显然,如果最佳控制为奇异控制,其求解会困难很多,这也是通常假设最佳控制为正常 Bang-Bang 控制的原因。然而 Martinon^[19]等诸多学者的研究中均遇到了奇异控制为最佳控制的情况, Seywald 和 Kumar^[20]甚至给出了一个停车场的算例,证明了奇异控制有可能是最佳控制的唯一解。因此,有必要对卫星机动问题中,奇异控制为最佳控制的可能性进行分析。

Bilimoria 和 Wie^[11]通过一阶必要条件,排除了 3 个控制分量在某时间段同时奇异的特殊情况, Lee 等学者^[21]的研究也给出了相同的结论。Fleming 等^[22]结合 Krener 定理的研究表明,如果奇异控制为最佳控制,则奇异控制的阶数至少是四阶。进一步地, Seywald 和 Kumar^[20]对奇异最佳控制的一般情况进行了研究,从协态变量的角度,给出了奇异控制最优性的一些必要条件,此外, Shen 和 Tsiotras^[23]对仅有 2 个控制量的非对称刚体也做了类似的分析。但由于协态变量没有具体物理意义,所以在实际工程中,无法通过这些必要条件来判断最佳控制的形式。目前,即使是从静止状态机动到静止状态的简单情况,也无法排除奇异最佳控制的可能。

本文以三轴控制的球对称刚体敏捷卫星为对象,结合一阶必要条件和广义勒让德-克莱伯西条件^[24],对所有可能出现的奇异最佳控制进行了分析,包括 3 个、2 个和 1 个控制分量奇异的情况。深入探讨了奇异控制为最佳控制的必要条件、控制方式和最优时间,边界条件不仅限于起止角速度为零的传统情况,对任意起止角速度的工况均进行了考虑。

2 姿态机动优化问题

2.1 动力学模型

对称刚体敏捷卫星姿态机动的几何模型如图 1, 引入以卫星质心为原点的惯性坐标系 $O-XYZ$ 和本体坐标系 $O-xyz$, 本体系的三轴为惯量主轴, 初始时两坐标系重合。姿态机动后, 卫星本体系统在惯性系下发生变化, 如图中右方的终止状态所示。文中所有的物理量均已进行无量纲化处理^[11]。

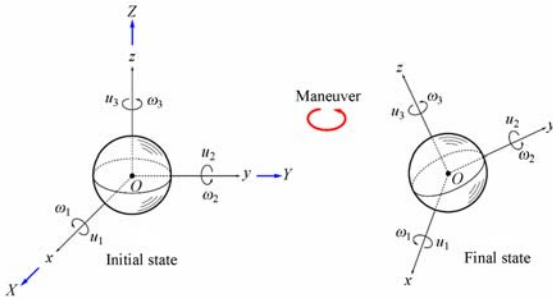


图 1 敏捷卫星姿态机动几何模型示意图

Fig. 1 Model for reorientation of inertially symmetric agile satellite

卫星机动的欧拉旋转方程为:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$, ω_i ($i=1, 2, 3$) 为角速度分量; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, u_i 为作用在本体系主轴上的力矩, 满足如下约束:

$$|u_i| \leq 1, i=1, 2, 3, \quad (2)$$

与文献[11]一致, 用四元数 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ 来描述卫星的姿态, 运动方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

起止姿态角和角速度依次为 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_f$, 均为任意给定的值, 定义起止角速度差 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ 为:

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = [\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3] = [\omega_{f1} - \omega_{01}, \omega_{f2} - \omega_{02}, \omega_{f3} - \omega_{03}], \quad (4)$$

其中 $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ 为 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的各项分量, $\omega_{f1}, \omega_{f2}, \omega_{f3}$ 为 $\boldsymbol{\omega}_f$ 的各项分量。

该问题的优化指标为:

$$J = \int_0^{t_f} dt, \quad (5)$$

其中 t_f 为最终时间, 由式(1)和式(3)得哈密顿函数为:

$$\mathbf{H} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}_\omega^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_\omega = [\lambda_{\omega_1}, \lambda_{\omega_2}, \lambda_{\omega_3}]^T$, $\boldsymbol{\lambda}_q = [\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \lambda_{q_3}, \lambda_{q_4}]^T$ 分别为相应的协态变量, 协态方程为:

$$\dot{\lambda}_{\omega_i} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega_i}, i=1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}_{q_j} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j}, j=1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

由极大值原理可得最优控制为:

$$u_i = \begin{cases} +1, \lambda_{\omega_i} < 0 \\ -1, \lambda_{\omega_i} > 0 \\ u_i, \lambda_{\omega_i} = 0 \end{cases} \quad i=1, 2, 3, \quad (9)$$

