

文章编号 1004-924X(2003)05-0472-05

# 四翼十字形中心支撑结构的动力学分析

张林波,任 戈,陈洪斌

(中国科学院 光电技术研究所,四川 成都 610209)

**摘要:**四翼十字形中心支撑结构是大型望远镜中次镜支撑的典型结构,其动力学性能直接决定着光学成像视轴的稳定性和精确性。基于板壳理论,采用 Rayleigh 方法,通过选取恰当的振型函数,建立了次镜支撑结构的动力学模型。针对支撑筋板不同的结构参数,分别进行了数值仿真和有限元分析,二者规律相同,结果基本一致,认为该方法可以用于类似结构动力学特性的计算。

**关键词:**支撑结构;板壳理论;数值仿真;有限元分析

中图分类号:TH703 文献标识码:A

## Dynamic analysis for supporting structure of crossed-plate type

ZHANG Lin-bo, REN Ge, CHEN Hong-bin

(Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China)

**Abstract:** Supporting structure of crossed-plate type is a typical secondary mirror supporting structure for a large-scale telescope, which determines the stability and veracity of LOS. A dynamic model has been established by selecting mode functions using the plate and shell theory and Rayleigh method. Numerical simulation and finite element analysis done with different structural parameters show that they both follow the same law and their results are generally in agreement, and therefore, this method can be used for calculating dynamic properties of similar structures.

**Key words:** supporting structure; shell and plate theory; numerical simulation; finite element analysis

## 1 引言

随着光学技术的发展,对光学成像分辨率要求越来越高,光学系统的主反射镜口径将越来越大,这就对光学结构的设计,以及主、次镜的安装、固定等提出了更高的要求<sup>[1-5]</sup>。以次镜支撑为

例,典型的支撑结构是四翼十字形中心支撑结构,一般来说,该结构具有较高的结构稳定性,极小的挡光面积,结构简单、易于制造和装配等优点<sup>[6]</sup>。但是随着通光口径的增大,支撑筋板要相应地加长,这对次镜支撑结构设计提出了更高的要求。因此,通过动力学的分析计算,确定其最佳结构参数是十分重要的。

## 2 次镜支撑结构的动力学模型

### 2.1 问题的提出

典型的四翼十字形中心支撑结构如图 1 所示, 4 根支撑筋板与主镜筒固定连接, 而 4 根筋板的另一端支撑着次镜组件。为了使问题简化, 假定次镜及其组件的质量沿着圆周方向和轴线方向均匀分布, 也就是说 4 根支撑筋板在支撑端受到均布载荷的作用产生振动。由于支撑筋板的厚度较薄, 抗弯曲能力较差, 因而该结构一阶振型主要是支撑筋板的弯曲振动。考虑结构的对称性, 振型曲线的延长线必定相交于主镜筒的轴线, 如图 1 所示, 图中振型曲线的虚线部分为假想的振型线的延长。取出任意一根支撑筋板和次镜组件建立动力学分析模型, 如图 2 所示。取次镜中心点为坐标原点, 振动方向为  $z$  轴, 支撑筋板中面的长度尺度方向为  $x$  轴建立坐标系。支撑筋板在与主镜筒的相交处  $C$  固定, 在筋板发生弯曲的同时, 次镜也由  $A$  点转到  $B$  点, 旋转了  $\delta$  角。由于支撑筋板的特点是薄而宽, 满足 Kirchhoff 薄板条件, 因此将采用板壳理论的能量原理建立动力学分析模型。

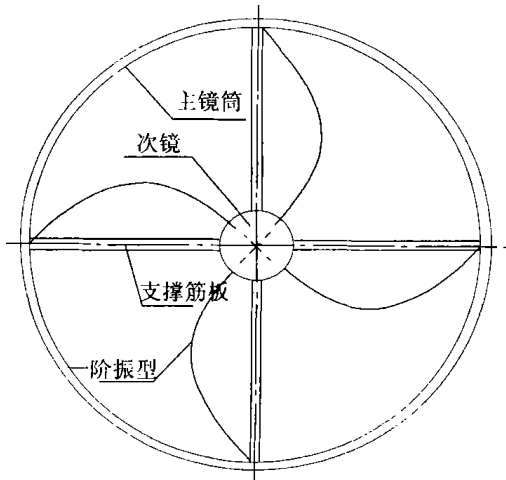


图 1 次镜支撑结构

Fig. 1 Secondary mirror support structure

### 2.2 Rayleigh 法概述<sup>[7-8]</sup>

基于能量原理的近似解法中最为常用的是 Rayleigh 法, 其主要思想是, 假定振型函数为:

