

文章编号 1004-924X(2007)03-0384-04

单边导角形柔性铰链的计算与性能分析

张志杰,袁怡宝

(哈尔滨工业大学 自动化测试与控制系,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:提出了一种单边导角形柔性铰链,以力学卡氏第二定理和微积分为理论基础,推导了单边导角形柔性铰链柔度和转动精度的闭环解析公式,利用有限元和实验的方法对柔性铰链的柔度公式进行校验。结果表明:有限元和实验方法与闭环解析式的结果基本一致。对单边导角形柔性铰链的性能进行分析,得出了结构参数对其柔度性能的影响关系,并通过与双边导角形柔性铰链比较,分析了单边导角形柔性铰链的转动能力、转动精度和对轴向载荷的影响,为柔性铰链在结构紧凑、大位移场合的工程应用提供了有价值的参考。

关键词:单边导角形柔性铰链;柔度;转动精度;有限元

中图分类号:TH132;TP24 **文献标识码:**A

Design calculation and analysis of half corner-filleted flexure hinge

ZHANG Zhi-jie, YUAN Yi-bao

(*Department of Automation Measurement & Control Instrumentation,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

Abstract: A half corner-filleted flexure hinge was introduced. Based on the Castigliano's second theorem, closed-form equations were formulated for compliances of half corner-filleted flexure hinge and precision of rotation was also evaluated in terms of compliances. Experimental results show the effect of two-dimensional geometric parameters on the performance of a half corner-filleted flexure hinge, it is coincident well with the finite element analysis. Compared with symmetric corner-filleted flexure hinge, the performance of flexure hinge can be evaluated in terms of flexibility, precision of rotation and sensitivity to axial effects. Experiment results can provide some theoretic foundations for flexure hinge design.

Key words: half corner-filleted flexure hinge; compliance; precision of rotation; finite element

1 引言

柔性铰链利用了弹性材料微小角变形及其自回复的特性,消除了传动过程中的空程和机械摩

擦,能获得较高的位移分辨率。在某些柔性铰链机构中,希望其结构尽可能紧凑,因此单边柔性铰链由于小体积及设计和制造上的方便,在精密测量,精密定位等领域被广泛采用^[1-3]。

早在1965年,Paros和Weisbord利用积分

的方法,得出了圆形柔性铰链在不同方向上转动和平移刚度的精确解,并在铰链最小厚度远远小于铰链半径的情况下,得到了铰链柔度的近似解^[4]。后来 Ragulskis 分析了四分之一圆形柔性铰链并用有限元的方法预测了其最大弯曲柔度^[5];近年来 Stuart T. Smith 等人利用类似的方法得到了椭圆柔性铰链的柔度公式,并利用有限元方法和实验进行了验证^[6];Smith 研究了一种叶状形的柔性铰链,并把它应用到快速响应的高精度运动控制的柔性机构中^[7];Nicolae Lobonitu 等人推导出了导角形柔性铰链的刚度公式和转动精度公式,并利用有限元方法和实验进行了验证^[8];Wei Xu 和 Tim King 利用有限元方法分析了矩形、椭圆和导角形柔性铰链的刚度和转动精度^[9];Ryu 分析了柔性铰链机构的运动误差^[10];J. Ling 利用傅立叶积分的方法得到了圆形柔性铰链在轴向力和弯矩下应力的解析解^[11]。

本文利用力学卡氏第二定理,推导了单边导角形柔性铰链柔度和转动精度的闭环解析公式,并用实验和有限元方法验证了公式的正确性。在此基础上,分析了单边导角形柔性铰链的结构参数对其柔度性能的影响,并通过与双边对称导角形柔性铰链的比较,分析了单边导角形柔性铰链的转动能力、转动精度和对轴向载荷的影响等性能。

2 柔度公式

柔性铰链的结构如图 1 所示。柔性铰链的分析是基于小变形悬臂梁假设,弯曲变形是由力和弯矩产生的,考虑了轴向载荷的影响,而剪切和扭转的影响没有考虑,单边导角形柔性铰链的结构参数如图 2 所示,受力分析如图 3 所示。

