

文章编号 1004-924X(2008)08-1411-05

B样条滤波器建立表面轮廓中线的方法

许景波¹,袁怡宝²,刘泊¹

(1. 哈尔滨理工大学 测控技术与通信工程学院,黑龙江 哈尔滨 150040;

2. 哈尔滨工业大学 自动化测试与控制系,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 根据离散B样条函数的Z域表达式,将B样条空间中对信号的拟合和分解表示成FIR滤波器和IIR滤波器的滤波过程,然后结合变分原则,构建了表面粗糙度测量中用于确定中线的B样条滤波器。将零相移滤波技术应用到B样条滤波器的实现中,得到了相应的差分方程。对一实际工件表面轮廓进行了实验,验证了该方法的可行性。该滤波器同样具有零相移的特性,与高斯滤波器建立中线方法相比,其计算效率提高了3倍。

关键词: B样条滤波器; 信号拟合; 中线; 表面粗糙度

中图分类号: TG84 **文献标识码:** A

Establishment of mean line in surface metrology by B-spline filter

XU Jing-bo¹, YUAN Yi-bao², LIU Bo¹

(1. College of Measure-control Technology & Communication Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150040, China; 2. Department of Automation Measurement & Control, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: According to Z-transform representations of discrete B-spline functions, the fitting and decomposing of the signal in B-spline space can be implemented with FIR filters and IIR filters. With combination of theory above and variational calculus, the B-spline filter was constructed to determine the mean line in surface roughness measurement. A zero phase shift filtering was used in the B-spline filter to obtain the difference equations. The experiment in surface profile of a workpiece validates this method. The B-spline filter also shows the characteristic of zero phase shift and its computing efficiency is three times higher than that of Gaussian filtering mean line.

Key words: B-spline filter; signal fitting; mean line; surface roughness

1 引言

在表面粗糙度测量中,表面评定基准线-中线的建立是一个关键问题,它对评定表面特征参数有着重要的作用^[1-3]。传统的建立表面轮廓中线

的方法有最小二乘中线法、2RC滤波中线法、高斯滤波中线法等。最小二乘中线法是分段在各取样长度上确定中线,因此在由多个取样长度构成的评定长度上,用最小二乘法确定的表面中线往往是不连续的,而且与表面轮廓位置有关。2RC滤波中线法由于其滤波器本身的非线性相移特

收稿日期:2007-11-29;修订日期:2008-01-22.

基金项目:2008年哈尔滨理工大学青年科学研究基金资助项目

性,滤波中线会造成表面粗糙度轮廓的严重失真。为了解决这一问题,人们发展了零相移的相位校正滤波方法。国际标准 ISO11562 推荐高斯滤波中线作为表面粗糙度测量中的评定中线^[4],高斯滤波中线有零相移、不失真的优点,然而高斯滤波器的实现比较复杂,并且存在边界效应问题,对于具有深谷的表面信号鲁棒性也较差。针对上述问题,国际上出现了高斯回归滤波器和样条滤波器两个研究方向^[1]。本文旨在利用 B 样条函数的特性,构建 B 样条滤波器,为表面轮廓中线的建立提供一种新的方法。

样条函数是一种分段多项式,各相邻段上的多项式之间又具有某种连接性质。样条函数对数据平滑逼近的过程实际上可以看作对数据滤波的过程,具有滤波器的特性。前面所述的最小二乘中线,可以看作是分段独立的多项式。样条逼近实质上是对多项式逼近方法的发展,所以用样条函数构成的平滑滤波器对表面轮廓数据进行滤波,也是对最小二乘中线法的发展,旨在克服最小二乘中线的缺陷。同时,高阶 B 样条函数又是对高斯函数的逼近,B 样条滤波器兼具了高斯滤波器的优良特性,同时也是样条函数空间的基函数。所以 B 样条滤波器可以作为一种建立表面轮廓中线的滤波器,本文详细论述在表面粗糙度测量中如何构建 B 样条滤波器来建立表面轮廓中线。

2 B 样条函数

对于具有 $n+2$ 个等间隔点 $\{0, 1, 2, \dots, n+1\}$ 的划分区间 Δ , n 阶 B 样条函数可以定义为^[5-6]:

$$\beta^n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{n!} \binom{n+1}{j} \left(x + \frac{n+1}{2} - j\right)_+^n, \quad (1)$$

式中, $\binom{n+1}{j}$ 表示二项式系数, x_+^n 为 n 次截幂函数,

$$x_+^n = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (2)$$

式(1)是关于原点对称的 B 样条函数,它是样条空间的一种基函数,扩展划分区间至 $(-\infty, +\infty)$,样条函数空间可以由一系列基函数 $\beta^n(x-k)$ ($k \in Z$) 构成,即:

$$s_n(\Delta) = \text{span}\{\beta^n(x-k), k \in Z\}. \quad (3)$$

由样条基函数的线性组合可以构造一系列插

值函数,对划分区间上的连续函数进行插值逼近。可以得到:

$$g_c^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k) \cdot \beta^n(x-k). \quad (4)$$

式中, $g_c^n(x)$ 为插值函数, $C(k)$ 为系数。上述计算过程是一种卷积计算,可以看作一种滤波过程。

3 离散 B 样条函数及其 Z 域特性

对连续 B 样条函数式(1)采样得到离散 B 样条函数:

$$b^n(i) \stackrel{\Delta}{=} \beta^n(i) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{n!} \binom{n+1}{j} \left(i + \frac{n+1}{2} - j\right)_+^n, \quad (5)$$