$$W = \sum_m C_m W_m, \quad (1)$$

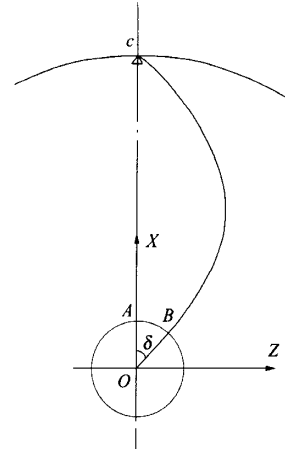


图 2 动力学分析简图

Fig. 2 Sketch of dynamic analysis model

其中,  $C_m$  是相互独立的待定系数;  $W_m$  是满足边界条件的已知函数。选择系数  $C_m$  使得  $U_{\max} - T_{\max}$  最小, 即

$$\frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial C_m} = 0, \quad (2)$$

对于矩形薄板而言, 最大势能  $U_{\max}$  和最大动能  $T_{\max}$  的表达式如下

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \iint \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx dy, \quad (3)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \overline{m} w_n^2 \iint W^2 dx dy, \quad (4)$$

式中,  $D$  是矩形板的弯曲刚度,  $s$  是矩形板的边界,  $w_n$  是固有频率,  $\overline{m}$  是矩形板单位面积上的质量。如果矩形板的厚度、弹性模量、密度、泊松比分别用  $h$ 、 $E$ 、 $\rho$ 、 $\nu$  表示, 则  $D$  和  $\overline{m}$  可以写成

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (5)$$

$$\overline{m} = \rho h, \quad (6)$$

由式(2)可以得到关于系数  $C_m$  的齐次线性方程组。为使  $W$  具有非零解, 必须使齐次线性方程组具有非零解, 借助于该齐次线性方程组系数行列式为零, 就可以得到求解固有频率  $w$  的方程。从理论上而言, 假设的振型函数只需要满足位移边界条件, 而不一定要求满足力的边界条件, 这是因

为内力边界条件是平衡条件,在能量法中已经用能量关系代替了平衡条件。

### 2.3 次镜支撑结构的动力学模型

如图 2 所示,对于次镜支撑结构,根据其一阶振型的特点,可以把支撑筋板的振型函数假设为:

$$W = C_m \left[ \frac{x}{2R} \left( \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) (-1)^m - \frac{1}{m} \sin \frac{m x}{R} \right] \quad (m = 1, 2, 3, \dots, r \leq x \leq R), \quad (7)$$

式中,  $r, R$  分别是次镜筒和主镜筒的半径,支撑筋板的长度  $l$  为  $(R - r)$ 。此表达式能够满足给定的边界条件

$$(W)_{x=R} = 0 \quad \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=R} = 0, \quad (8)$$

为了简化,仅取(7)式第 1 项 ( $m = 1$ ),则有

$$W = C_1 \left[ \frac{x}{2R} \left( \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) + \frac{1}{R} \sin \left( \frac{x}{R} \right) \right] \quad (r \leq x \leq R), \quad (9)$$

将式(9)分别代入(3)和(4),就可以得到筋板的最大势能和动能的表达式

$$U_b = \frac{D}{2} \iint_s \left[ \frac{x}{R^2} - \frac{1}{R^2} \sin \left( \frac{x}{R} \right) \right]^2 dx dy, \quad (10)$$

$$T_b = \frac{\bar{m}}{2} \omega_n^2 \iint_s \left[ \frac{x}{2R} \left( \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) + \frac{1}{R} \sin \left( \frac{x}{R} \right) \right]^2 dx dy, \quad (11)$$

式中,积分域  $s$  的范围是:  $r \leq x \leq R$  及  $0 \leq y \leq b$ ,  $b$  是支撑筋板的宽度。由于振型函数仅与变量  $x$  有关,所以式(10)和(11)很容易转化为一重积分。次镜支撑结构除了支撑筋板的动能和势能外,还有次镜及其组件的转动动能,用  $T_c$  表示。次镜及其组件的角速度  $\dot{\theta}$  可以近似地表示为

$$\dot{\theta} = \frac{(dW/dx)_{x=r}}{r} = \frac{C_1}{rR} \left[ \cos \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{r^2 + R^2}{2R^2} \right], \quad (12)$$