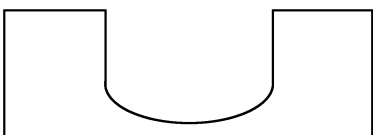


图 1 单边柔性铰链
Fig. 1 Half flexure hinge

2.1 绕 z 轴方向的转动,沿 x、y 轴方向上的平动的柔度公式

在图 3 中 1 点的位移—载荷关系是

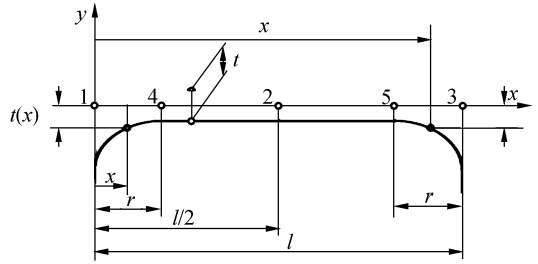


图 2 单边导角形柔性铰链的结构参数
Fig. 2 Geometric parameters of half corner filleted flexure hinge

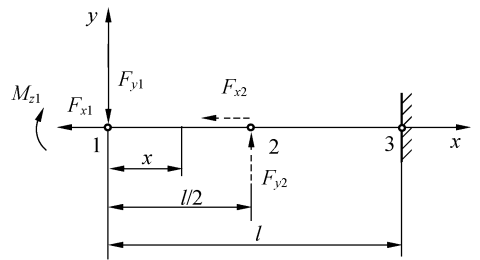


图 3 柔性铰链的受力分析
Fig. 3 Load analysis of flexure hinge

$$\begin{cases} \theta_{z1} \\ y_1 \\ x_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{\theta_z, M_z} & C_{\theta_z, F_y} & 0 \\ C_{y, M_z} & C_{y, F_y} & 0 \\ 0 & 0 & C_{x, F_x} \end{bmatrix} \begin{cases} M_{z1} \\ F_{y1} \\ F_{x1} \end{cases}, \quad (1)$$

根据互等定理, $C_{\theta_z, F_y} = C_{y, M_z}$, 对上式左边的位移矢量应用卡氏第二定理,

$$\begin{cases} \theta_{z1} = \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} \\ y_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{y1}} \\ x_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{x1}} \end{cases}, \quad (2)$$

由材料力学可知,柔性铰链的变形能

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{F_x^2}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right), \quad (3)$$

式中: E —弹性模量; I —转动惯量。

$$F_x = F_{x1} \quad M_z = M_{z1} + F_{y1}x$$

$$A(x) = bt(x) \quad I(x) = \frac{bt(x)^3}{12}$$

建立如图 2 的坐标系,单边导角形柔性铰链的可变厚度方程为

$$t(x) = \begin{cases} t + [r - \sqrt{x(2r-x)}], x \in [0, r] \\ t, x \in [r, l-r] \\ t + r - \sqrt{(l-x)[2r-(l-x)]}, x \in [l-r, l] \end{cases}, \quad (4)$$

将公式(3)(4)代入公式(2)中可得柔度公式

$$C_{x,F_x} = \frac{1}{Ebt} \left\{ l - 2r - \pi t + 2(r+t) \times \left[\arctan \frac{r}{\sqrt{t(2r+t)}} + \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (5)$$

$$C_{y,F_y} = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{2l^3(r+t)(2r+t)^2 + 6lr^3(r+t)(4r+5t)}{6t^3(r+t)(2r+t)^2} - \frac{3l^2r^2(8r^2+13rt+6t^2) - 2(r+t)[8r^5+23r^4t - 7r^3t^2 - 6(3+2\pi)r^2t^3 - 6(1+2\pi)rt^4 - 3\pi t^5]}{6t^3(r+t)(2r+t)^2} + \frac{3l^2r^2 - 6lr^3 + 2(r+t)^2(3r^2 - 4rt - 2t^2)}{\sqrt{t^5(2r+t)^5}} \times \arctan \sqrt{1 + \frac{2r}{t}} \right\}, \quad (6)$$

$$C_{\theta_z, M_z} = \frac{12}{Eb} \left[\frac{l-2r}{t^3} + \frac{r(3r^2+4rt+2t^2)}{t^2(r+t)(2r+t)^2} + \frac{6r^2(r+t)}{\sqrt{t^5(2r+t)^5}} \times \arctan \sqrt{1 + \frac{2r}{t}} \right], \quad (7)$$

$$C_{y, M_z} = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{l(l-2r)}{2t^3} + \frac{3r^4+4r^3t+6r^2t^2+4rt^3+t^4}{2t^2(r+t)(2r+t)^2} - \frac{(r+t)^2(t-r)(3r+t)}{2t^2(r+t)(2r+t)^2} - \frac{3r^3(r+t)}{\sqrt{t^5(2r+t)^5}} \times \left[\arctan \frac{r}{\sqrt{t(2r+t)}} - \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (8)$$