其中: λ_{ω_i} 为开关函数, u_i 表示奇异控制值。

根据终端条件和哈密顿函数沿最优解等式为常数, 可得:

$$\mathbf{H} = 0. \quad (10)$$

2.2 开关函数的性质

对本问题的开关函数进行分析后, 可得到如下两条特殊性质。

性质 1: 若某一瞬时 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\omega = \mathbf{0}$, 则在整个时间区间上均有 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\omega = \mathbf{0}$;

性质 2: 倘若对称刚体机动问题的最优解为奇异最优控制, 则奇异控制的阶数一定为无穷阶。

证明如下:

将式(7)对时间求导, 可得到开关函数关于时间的二阶导数:

$$\ddot{\lambda}_{\omega_i} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega_i} \right], i=1, 2, 3, \quad (11)$$

将式(3)和式(8)代入式(11)整理后可得:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\lambda}_{\omega_1} \\ \ddot{\lambda}_{\omega_2} \\ \ddot{\lambda}_{\omega_3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{\omega_1} \\ \dot{\lambda}_{\omega_2} \\ \dot{\lambda}_{\omega_3} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

即:

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_\omega = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\omega, \quad (13)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 为角速度分量构成的三阶反对称矩阵, 令

$$\boldsymbol{\Gamma} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\omega, \quad (14)$$

则有:

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Gamma}, \quad (15)$$

根据线性齐次微分方程组的性质^[25], 若定义域上某一点满足 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}$, 则在整个定义域上有 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}$ 。因此, 可以得到关于开关函数的性质 1。

结合性质 1 来分析奇异控制的阶数。根据奇

异最优控制的必要条件^[26-28],即广义勒让德-克萊伯西条件:

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \lambda_{\omega_i} \geq 0, q \in N, \quad (16)$$

使得左边部分不等于零的最小整数 q 称为奇异控制的阶数^[17]。对式(13)求导:

$$\lambda_{\omega}^{(3)} = (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}}) \dot{\lambda}_{\omega}, \quad (17)$$

结合式(13)来看, λ_{ω} 的所有高阶导数必定是关于 $\dot{\lambda}_{\omega}$ 的线性关系,倘若最优控制中包含奇异区间,则有:

$$\dot{\lambda}_{\omega} \equiv 0, \quad (18)$$

说明 λ_{ω} 的所有高阶导数及其各项系数均为零,代入式(16)来看,左边部分恒为零。因此可以得到奇异控制的阶数为无穷阶,性质2得证。

3 奇异最优控制

敏捷卫星时间最优的姿态机动问题,最优控制除了常见的 Bang-Bang 控制外,还有可能是奇异最优控制。因为3个主轴的控制分量独立解耦,所以奇异最优控制的情况可分为3种:

(1) 在某时间段内,3个控制分量均奇异;

(2) 在某时间段内,两个控制分量奇异,一个控制分量为 Bang-Bang 控制;

(3) 在某时间段内,一个控制分量奇异,两个控制分量为 Bang-Bang 控制。

由于卫星模型为对称刚体,所以每种情况只需讨论一种假设,不必讨论3个控制分量的所有组合下面就这3种情况逐一进行分析。

3.1 3个控制分量奇异

3个分量同时奇异的情况在 Bilimoria 和 Wie^[11]的研究中已被排除,此处不再赘述。

值得注意的是,从几何角度来看,控制约束要求控制矢量的端部位于一个实心立方体内,由于3个控制分量不可能同时奇异,至少得有一个控制分量为 Bang-Bang 控制,这就说明最优控制的矢量端部不可能位于约束实心体的内部,其容许范围可由实心立方体缩小至立方体的表面。

3.2 两个控制分量奇异

假设在某时间区间 $t \in [t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$, u_1 , u_2 两个控制分量奇异, u_3 为 Bang-Bang 控制,有:

$$\lambda_{\omega_1} = \lambda_{\omega_2} = 0, \quad (19)$$

对时间求导:

$$\dot{\lambda}_{\omega_1} = \dot{\lambda}_{\omega_2} = 0, \quad (20)$$

再次对时间求导,由式(12)有:

$$\ddot{\lambda}_{\omega_1} = -\dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_2 + \dot{\lambda}_{\omega_2} \omega_3 = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{\lambda}_{\omega_2} = \dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_1 + \dot{\lambda}_{\omega_1} \omega_3 = 0, \quad (22)$$

将式(20)代入式(21)、(22)得:

$$\ddot{\lambda}_{\omega_1} = -\dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_2 = 0, \quad (23)$$

$$\ddot{\lambda}_{\omega_2} = \dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_1 = 0. \quad (24)$$