则次镜及其组件的转动动能  $T_c$  可以写成

$$T_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{J C_1^2}{2 r^2 R^2} \left[ \cos \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{r^2 + R^2}{2R^2} \right]^2, \quad (13)$$

式中,  $J$  是次镜及其组件的转动惯量。

如前所述,由于次镜及其组件由 4 根筋板支撑,而且 4 根筋板形状一致,结构对称(参见图

1),则系统地总动能和总势能分别为

$$U_{\max} = 4 \times U_b, \quad (14)$$

$$T_{\max} = 4 \times T_b + T_j. \quad (15)$$

将式(10)~(11)及(13)分别代入上面两式中,可以得到  $U_{\max}$  和  $T_{\max}$  的表达式,再代入到式(2)中就可以计算出系统的一阶固有频率值。

### 3 次镜支撑结构一阶固有频率的计算结果

根据结构设计要求,可以确定计算所需的参数,  $r = 0.095 \text{ m}$ 、 $R = 0.727 \text{ m}$ 、 $h = 0.005 \text{ m}$ 、 $b = 0.1 \text{ m}$ ,材料按钢计算,根据上面推导的公式可以计算出结构的一阶固有频率为 36.1 Hz。



图 3 有限元分析模型

Fig. 3 Finite element analysis model

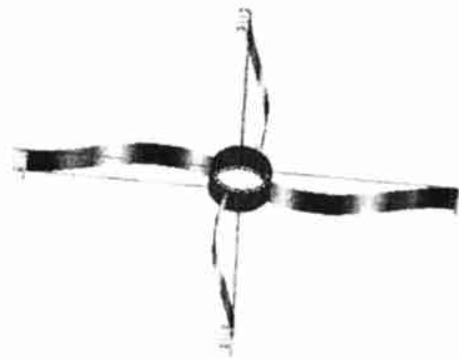


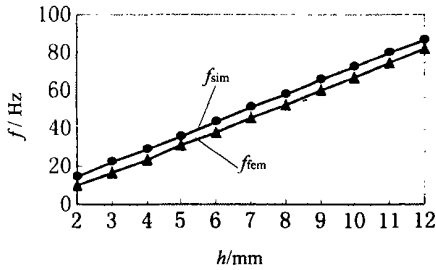
图 4 一阶振型

Fig. 4 Model 1

此外,采用有限元方法,用 FDEAS 软件对次镜支撑结构进行了模态分析。如图 3 所示,整个结构采用板壳单元划分网格,在支撑筋板上与主镜筒相互连接的 4 个面施加固定约束,计算得一阶固有频率为 30.8 Hz,相应的一阶振型如图 4 所示。从计算结果上看,根据模型计算的值比有限元方法得

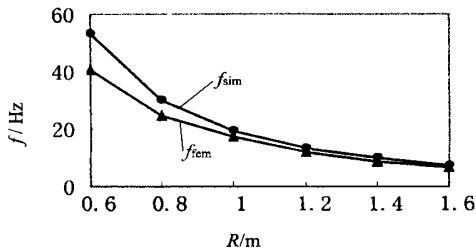
到的结果大 5.3 Hz,有两方面原因:一是振型函数只取了第 1 项(式(9)),若取的项数多一些,计算精度将会更高;二是在计算模型中没有考虑次镜结构的变形以及它与次镜支撑筋板相互之间的耦合作用,所以存在一定的误差,但与有限元分析的结果基本趋势是一致的,作为工程近似计算,是可以接受的。

最后,针对不同的筋板厚度  $h$ 、主镜筒半径  $R$



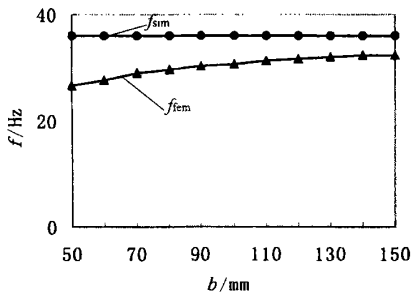
(a) 支撑筋板厚度对固有频率的影响

(a) Influence of depth of plate on frequencies



(b) 通光口径对固有频率的影响

(b) Influence of telescopic aperture on frequencies



(c) 支撑筋板宽度对固有频率的影响

(c) Influence of width of plate on frequencies

图 5 有限元分析及仿真结果 ( $f_{fem}$ -有限元分析结果;  $f_{sim}$ -仿真结果)

Fig. 5 Finite analysis and simulation results ( $f_{fem}$ -finite analysis results;  $f_{sim}$ -simulation results)