2.2 极限验证

如图 1 所示,当导角半径 r 趋于 0 时,单边导角形柔性铰链就转变为单边矩形柔性铰链,将参数 $r=0$ 代入上面推导的公式,可得到单边矩形柔性铰链的柔度公式。

3 转动精度

在理想情况下,柔性铰链绕其中心轴旋转,中心轴的位置应该保持固定不变。实际上在弯矩和拉力的作用下,柔性铰链的转动中心会产生偏移,从而影响运动精度。因此,在柔性铰链绕中心轴转动时,图 3 中心点 2 的柔度大小可表示运动精度。为了求中心点 2 的位移,在中心点 2 加一假想的力,同理用卡氏第二定理得出在不同载荷作用下柔性铰链中心轴的位移。

图 3 中 2 点的载荷和位移之间关系矩阵方

$$C_{x,F_x}' = \frac{1}{2Ebt} \left[l - 2r - \pi t + 4(r+t) \sqrt{\frac{t}{2r+t}} \arctan \sqrt{1 + \frac{2r}{t}} \right], \quad (13)$$

$$C_{y,F_y}' = \frac{1}{4Ebt^3} \left\{ -l \left[(l-2r)(3l-2r) + \frac{4r^2t(7r^2+8rt+3t^2)}{(r+t)(2r+t)^2} + 12r^3(r+t) \sqrt{\frac{t}{(2r+t)^5}} \right] + 2 \left\{ -l^3 + 8(l-r)^3 + 12t \times \left[-2r^2 + 2rt + t^2 - \frac{3r^2(l-r)^2}{(2r+t)^2} + \frac{r(l^2-2lr)}{2r+t} \right] \right\} + \sqrt{\frac{t}{(2r+t)^5}} \left\{ 3lr^3(2r+t) \arctan \sqrt{\frac{t}{2r+t}} + 2(r+t) \times \left[3l^2r^2 - 6lr^3 + (3r^2 - 4rt - 2t^2) \arctan \sqrt{1 + \frac{2r}{t}} \right] \right\} \right\}, \quad (14)$$

程为

$$\begin{cases} 0 \\ y_2 \\ x_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{y,M_z}' & C_{y,F_y}' & 0 \\ 0 & 0 & C_{x,F_x}' \end{bmatrix} \begin{cases} M_{z1} \\ F_{y1} \\ F_{x1} \end{cases}, \quad (9)$$

根据卡氏第二定理

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\partial U}{\partial F_{x2}} \\ y_2 = \frac{\partial U}{\partial F_{y2}} \end{cases}, \quad (10)$$

同理,可知其变形能为:

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_l EA(x) dx + \int_l \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right), \quad (11)$$

式中: E ——弹性模量; I ——转动惯量。

$$\begin{cases} F_x = F_{x1} + F_{x2} \\ M_z = M_{z1} + F_{y1}x + F_{y2}(x - \frac{l}{2}) \end{cases}, \quad (12)$$

同理,可得柔性铰链的转动中心的柔度为

$$C_{y,M_z}' = \frac{3}{2Ebt^3} \left\{ (l-2r)(3l-2r) + \frac{4r^2t(7r^2+8rt+3t^2)}{(r+t)(2r+t)^2} + 12\pi r^3(r+t)\sqrt{\frac{t}{(2r+t)^5}} - 2l \left[\frac{rt(3r^2+4rt+2t^2)}{(r+t)(2r+t)} + l-2r \right] - 12r(r+t)\sqrt{\frac{t}{(2r+t)^5}} \left(2r^2 \arctan\sqrt{\frac{t}{2r+t}} + l^2 \arctan\sqrt{1+\frac{2r}{t}} \right) \right\}, \quad (15)$$

