

文章编号 1004-924X(2002)03-0318-06

Zernike 多项式拟合方法及应用

单宝忠^{1,2}, 王淑岩¹, 牛憨笨¹, 刘颂豪²

(1. 深圳大学 光电子学研究所, 广东 深圳 518060;

2. 华南师范大学 量子电子学研究所, 广东 广州 510631)

摘要:由于 Zernike 多项式的各项与光学像差有相应的对应关系,用 Zernike 多项式对镜面面形数据进行处理的方法已经广泛应用于工程项目、光学系统设计软件和干涉检查等。用 Zernike 多项式作为光学和结构分析程序间的接口工具是非常方便和成熟的。本文阐述了 Zernike 多项式及其拟合方法和应用流程,并应用它作为数据接口工具实现了光机热各分析模块间的数据转换,并在某空间相机系统集成分析中得到应用。

关键词:Zernike 多项式;拟合;集成分析;有限元法;光机系统

中图分类号:TH74 **文献标识码:**A

1 引言

光机系统的光学元件在外载荷作用下,由于镜筒的变形将作整体相对位移,同时,光学表面也发生面形变化。所有这些变化都引起光学系统的同心度(LOS)变化及波前畸变(WFE),从而影响光学系统的特性。分析恶劣环境下光机系统的光学性能是很有必要的。

镜面的波面总是趋于光滑和连续的,所以一定可以将镜面的面形变化表示成一个完备基底函数的线性组合或一线性无关的基底函数系的组合。镜面的变形实质上等同于加工或检测时镜面上存在的畸变。本文借用干涉检验的概念,用 Zernike 多项式对工程分析的镜面面形数据进行处理的方法已经广泛应用于工程项目、光学系统设计软件(如 Code V)和干涉检查(如 Z - Max 等)。

Zernike 多项式是 F. Zernike 在 1934 年构造的。Zernike 多项式是互为正交、线性无关的,而且可以唯一的、归一化描述系统圆形孔径的波前边界。另外,Zernike 多项式很容易与 Seidel 像差项对应,为有选择地单独处理各像差系数、优化系

统性能提供了有效的方法。

Zernike 多项式是理想的结构分析与光学分析程序之间的接口工具。本文选用 Zernike 多项式作为基底函数,用最小二乘法对镜面面形进行拟合,表示波前差。再将其拟合的 Zernike 多项式耦合到原始系统上去,修正原始系统,得到变形后的系统,进而评估光学系统在外载荷作用下的性能。

2 Zernike 多项式

Zernike 多项式是描述干涉图的波前像差的常用方法:多项式的形式为 $r^n \cos(m)$ 和 $r^n \sin(m)$,是以半径和方位角定义的极坐标形式表示的多项式。Zernike 多项式之所以适合用来表示波前,是因为它在定义的单位圆上相互正交。因此,所处理的数据(由于干涉仪测得或分析计算的面形变化)应该转换到单位圆内,然后再进行处理。多项式拟合系数可以通过对数据进行最小二乘法拟合得到。理论上讲,项数越多拟合误差越小。

Zernike 多项式具有如下两个主要特点:

1) 在单位圆上正交,即有如下关系

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 U_n^l(r, \theta) \cdot U_m^k(r, \theta) r dr d\theta \quad (1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (n = m, l = k) \\ 0 & (n \neq m \text{ 或 } l \neq k), \end{cases}$$

式中 $U_n^l(r, \theta)$ 和 $U_m^k(r, \theta)$ 为 Zernike 多项式。当 $l = 0$ 时 $\theta = 1$, 当 $l \neq 0$ 时, $\theta = 0.5$ 。对于具有圆形光瞳镜面的系统,可将其规一化为单位圆。函数系的正交使不同多项式的系数相互独立,有利于消除偶然因素的干扰。

$$R_n^{n-2m} = \begin{cases} \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} r^{n-2s} & (n-2m \geq 0) \\ R_n^{l, n-2m/l} & (n-2m < 0), \end{cases} \quad (4)$$

$$n-2m = \begin{cases} \cos(n-2m) & (n-2m \geq 0) \\ -\sin(n-2m) & (n-2m < 0), \end{cases} \quad (5)$$