以及筋板宽度  $b$ ,分别用本文的计算方法和有限元方法进行了数值仿真,结果如图 5 所示。

由图 5 可知,结构的一阶固有频率随支撑筋板厚度的增加而线性增大,根据计算模型得到的仿真结果与有限元的计算结果有着很好的一致性。结构的一阶固有频率随主镜筒半径的增大(即,随着支撑筋板的长度的增加)而减小,从图中可以看出,在  $R$  值较大时,仿真结果与有限元分析结果相差很小,但是在  $R$  值较小时,二者存在较大的差异,这是因为在计算时没有按比例改变次镜组件的大小,使得在  $R$  值减小时,因次镜组件的弹性变形等因素而引入的误差逐渐加大缘故。当支撑筋板宽度  $b$  增大时,有限元分析结果略有增加,而根据模型计算得到的结果则变化不大,二者在  $b$  较小时数值上差异较大。原因如下:随着支撑筋板宽度  $b$  的减小,支撑筋板的长、宽比例将变得越来越大,趋近于矩形梁结构,已经不适于本文基于板壳理论推导出的计算模型。

## 4 结 论

基于板壳理论,采用 Rayleigh 方法,建立了次镜支撑的四翼十字形中心结构的动力学模型,数值仿真结果与有限元分析结果基本一致,该方法可以用于类似结构动力学特性的计算。

仿真结果表明,在满足光学系统对遮光面积要求限制的前提下,适当增加支撑筋板的厚度可以明显提高结构的固有频率;而改变支撑筋板的宽度对固有频率的提高作用不明显;随着望远镜通光口径的增大,结构的一阶固有频率急剧下降。例如,当主镜筒直径由 1.2 m 增至 3.2 m 时,结构的一阶固有频率从 40.6 Hz 减小到 6.9 Hz,此时应当选择更加合理、有效的次镜支撑结构。

本文仅从结构动力学角度对次镜支撑结构进行了数值模拟和有限元计算,找到了各结构参数对系统一阶固有频率的影响规律,下一步的工作将综合考虑光学系统的集光效率、支撑结构的动态特性以及次镜的静态变形等因素,来选择最佳的结构参数。

## 参考文献:

- [1] 吴清文,陶家生,宋朝晖. 高精度轻型长条形反射镜多点支撑方案[J]. 光学 精密工程,1999,7(6):61-65.  
WU Q W, TAO J SH, SONG ZH H. Multi-point support pattern of a high precision lightweight rectangular mirror[J]. *Optics and Precision Engineering*, 1999,7(6):61-65. (in Chinese)
- [2] 叶露,王肇勋. 大口径长焦距平行光管主反射镜支撑与调整机构的研究[J]. 光学 精密工程,2000,8(5):462-465.  
YEL, WANG ZH X. Supporting and adjusting for collimator primary mirror with large aperture and long focal length[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2000,8(5):462-465. (in Chinese)
- [3] GENBERG V, MICHELS G. Making FEA results useful in optical analysis[J]. *SPIE*, 2002, 4769:24-33.
- [4] Doyle. Numerical methods to compute optical errors due to stress birefringence [J]. *SPIE*, 2002, 4769:34-42.
- [5] 丁福建,李英才. 大口径相机主镜/次镜结构动力减振的研究[J]. 光子学报,1999,(5):458-462.  
DING FJ, LI Y C. The primary mirror/secondary mirror vibration absorption of large optical system[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999,(5):458-462. (in Chinese)
- [6] 程景全,李国平. 四翼梁式十字型中心支撑的力学特性[J]. 天文仪器与技术,1988,(1):5-10.  
CHENGJ Q, LI G P. Mechanical properties of crossed-vane type supporting structure [J]. *Astronomical Instruments and Technology*, 1988,(1):5-10. (in Chinese)
- [7] 曲庆璋,章权,季求知,等. 弹性板理论[M]. 北京:人民交通出版社,2000.  
QU Q ZH, ZHANG Q, JI Q ZH, et al. *Theory of elastic plates* [M]. Beijing:People's Communication Publishing House,2000. (in Chinese)
- [8] 胡海昌. 弹性力学变分原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,1981.  
HU H CH. *Variation principle and application of elasticity* [M]. Beijing: Science Publishing House,1981. (in Chinese)

作者简介:张林波(1973-),男,吉林靖宇人,助理研究员,博士后,主要研究光机结构分析、优化设计。