4 闭环柔度公式的验证

4.1 有限元验证

用有限元方法对闭环柔度公式进行验证,利用有限元分析软件包 ANSYS 建立柔性铰链的模型。在铰链的末端加一单元载荷,在图 3 中的 1 点得到位移,分别与闭环柔度公式计算的结果进

行比较。图 4 为有限元模型。有限元的实验参数为

$$E=110 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\mu=0.33 \quad b=0.01 \text{ m}$$

$$F_{x1}=F_{y1}=1 \text{ N} \quad M_{z1}=1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

有限元分析的结果和公式计算结果如表 1 所示,由表中数据可知,有限元法和精确公式计算结果的偏差在 9% 以内。

表 1 有限元分析结果与柔度解析式计算结果

Tab. 1 Finite element and analytical results for the compliance factors

| | $t(\text{m})$ | $l(\text{m})$ | $r(\text{m})$ | 解析法 | 有限元法 | 偏差(%) |
|--|---------------|---------------|---------------|-------|-------|-------|
| $C_{\theta_z, M_z} (\text{N}^{-1} \text{m}^{-1})$ | 0.000 5 | 0.001 6 | 0.000 25 | 0.249 | 0.271 | 8.118 |
| | 0.000 6 | 0.001 8 | 0.000 30 | 0.161 | 0.175 | 8 |
| $C_{y, F_y} (\text{N}^{-1} \text{m} \times 10^{-7})$ | 0.000 5 | 0.001 6 | 0.000 25 | 2.027 | 2.035 | 3.933 |
| | 0.000 6 | 0.001 8 | 0.000 30 | 1.652 | 1.725 | 4.232 |
| $C_{x, F_x} (\text{N}^{-1} \text{m} \times 10^{-9})$ | 0.000 5 | 0.001 6 | 0.000 25 | 5.541 | 5.950 | 6.874 |
| | 0.000 6 | 0.001 8 | 0.000 30 | 5.177 | 5.275 | 1.857 |
| $C_{y, M_z} (\text{N}^{-1} \times 10^{-4})$ | 0.000 5 | 0.001 6 | 0.000 25 | 1.992 | 2.011 | 0.945 |
| | 0.000 6 | 0.001 8 | 0.000 30 | 1.448 | 1.465 | 1.164 |

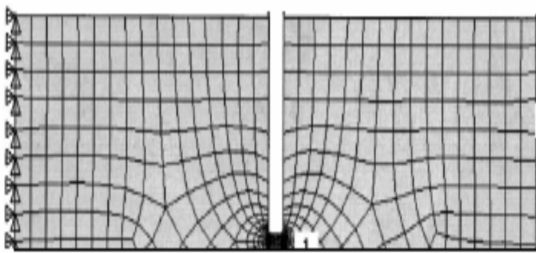


图 4 有限元模型

Fig. 4 Finite element model

4.2 实验验证

用加工的两个厚度为 $5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的铝导角形柔性铰链进行了实验测试,将柔性铰链一端固定,在铰链另一端施加单元载荷,并用位移传感器测量图 5 中 1 点的位移。实验数据与公式计算结果如表 2 所示,由表中数据可知其偏差在 7% 以内。

表 2 实验结果与柔度解析式计算结果

Tab. 2 Experimental and analytical results for the compliance factors

| | 1 | 2 |
|--|-------|-------|
| $t (\text{m} \times 10^{-3})$ | 2.27 | 1.44 |
| $l (\text{m} \times 10^{-3})$ | 25.40 | 19.05 |
| $r (\text{m} \times 10^{-3})$ | 3.17 | 3.17 |
| $C_{y, F_y} (\text{N}^{-1} \text{m} \times 10^{-7})$ | 实验 | 2.892 |
| | 解析法 | 2.860 |
| $C_{y, M_z} (\text{N}^{-1} \times 10^{-4})$ | 实验 | 1.913 |
| | 解析法 | 1.798 |

5 性能分析

通过分析单边导角形柔性铰链柔度公式可知:

所有的柔度参数都与弹性模量 E 和柔性铰链的宽度 b 成反比;