在基底函数系选定后,干涉条纹的级数分布函数 F 即有如下的形式

$$F(r, \theta) = \sum_{k=0} Q_k U_n^{n-2m}(r, \theta) = Q^T \cdot U, \quad (6)$$

式(6)中 Q_k 为常数, Q^T 为系数 Q_k 组成的列向量的转置。 U 为 Zernike 多项式项 u_k 组成的列向量。

$$k = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1, \quad (7)$$

基底函数选定后,剩下的问题是如何求出(6)式中的常数 Q_k ,即求 Zernike 多项式的线性组合系数。

3 拟合方法

本文采用 Gram - Schmidt 正交法来解决

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (i < j) \\ \frac{1}{\sqrt{[W \cdot U_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (W \cdot U_i \cdot V_r)^2]^{1/2}}} & (i = j) \\ \frac{1}{\sqrt{[W \cdot U_i \cdot V_r - \sum_{r=1}^{i-1} (W \cdot U_i \cdot V_r) \cdot C_{ri} \cdot C_{rj}]}]} & (i > j), \end{cases} \quad (11)$$

将(11)式代入(8)式即可求得 V 。由(6)和(9)式可得:

$$F(r, \theta) = Q^T \cdot U = Q^T \cdot C^{-1} \cdot V = B^T \cdot V, \quad (12)$$

比较(12)式最后一个等式的两端得:

2)和光学设计者惯用的 Seidel 像差系数很容易建立起联系,如表 2 所示。

极坐标形式的 Zernike 多项式的具体表达式如下:

$$U_n^l(r, \theta) = R_n^l(r) \cdot \theta_n^l(\theta), \quad (2)$$

上式中 n 为多项式的阶数,取值为 $0, 1, 2, \dots, l$ 为与阶数 n 有关的序号,其值恒与 n 同奇偶性,且绝对值小于或等于阶数。令(2)式中

$$l = n - 2m, \quad (3)$$

Zernike 多项式的正交性问题。首先求出一组在所有数据点集合上离散正交的,且为 Zernike 多项式系的线性组合的基底函数系 V ,即

$$V = CU, \quad (8)$$

上式中 C 是系数元素 c_{ij} 的方阵。 V 中的每一个元素均满足方程:

$$V_{r_1} \cdot V_{r_2} \cdot W = \begin{cases} 0 & (r_1 \neq r_2) \\ 1 & (r_1 = r_2), \end{cases} \quad (9)$$

上式中 r 为全体所取数据点(节点)的集合, W 是非负权函数。

Gram - Schmidt 正交法给出 V 和 U 的如下关系:

$$V_i = \frac{U_i - \sum_{r=1}^{i-1} V_r \cdot (W \cdot U_i \cdot V_r)}{[W \cdot U_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (W \cdot U_i \cdot V_r)^2]^{1/2}}, \quad (10)$$

将(10)式进行变换,并结合(8)式可求得方阵 C 中各元素 c_{ij} 的表达式如下

$$Q^T C^{-1} = B^T, \quad (13)$$

(13)式两边同时乘 C 矩阵并转置得:

$$Q = C^T \cdot B, \quad (14)$$

(14)式中向量 B 可由已知数据点的数据,用最小二乘法求得。设 $x(r, \theta)$ 为变形后镜面的节

点位置。最小二乘法原理要求：

$$W \cdot \sum_{i=1}^k [x(\rho_i, \theta_i) - F(\rho_i, \theta_i)]^2 = \text{Min}, \tag{15}$$

将(12)式中的 $F(\rho, \theta)$ 展开,代入(15)式并变换得：

$$W \cdot \sum_{i=1}^k [x(\rho_i, \theta_i) - \sum_{j=1}^k B_j \cdot V_j(\rho_i, \theta_i)]^2 = \text{Min}, \tag{16}$$

考虑(9)式,并令(16)式对 B_j 的偏导数为零,推导得到：

$$B_j = \frac{W \cdot \sum_{i=1}^k x(\rho_i, \theta_i) \cdot V_j(\rho_i, \theta_i)}{\sum_{i=1}^k W \cdot V_j^2(\rho_i, \theta_i)}, \tag{17}$$

将(17)式代入(14)式最终得系数向量 Q ,即可将镜面的面形表示成 Zernike 多项式系的线性组合。

Code V 是具有代表性的光学设计分析程序,对光学系统进行光学性能分析是其基本应用之一。Code V 中使用的 Zernike 多项式有标准 Zernike 多项式(ZRN)和 Fringe Zernike 多项式(ZFR)两种类型。Fringe Zernike 多项式(ZFR)已在 Fringe 软件及其他干涉图软件里得到应用,它最多可有 37 项,是标准 Fringe Zernike 多项式(ZFR)的子集,按不同阶数排列。Zernike 多项式可以精确描述畸变光学表面,并且其每一项都对应该很明确的物理含义,对应于各种像差的某些项。Fringe Zernike 多项式的前 9 项多项式列在后面的表 2 中,第 1 项为常数,第 2 - 9 项分别对应 X 向倾斜、Y 向倾斜、离焦、与轴成 0°或 90°的像散、与轴成 45°的像散、X 轴的三级彗差、Y 轴的三级彗差、三级球差等。