根据 $\dot{\lambda}_{\omega_3}$ 的取值,分如下两类情况讨论:

(1) 若该区间内,任意时刻均有 $\dot{\lambda}_{\omega_3} \neq 0$

由式(23)、(24)易得:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad (25)$$

将式(23)和式(24)继续对时间求导,结合式(25)可得开关函数的奇异控制分量对时间的3阶导数:

$$\lambda_{\omega_1}^{(3)} = -\dot{\lambda}_{\omega_3} u_2 = 0, \quad (26)$$

$$\lambda_{\omega_2}^{(3)} = \dot{\lambda}_{\omega_3} u_1 = 0. \quad (27)$$

此时,控制分量 u_1 、 u_2 前的系数均不等于零,显含于上述两式中。Kelley^[28]等学者的研究表明,最优控制量第一次显含在关系式中,一定是在开关函数对时间求偶数次导数时;Bell^[17]等学者也得出,如果开关函数对时间求奇数次导数后,控制分量显含在关系式中,则该控制律一定不是最优的。由此可见,当任意时间均有 $\dot{\lambda}_{\omega_3} \neq 0$ 时,该奇异情况并不是最优控制。

(2) 若该区间内,存在某瞬时 $\dot{\lambda}_{\omega_3} = 0$

根据开关函数的性质1可得,在整个时间区间 $[t_0, t_f]$ 均有 $\dot{\lambda}_{\omega_3} \equiv 0$, 则

$$\lambda_{\omega_3} \equiv C_3 \neq 0, \quad (28)$$

其中 C_3 为非零常数。根据最优控制式(9)可知,控制分量 u_3 为:

$$u_3 \equiv -\text{sgn}(\lambda_{\omega_3}), \quad (29)$$

sgn 表示符号函数,结合必要条件式(10),整理可得:

$$\mathbf{H} = 1 - \text{sgn}(\lambda_{\omega_3}) \lambda_{\omega_3} = 0. \quad (30)$$

此时,可以求得在整个时间区间上的控制分量 u_3 对应的开关函数和最优控制为:

$$\lambda_{\omega_3} \equiv 1, u_3 \equiv -1 \text{ 或 } \lambda_{\omega_3} \equiv -1, u_3 \equiv 1. \quad (31)$$

说明若最优控制为奇异控制,且其中两个控制分量奇异,则另一个控制分量一定恒为1或-1。那么,由式(1)两边积分后取绝对值可得

$$|\Delta \omega_3| = t_f, \quad (32)$$

由物理意义可知 $t_f > 0$,这就表明 $|\Delta \omega_3|$ 也必须大于零。对于起止角速度均为0的情况,显然

与式(32)相矛盾,那么两个控制分量奇异的情况一定不是从静止机动到静止的最优控制。

进一步来看,对于起止角速度相同的所有情况,均无法满足必要条件式(32),所以也可以予以排除。由此可见,只有起止角速度不相等时,最优控制才有可能为两个分量奇异的情况,而且可以确定,最优控制的时间 t_f 就是非奇异分量对应的角速度差的绝对值。

对于卫星机动问题,令 $t_{\Delta\omega_i}^*$ 表示仅满足第 i 个角速度分量约束,而不考虑其他边界约束条件的最短时间,根据欧拉旋转方程式(1)和力矩约束式(2),可得 $t_{\Delta\omega_i}^* = |\Delta\omega_i|$,令 t_f^* 表示同时满足所有约束的最优机动时间。由于满足所有约束的可行解域是满足部分约束可行解域的子集,所以满足所有约束的最优解不会比仅满足部分约束的更优,那么可以得到如下关系式:

$$t_f^* \geq \max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|) \geq |\Delta\omega_3|, \quad (33)$$

\max 表示取最大值,结合式(32)有:

$$t_f^* = |\Delta\omega_3| = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|) > 0, \quad (34)$$

这就要求最优控制时间为其可能达到的极限,而且在如此短的时间内,要求满足所有的约束,该条件是极为苛刻的。

综上,两个控制分量奇异的情况为最优控制的必要条件是 $t_f^* = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|) > 0, \dot{\lambda}_\omega \equiv 0$,非奇异项对应的角速度差的绝对值最大,该分量对应的开关函数恒为 1 或 -1,相应的控制分量恒为 -1 或 1。