用逆矩阵法求 Zernike 多项式 U 的系数 Q 的具体的求解过程分如下四步进行：

1) 所取采样点归一化,转换到单位圆内

采样点的归一化就是要求得将圆形光瞳转换为单位圆后,采样点对应的坐标。归一化后,采样点的坐标为：

$$x_i = (x_i - x_0) / \rho_i$$

$$y_i = (y_i - y_0) / \rho_i$$

(x_0, y_0) 、 ρ_i 为采样点的中心坐标和极坐标

半径。

2) 计算 Zernike 多项式 U ,作为基底函数

将 1) 中归一化的采样点坐标,带入 Zernike 多项式,得到作为基底函数的多项式函数矩阵 U 。

3) 将 Zernike 多项式 U 单位正交化

Gram - Schmidt 标准正交法可以把任何一组无关向量化为等价的标准正交组。利用此法将 Zernike 多项式 U 进行标准正交化,得到单位正交矩阵 V 。

4) 用广义逆矩阵方法求 Zernike 多项式拟合系数 Q

对于列满秩的 $m \times n$ 矩阵 $A(m \times n)$ 时,广义逆矩阵

$$V^+ = (V^T V)^{-1} V^T \text{ 满足: } V^+ V = I_n$$

镜面节点的变形可由 Zernike 多项式 U 表示为：

$$UQ = Z$$

进行如下坐标转换：

$$V = B$$

$$VB = Z$$

$$Q = V^+ Z$$

其中, B 、 Z 为中间变换矩阵,由上式即可求得进行 Zernike 多项式拟合的一系列系数 Q 。将所求得的 Zernike 系数 Q 写入到一个 .INT 文件,作为光学程序 Code V 的输入文件,修正光学镜面的变形。

4 应用实例

本方法曾作为结构和光学系统软件间的数据接口,对某光机系统进行了光机热集成分析,应用的软件主要包括: PATRAN (结构分析模块和热分析模块)、Code V (光学分析程序)。

首先要建立结构有限元模型和光学模型,使结构模型中镜面上的节点与光学系统模型中的镜面对应。镜筒的光学模型的光学线路图、结构有限元模型分别如图 1、2 所示。

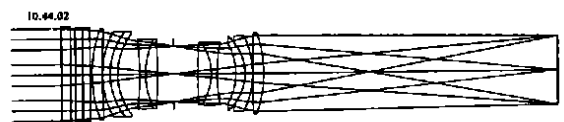


图 1 光学系统模型

Fig. 1 Model of the optical system.

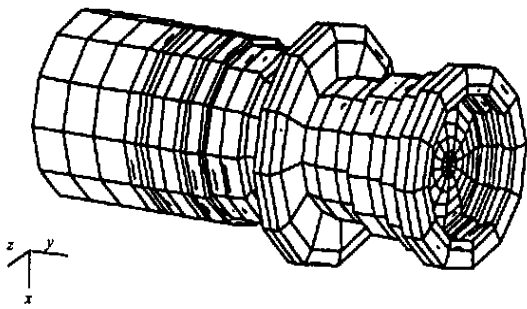


图 2 光学镜筒的有限元模型

Fig. 2 FEM model of the optical tube.

表 1 外载荷作用下光学镜面节点位移

Table 1 Partial nodes' deformation of a surface unit: μm

Node number	X	Y	Z
196	- 0. 513	4. 038	29. 956
197	- 0. 518	4. 432	29. 962
198	- 0. 520	4. 040	29. 959
200	- 0. 521	3. 647	29. 955
202	- 0. 514	4. 718	29. 964
204	- 0. 519	3. 358	29. 952
206	- 0. 510	4. 822	29. 963
208	- 0. 516	3. 251	29. 950
210	- 0. 507	4. 715	29. 961

在 Code V 中,对光学镜筒的原始设计模型进行分析,可得到光学系统性能参数,与原始设计数据相吻合,图 3(a)所示为光学镜筒光学系统光学传递函数。表 1 所列为镜筒在外载荷作用下,某镜面节点的变形数据,将用于变形的拟合分析。

对镜筒各镜面节点及变形数据分别进行 Fringe Zernike 多项式拟合分析,获得其拟合结果,写入到 .INT 文件。某镜面的前 9 项 Zernike 拟合系数如表 2 所示。

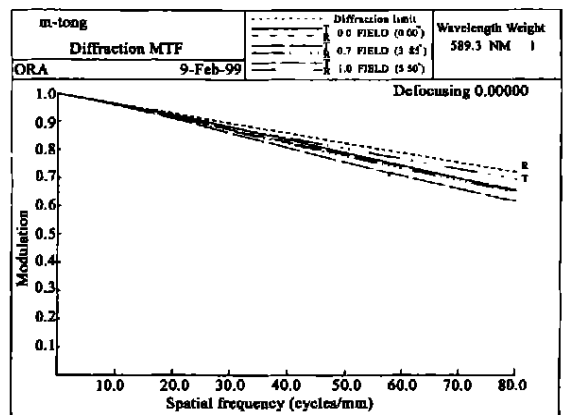
表 2 Zernike 多项式与 Seidel 像差的对应关系及实例结果

Table 2 Relations between Zernike polynomial and Seidel aberration, and results of sample

No.	Rank	Expression	Meanings	Coefficients
1	0	1	Constant	0. 00396591
2	1	cos	X Lateral shift	- 0. 00001913
3	1	sin	Y Lateral shift	- 0. 00389422
4	2	$2^2 - 1$	Defocus	- 0. 00007505
5	2	$^2\cos^2$	0° or 90° Astigma	- 0. 00000789
6	2	$^2\sin^2$	45° Astigma	- 0. 00000012
7	3	$(3^2 - 2) \cos$	X Axis third order coma	- 0. 00000131
8	3	$(3^2 - 2) \sin$	Y Axis third order coma	0. 00001151
9	4	$6^4 - 6^2 + 1$	Third spherical	0. 00004875
...				

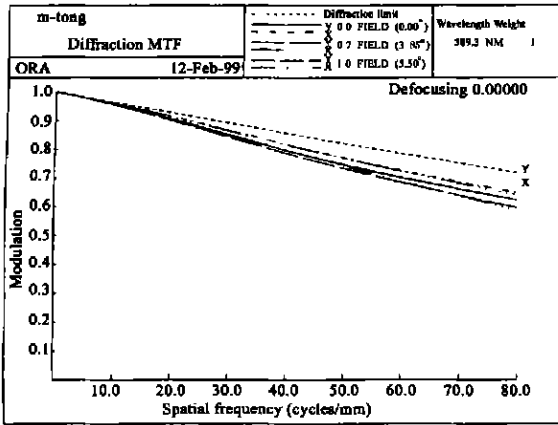
Code V 具有直接读取 .INT 文件数据的功能,可以读取 Zernike 多项式拟合数据文件,将数据转化为变化的面形,并粘贴到原始 Code V 光学模型上来修正光学元件的面形,使修正后的面形与变形后的面形相符。对修正后的模型进行光学分析,可以得到评价光学性质的性能参数,如 OTF、OPD、PSF、EE(中心能量)等指标,这里只分析光学传递函数(OTF)作为评价指标。

用 INT 命令将光学镜面变形拟合生成的 Zernike 多项式加到对应的镜面上,得到变形后光学系统模型,分析光学系统的原始设计和变形修正后的系统光学传递函数,如图 3(b)所示,表 3 所示为 0.7 视场 50 对线频率的光学传递函数值。



a 原始设计

a Original design



b 修正后的系统

b Verified system

图 3 光学系统的光学传递函数

Fig. 3 Optical transfer function of the optical system.

表 3 光学系统 0.7 视场 50 对线频率的光学传递函数

Table 3 Optical transfer function of 0.7 view field in 50 Lp/mm

		Original design	After deformation
Tube	Meridian	0.803	0.770
	Arc vector	0.754	0.735

由图 3 及表 3 所示的光学传递函数值可以看出,由于外载荷的影响,系统的光学传递函数发生了变化,反映出外载荷对光学性能的影响。

5 结 论

本文通过介绍和应用 Zernike 多项式并编制了实用的接口程序,解决了光机系统的光机热各分析模块间数据接口的问题。集成分析中各分析模块之间的数据传输是技术关键。

1) 对于受环境影响较大的光学系统进行光机热集成分析是十分必要的;

2) Zernike 多项式拟合是实现光机热集成分析的有力工具,已在一些典型的应用及实际工程应用中得到验证;