3.3 一个控制分量奇异

假设在某一时间区间 $t \in [t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$, u_1 奇异, u_2, u_3 为 Bang-Bang 控制,有:

$$\lambda_{\omega_1} = 0, \quad (35)$$

对时间求导:

$$\dot{\lambda}_{\omega_1} = 0, \quad (36)$$

对时间再次求导,结合式(12)有:

$$\dot{\lambda}_{\omega_1} = -\dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_2 + \dot{\lambda}_{\omega_2} \omega_3 = 0, \quad (37)$$

$$\dot{\lambda}_{\omega_2} = \dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_1, \quad (38)$$

$$\dot{\lambda}_{\omega_3} = -\dot{\lambda}_{\omega_2} \omega_1, \quad (39)$$

将式(37)~(39)对时间继续求导,得:

$$\lambda_{\omega_1}^{(3)} = -\dot{\lambda}_{\omega_3} u_2 + \dot{\lambda}_{\omega_2} u_3 + \omega_1 \omega_2 \dot{\lambda}_{\omega_2} + \omega_1 \omega_3 \dot{\lambda}_{\omega_3} = 0, \quad (40)$$

$$\lambda_{\omega_2}^{(3)} = \dot{\lambda}_{\omega_3} u_1 - \dot{\lambda}_{\omega_2} \omega_1^2, \quad (41)$$

$$\lambda_{\omega_3}^{(3)} = -\dot{\lambda}_{\omega_2} u_1 - \dot{\lambda}_{\omega_3} \omega_1^2. \quad (42)$$

据前述分析,奇异最优控制中,开关函数对时间求奇数阶导数时,奇异控制分量前的系数为零,那么有:

$$\dot{\lambda}_{\omega_2} = \dot{\lambda}_{\omega_3} = 0, \quad (43)$$

由式(36)、(43)和开关函数性质 1 可得,在全过程有:

$$\dot{\lambda}_\omega = 0. \quad (44)$$

因为 u_1 奇异, u_2, u_3 为 Bang-Bang 控制,所以:

$$\lambda_{\omega_2} \equiv C_2 \neq 0, \quad (45)$$

$$\lambda_{\omega_3} \equiv C_3 \neq 0, \quad (46)$$

其中 C_2, C_3 均为非零常数,由最优控制式可得:

$$u_2 \equiv 1 \text{ 或 } u_2 \equiv -1, \quad (47)$$

$$u_3 \equiv 1 \text{ 或 } u_3 \equiv -1, \quad (48)$$

将式(1)两边积分后取绝对值,式(47)要求 $t_f = |\Delta\omega_2|$,而式(48)要求 $t_f = |\Delta\omega_3|$,这就要求 $t_f = |\Delta\omega_2| = |\Delta\omega_3|$,而且同时得满足第一个角速度分量的边界条件, $t_f > 0$ 。

由此可以得到该奇异情况为最优控制的必要条件: $t_f^* = |\Delta\omega_2| = |\Delta\omega_3| \geq |\Delta\omega_1| > 0, \dot{\lambda}_\omega \equiv 0$,非奇异项对应的角速度差的绝对值最大,控制分量恒为 1 或 -1,对应的开关函数恒为非零常数。

值得注意的是,本文研究的对象为对称刚体模型,上述必要条件中各分量的下标是可以互换的。类似式(33)、(34),最优控制时间为其可达到的极限,而且要求角速度变化较大的两个分量,其变化量的绝对值相等。

3.4 分析与讨论

综合上文对所有奇异情况的讨论,奇异控制最优的必要条件为 $t_f^* = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|) > 0$,非奇异项对应的角速度差的绝对值最大,相应的控制分量恒为 1 或 -1。

该条件要求当时间 $t_f = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|)$ 时,该问题有可行解,而且该时间就是最优时间,起止角速度差中绝对值最大的分量一定大于零。只有满足这些条件时,才有可能出现奇异最优控制。由开关函数的性质 2 可得,奇异控制的阶数一定为无穷阶。对于起止角速度均为零的情况, $\max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|) = 0$,显然不满足上述必要条件,起止角速度相同的所有情况均与此同理,这就排除了起止角速度相同时,奇异控制为最优解的可能,最优控制的各个分量一定

为 Bang-Bang 形式。Bilimoria 和 Wie^[11] 研究了卫星绕 Z 轴机动 180° 的问题,起止角速度均为 0,他们通过数值结果说明了非 Bang-Bang 形式的欧拉定轴转动不是最优解,在这里,则从理论上得到了解释。

与 Seywald 等学者^[20]的研究成果相比,这一必要条件具有明确的物理意义,可以直接用于敏捷卫星的优化计算,算法流程如图 2 所示。根据给定的边界条件,先令 $t_f = \max(|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3|)$,判断该条件下,该问题是否有可行解,如果有,则该可行解即为最优控制;如果没有,则可以排除其最优解为奇异最优控制的可能,而不再对开关函数的形式进行假设,直接利用打靶法求得最优控制即可。