3) Zernike 多项式拟合虽然只在某工程中得到应用,它更是一种通用的普遍方法,适用于各种受环境影响的光学系统的集成分析。

4) 本方法只是对个别工程进行针对性的应用,还有待于开发出具有广泛应用的通用性的工具软件。

参考文献:

- [1] 单宝忠. 空间相机光机系统光机热集成分析及优化设计[D]. 长春:中国科学院长春光学精密机械研究所,1999.
- [2] Miller J, Hatch M, Green K. Predicting performance of optical systems undergoing thermal/mechanical/optical numerical methods[J]. *SPIE*, 1981, 20(2): 303 - 311.
- [3] 单宝忠. 空间光仪光机热集成分析方法[J]. *光学 精密工程*, 2001, 8(4): 377 - 381.
- [4] Wang J Y, Silva D E. Wave-front interpretation with Zernike polynomials[J]. *Appl. Opt.*, 1980, 19: 1510 - 1518.
- [5] 单宝忠, 武克用, 卢铿. 弹性基体对光学仪器动态特性的影响[J]. *光学 精密工程*, 1997, 5(6): 59 - 63.

Zernike polynomial fitting method and its application

SHAN Bao-zhong^{1,2}, WANG Shu-yan¹, NIU Han-ben¹, LIU Song-hao²

(1. Institute of Optoelectronics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;

2. Quantum Electronic Institute, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The items of Zernike polynomials have corresponding meanings of Seidel aberrations. The method of using Zernike polynomials to fit optical surfaces has been widely used in project, optical design software and interference check. So it is convenient and mature to use Zernike polynomials as the data transmission tool between optical and structural analysis programs. Here, Zernike polynomials and their fitting method, fitting process are outlined, and are used in the integrated analysis of a space camera, as an example.

Key words: Zernike polynomials; fitting; integrated analysis; finite element method; thermal-structural systems

作者简介:单宝忠(1970-),男,辽宁省人,1993年考入吉林工业大学研究生部,1996年在中科院长春光学精密机械研究所攻读博士,主要从事空间光学仪器 CAD/CAE 等方向的研究工作,现为华南师范大学流动站、深圳市企业工作站深圳大学分站博士后,从事光电子学应用领域研究工作。E-mail:shanbz@szu.edu.cn

征订启示

愿《液晶与显示》成为您的良师益友 欢迎订阅 欢迎投稿 欢迎刊登产品信息

《液晶与显示》是中国科学院长春光学精密机械与物理研究所和中国光学光电子行业协会液晶专业分会及石家庄实力克液晶材料有限公司联合主办的专业性学术期刊。

《液晶与显示》以研究报告、研究快报、综合评述和产品信息等栏目集中报道国内外液晶学科和显示领域中最新理论研究、科研成果和创新技术,及时反映国内外本学科领域及产业信息动态。《液晶与显示》被英国《科学文摘》(SA)、美国《化学文摘》(CA)、俄罗斯《文摘杂志》(P)和《中国物理文摘》等国内外著名检索刊物和文献数据库摘引和收录。《液晶与显示》已入编“中国科学核心期刊全文数据库”、“中国学术期刊(光盘版)”和“中国期刊网”(《液晶与显示》网址: <http://yjys.Chinajournal.net.cn>),及“万方数据资源系统(ChinaInfo)”(《液晶与显示》网址: <http://www.Chinainfo.gov.cn/periodical/yjyxs/index.htm>),向国内外读者提供网络信息。

《液晶与显示》以创新性、综合性、实用性为办刊特色,内容丰富,信息量大,涵盖面广,可读性强。既是启迪科技人员开拓创新思路的参考期刊,又是从事液晶和显示技术研究的广大科技人员、大专院校师生及相关领域的科技工作者进行学术交流的良好园地,也是图书、情报等部门必不可少的信息来源。《液晶与显示》热忱欢迎广大作者、读者广为利用,踊跃投稿,将您的科技创新、产品信息、企业风貌通过这一窗口展示出来。

《液晶与显示》为双月刊,16开本,80页,国内定价34.00元,国内外公开发行。邮发代号,国内:12-203;国外:4868Q。同时,《液晶与显示》编辑部将竭诚为广大读者服务,随时办理破年、破季订阅。

单 位: 中科院长春光学精密机械与物理研究所

《液晶与显示》编辑部

邮 编: 130021

地 址: 吉林省长春市工农大路 61 号

电 话: (0431)5684692 转 2534

E-mail: yjxs@ciomp.ac.cn