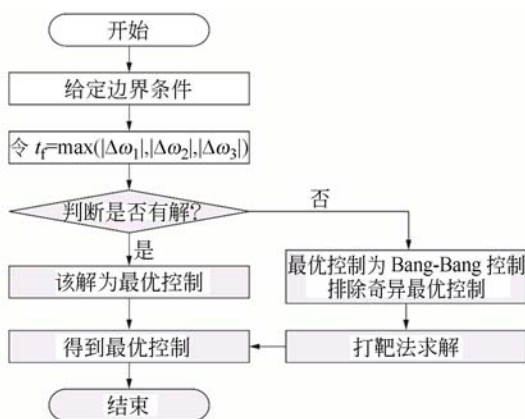


图 2 利用必要条件求解最优控制的算法流程图

Fig. 2 Procedure diagram of solving the optimal solution using the necessary condition

从几何层面来看,前文已证明了最优控制矢量的端部一定位于力矩约束立方体的表面。对于起止角速度相同的情况,由于其最优控制的各个分量一定是 Bang-Bang 控制,那就说明最优控制的容许范围可进一步缩小至立方体的 8 个顶点。起止角速度相异时,最优控制的容许范围为立方体的 6 个表面。

4 数值算例及分析

根据以上分析,最优控制的形式有 3 种可能: Bang-Bang 控制,两个控制分量奇异和一个控制分量奇异。Bang-Bang 控制的数值算例很常见,在文献[11-13]中研究的算例均属于这类情况。对于起止角速度相异的情况,当满足上文所述的

必要条件时,最优控制可能为两个或一个控制分量奇异的形式,这一点是本文的新发现。下面通过数值算例予以说明,其动力学模型均与前文一致,只是边界条件发生变化。

4.1 两个控制分量奇异

令初始姿态角为 $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$,末端姿态角为 $\mathbf{q}_f = [0 \ 0 \ \sin \frac{1}{4} \ \cos \frac{1}{4}]$,初始角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]$,末端角速度为 $\boldsymbol{\omega}_f = [0 \ 0 \ 1]$ 。

起止角速度中,仅第三个分量发生变化,即 $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0, \Delta\omega_3 = 1$ 。由欧拉旋转方程式来看,控制力矩及角速度分量独立解耦。若仅考虑第 1 个或第 2 个角速度分量的边界条件,控制分量保持为 0 即可,最短时间为 $t_{\Delta\omega_1}^* = t_{\Delta\omega_2}^* = 0$ 。若仅满足第 3 个角速度分量的约束,由 $\Delta\omega_3 = \int_0^{t_{\Delta\omega_3}^*} \mathbf{u}_3(t) dt$,令 \mathbf{u}_3 恒为最大值 1,可得最短时间为 $t_{\Delta\omega_3}^* = \Delta\omega_3 = 1$ 。如果同时满足 3 个角速度分量约束,则最短时间为 $\max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$,此时 \mathbf{u}_3 恒为 1, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 在满足边界条件的基础上,可以取任意值,有无穷多种解。倘若将姿态角的边界约束也考虑进来,满足所有条件,则最优时间 $t_f^* \geq \max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = \Delta\omega_3 = 1$ 。显然 $\max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$ 为最优时间的极限,如果 $t_f = \max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$ 时,该问题有可行解,那么该可行解必然就是最优控制。

因为 GPOPS^[29] 软件包具有强大的优化计算能力,且是许多学者采用过的开源代码^[14],可信度较高,所以本文选用 GPOPS 软件包进行优化计算。本质上 GPOPS 采用了伪谱法^[30]来离散两点边值问题,然后结合非线性规划手段进行求解,所以可以利用伪谱法的乘子等价映射关系计算协态变量。

将本文建立的动力学模型及上述边界条件代入 GPOPS 优化,可得最优控制及角速度变化如图 3 所示, \mathbf{u}_3 恒等于 1,为 Bang-Bang 控制形式,而 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 却恒为 0,并非在 +1 与 -1 之间切换的 Bang-Bang 控制,它们对应的开关函数恒为 0,根据定义,这就表明 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 为奇异控制,该算例的最优解为有两个控制分量奇异的奇异最优控制。由于 3 个力矩分量对角速度的控制独立解耦, $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ 始终为 0,而 $\boldsymbol{\omega}_3$ 则保持斜率不变,一直上升。通常关于开关函数的假设,则忽略了该奇异最优控制。

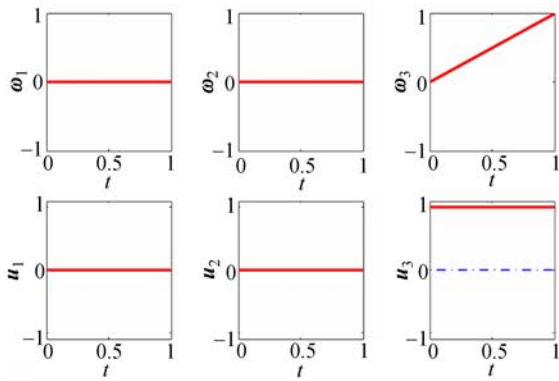


图 3 2 个控制分量奇异时的角速度 ω 和最优控制 u
Fig. 3 Time histories of the components of the ω and u in a two controls singular case

此时卫星的姿态角 q 变化过程如图 4, q_1 和 q_2 恒为 0, 未发生变化。图 5 展示了卫星机动全过程的三维图, 图中坐标轴为与卫星固连的本体

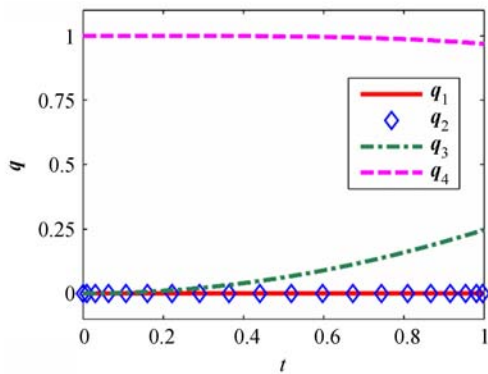


图 4 2 个控制分量奇异时的姿态角 q
Fig. 4 Quaternion histories in a two controls singular case

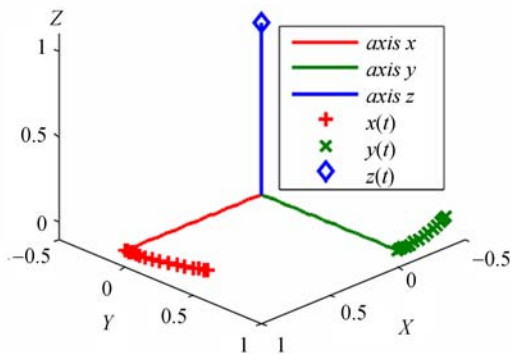


图 5 2 个控制分量奇异时卫星姿态机动的三维图
Fig. 5 3D representation of solution for a two controls singular case

系, 3 种不同的符号, 分别表示了 3 个轴矢量端部的运动轨迹。可以看出, 本质上该最优控制是卫星绕 Z 轴的欧拉定轴转动, 这就说明起止角速度不相同, 欧拉定轴转动为最优解的情况是存在的。

4.2 一个控制分量奇异

令初始姿态角为 $q_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, 末端姿态角 $q_f = \left[0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{4} \ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{4} \ \cos \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$, 初始角速度为 $\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]$, 末端角速度为 $\omega_f = [0 \ 0 \ 1]$ 。

若仅考虑第 1 个角速度分量的边界条件, 最短时间为 $t_{\Delta\omega_1}^* = 0$, 若仅考虑第 2 个或第 3 个角速度分量的约束, 最短时间为 $t_{\Delta\omega_2}^* = t_{\Delta\omega_3}^* = \Delta\omega_2 = \Delta\omega_3 = 1$ 。如果同时满足三个角速度分量约束, 则最短时间为 $\max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$, 此时 u_2, u_3 恒为 1, u_1 在满足边界条件的基础上, 可以取任意值, 有无穷多种解。若将姿态角的约束也考虑进来, 满足所有条件, 则最优时间 $t_f^* \geq \max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$ 为最优时间的极限, 如果 $t_f = \max(t_{\Delta\omega_1}^*, t_{\Delta\omega_2}^*, t_{\Delta\omega_3}^*) = 1$ 时, 该问题有可行解, 那么该可行解必然就是最优控制。

利用 GPOPS 优化求解, 可得最优控制及角速度变化如图 6 所示, u_2, u_3 恒等于 1, 为 Bang-Bang 控制形式, 而 u_1 却恒为 0, 并非 Bang-Bang 形式, 其对应的开关函数恒为 0, 根据定义, 这就表明 u_1 为奇异控制, 该算例的最优解为一个控制分量奇异的情况。通常所做的假设显然忽略掉了该奇异最优控制。由于 3 个力矩分量对角速度的

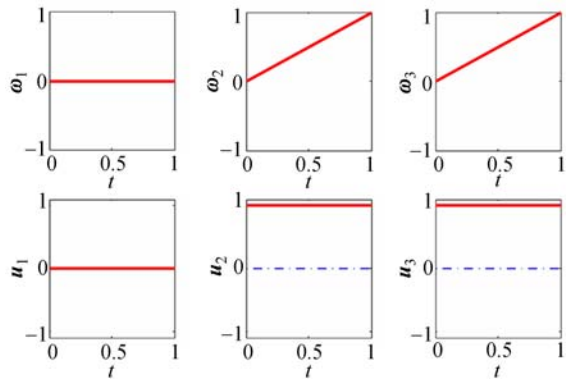


图 6 1 个控制分量奇异时的角速度 ω 和最优控制 u
Fig. 6 Time histories of the components of the ω and u in a one control singular case

控制独立解耦, ω_1 恒为 0, 而 ω_2, ω_3 则保持斜率不变, 一直上升。

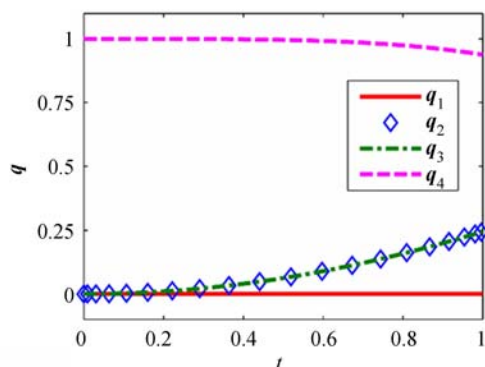


图 7 1 个控制分量奇异时的姿态角 q

Fig. 7 Quaternion histories in a one control singular case

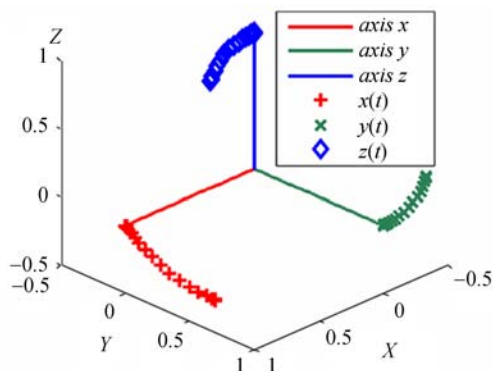


图 8 1 个控制分量奇异时卫星姿态机动的三维图

Fig. 8 3D representation of solution for one controls singular case

参考文献:

[1] LEMAÎTRE M, VERFAILLIE G, JOUHAUD F, et al.. Selecting and scheduling observations of agile satellites[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2002, 6(5): 367-381.

[2] 王秀红, 李俊峰, 高彦平, 等. 基于虚拟测距的单星光学监测空间目标定轨方法[J]. *光学精密工程*, 2016, 24(7): 1541-1549.

WANG X H, LI J F, GAO Y P, et al.. Orbit determination of space objects with single satellite optical observations and virtual range[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(7): 1541-1549. (in Chinese)

[3] 陈雪芹, 耿云海, 王峰, 等. 敏捷小卫星对地凝视姿态跟踪控制[J]. *光学精密工程*, 2012, 20(5): 1031-1040.

图 7 展示了卫星姿态角 q 的变化过程, 可以发现 q_1 恒为 0, 保持不变, 这就说明卫星在每个瞬时绕的旋转轴都在本体系中的 $O-yz$ 平面上。图 8 展示了卫星机动全过程的三维图, 图中各符号及线条含义与图 5 一致。与两个控制分量奇异的算例相比, 其机动轨迹显得复杂很多, 每个瞬时卫星所绕的旋转轴一直都在发生变化。尽管绕 x 轴的控制力矩 u_1 始终为 0, 但卫星的姿态并不仅是相对 y 轴和 z 轴发生了变化, x 轴的矢量端部也一直在运动, 这是由于卫星姿态运动的耦合造成的, 也正是因为这一特性, 卫星可以实现一定程度的前驱控制。

5 结 论

本文探讨了敏捷卫星姿态机动的奇异最优控制, 分析了所有可能出现的奇异情况, 推导了奇异控制最优性的必要条件。研究表明, 最优控制中的三个控制分量不可能同时奇异。起止角速度为 0 以及起止角速度相同时, 奇异最优控制可以排除。而起止角速度相异时, 存在奇异控制为最优解的情况, 并且奇异控制的阶数为无穷阶。该成果具有明确的物理意义, 可以直接用于敏捷卫星姿态控制的优化设计, 在机器人、无人机等工程领域也可以推广应用。

CHEN X Q, GENG Y H, WANG F, et al.. Starting imaging attitude tracking control of agile small satellite[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(5): 1031-1040. (in Chinese)

[4] 徐开, 金光, 陈娟, 等. 敏捷小卫星姿态机动切换算法[J]. *光学精密工程*, 2008, 16(8): 1528-1532.

XU K, JIN G, CHEN J, et al.. Switch algorithm for quick small satellite attitude maneuver[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(8): 1528-1532. (in Chinese)

[5] ZHANG J R. The output torque estimation of MC-MG for agile satellites[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 26(1): 141-146.

[6] 范国伟, 常琳, 戴路, 等. 敏捷卫星姿态机动的非线性模型预测控制[J]. *光学精密工程*, 2015, 23

- (8): 2318-2327.
- FAN G W, CHANG L, DAI L, *et al.*. Nonlinear model predictive control of agile satellite attitude maneuver[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(8): 2318-2327. (in Chinese)
- [7] SCRIVENER S L, THOMPSON R C. Survey of time-optimal attitude maneuvers [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1994, 17(2): 225-233.
- [8] 叶东. 敏捷卫星姿态快速机动与稳定控制方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- YE D. *Research on fast maneuver and stabilization control for agile satellite*[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013. (in Chinese)
- [9] NGUYEN H, PHAM Q C. Time-optimal path parameterization of rigid-body motions: Applications to spacecraft reorientation[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2016, 39(7): 1667-1671.
- [10] LI F Y, BAINUM P M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1990, 13(1): 38-45.
- [11] BILIMORIA K D, WIE B. Time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1993, 16(3): 446-452.
- [12] BAI X L, JUNKINS J L. New results for time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32(4): 1071-1076.
- [13] LI J. Analysis of the inertially symmetric rigid spacecraft time-optimal three-axis reorientation [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2017, 38(1): 59-74.
- [14] BOYARKO G A, ROMANO M, YAKIMENKO O A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2011, 34(4): 1197-1208.
- [15] VENTURA J, ROMANO M, WALTER U. Performance evaluation of the inverse dynamics method for optimal spacecraft reorientation[J]. *Acta Astronautica*, 2015, 110: 266-278.
- [16] KIRK D E. *Optimal Control Theory: An Introduction*[M]. London: Courier Corporation, 2012.
- [17] BELL D J, JACOBSON D H. *Singular Optimal Control Problems*[M]. Pittsburgh, U. S. A: Academic Press, 1975.
- [18] 解学书. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- XIE X SH. *Optimal Control Theory and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1986. (in Chinese)
- [19] MARTINON P, BONNANS F, LAURENT-VARIN J, *et al.*. Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32(1): 51-55.
- [20] SEYWALD H, KUMAR R R. Singular control in minimum time spacecraft reorientation[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1993, 16(4): 686-694.
- [21] LEE T, LEOK M, MCCLAMROCH N H. Time optimal attitude control for a rigid body[C]. *Proceedings of 2008 American Control Conference, IEEE*, 2008: 5210-5215.
- [22] FLEMING A, SEKHAVAT P, ROSS I M. Minimum-time reorientation of a rigid body[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2010, 33(1): 160-170.
- [23] SHEN H J, TSIOTRAS R. Time-optimal control of axisymmetric rigid spacecraft using two controls [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1999, 22(5): 682-694.
- [24] ROBBINS H M. A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control [J]. *IBM Journal of Research and Development*, 1967, 11(4): 361-372.
- [25] 焦宝聪, 王在洪, 时红廷. 常微分方程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- JIAO B C, WANG Z H, SHI H T. *Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese)
- [26] GOH B S. Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables[J]. *SIAM Journal on Control*, 1966, 4(4): 716-731.

- [27] KELLEY H J. A second variation test for singular extremals[J]. *AIAA Journal*, 1964, 2(8): 1380-1382.
- [28] KELLEY H J, KOPP R E, MOYER H G. 3 Singular extremals[J]. *Mathematics in Science and Engineering*, 1967, 31: 63-101.
- [29] RAO A V, BENSON D A, DARBY C, *et al.*. Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the gauss pseudospectral method[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 2010, 37(2): 22.
- [30] GARG D, PATTERSON M A, FRANCOLIN C, *et al.*. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2011, 49(2): 335-358.

作者简介:



印明威(1991—),男,湖北洪湖人,博士研究生,2013年于北京航空航天大学获得学士学位,主要从事航天器姿态动力学与控制、敏捷卫星成像任务规划等方面研究。Email: ymw13@mails. tsinghua. edu. cn

导师简介:



宝音贺西(1972—),男,内蒙古人,博士,教授,国家杰出青年基金获得者,1999年于哈尔滨工业大学获得博士学位,主要从事航天器姿态控制、轨道优化等方面研究。Email: baoyin@tsinghua. edu. cn