这里研究式(5)对应的 Z 域表达式。首先考虑数列 $\{k^n; k=0 \dots +\infty\}$ 的 Z 变换,其表达式如下:

$$P^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k^n z^{-k} u(k), \quad (6)$$

其中 $u(k)$ 为:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

由式(6)可以直接得到式(8)的递推关系:

$$P^n(z) = -z \frac{\partial P^{n-1}(z)}{\partial z}. \quad (8)$$

当 $n=0$ 时,式(6)变成了 $u(k)$ 的 Z 变换,可得:

$$P^0(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (9)$$

由此可以递推出高阶 $P^n(z)$,很容易得到其通用表达式如下:

$$P^n(z) = \frac{A^n(z)}{(1-z^{-1})^{n+1}}, \quad (10)$$

其中 $A^n(z)$ 为 z^{-1} 的多项式。通过以上推导,可以得到 0~5 阶 $A^n(z)$ 的表达式如表 1。

根据移位定理^[7]和上述推导得到的 $P^n(z)$,可以得到式(5)的 Z 变换:

$$B^n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{n!} \binom{n+1}{j} (-1)^j z^{\frac{(n+1)}{2}} z^{-j} \frac{A^n(z)}{(1-z^{-1})^{n+1}}. \quad (11)$$

应用式(12):

$$(x+1)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j, \quad (12)$$

最后可得:

$$B^n(z) = z^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} \cdot \frac{A^n(z)}{n!} = \sum_{k=0}^{n+1} b^n(k) z^{-k}, \quad (13)$$

表 1 0~5 阶 $A^n(z)$
Tab.1 $A^n(z)$ for $n=0$ to 5

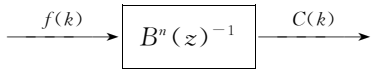
| n | $A^n(z)$ |
|-----|--|
| 0 | 1 |
| 1 | z^{-1} |
| 2 | $z^{-1} + z^{-2}$ |
| 3 | $z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}$ |
| 4 | $z^{-1} + 11z^{-2} + 11z^{-3} + z^{-4}$ |
| 5 | $z^{-1} + 26z^{-2} + 66z^{-3} + 26z^{-4} + z^{-5}$ |

其中 $[x]$ 表示取整, 值为与 x 相邻最近的整数。

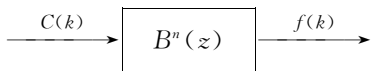
离散 B 样条的 Z 域幅频特性为:

$$B^n(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{n+1} b^n(k) \cdot e^{-j\omega k} \quad (14)$$

建立了 B 样条函数的 Z 域表达式对信号的样条空间分解与重构的运算具有重要意义。对于离散信号 $f(k)$, 其在 B 样条函数空间的表示相当于信号分解的过程, 也即确定相应的分解系数过程, 此过程称为直接 B 样条变换, 可以用式(15)表示:

$$C(k) = [b^n(z)]^{-1} * f(k), \quad (15)$$


$B^n(z)^{-1}$ 相当于一 IIR 型滤波器。而对于信号的重构, 即信号拟合过程, 称为间接 B 样条变换, 用 B 样条基函数表示信号, 如下所示:

$$f(k) = b^n(k) * C(k), \quad (16)$$


$B^n(z)$ 相当于一 FIR 型滤波器。

4 B 样条滤波器的构建

对于表面粗糙度测量中滤波中线的建立过程实质上也是一种对表面轮廓信号平滑处理的过程, 平滑处理掉表面轮廓中波长较小的信号, 得到滤波中线。设表面测量点为: $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$, 相应地, 测量值 $y_i = y(x_i)$ 。中线为 $s(x)$, 可以看作由样条函数拟合的插值函数。根据著名的变分原则可以得知上述平滑处理就是通过确定 $s(x_i)$ 使得下面表达式达到最小。

$$\epsilon_s^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - s(x_i)]^2 + \mu \int_{x_1}^{x_n} \left[\frac{\partial^2 s(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx = \epsilon_a^2 + \mu \epsilon_r^2, \quad (17)$$

其中 μ 为一正的参数, 该参数的选择建立了对数据合理逼近和保持滤波中线足够平滑两者之间的一种折中处理。在表面粗糙度测量条件下, $\int \left[\frac{d^2 s(x)}{dx^2} \right]^2 dx$ 代表了中线的弯曲能量, $s(x)$ 的平滑度的确定可以用弯曲能量来表示^[8-9], 所以可以确定式(17)中 $r=2$, 并且 Schoenberg 已经证明了当式(17)取最小时, 样条阶数 q 与 r 应有: $q=2r-1$ 的关系^[5], 所以平滑 B 样条函数阶次应为 3, 即三阶 B 样条平滑。

滤波中线可以由下面关系确定:

$$s(x_i) = b^3(i) * C(i), \quad (18)$$

$$\epsilon_a^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - [b^3(i) * C(i)]\}^2. \quad (19)$$

利用由 B 样条函数构成的插值函数求导公式和 B 样条函数卷积特性及对称关系, 可以得到:

$$\epsilon_r^2 = \sum_{i=1}^n [d^{(2)} * C(i)][d^{(2)} * C(i) * b^3(i)], \quad (20)$$

其中, $d^{(2)}(i) = \delta_0(i+1) - 2\delta_0(i) + \delta_0(i-1)$ 为二阶差分算子。于是, 式(17)可以表示为:

$$\epsilon_s^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - [b^3(i) * C(i)]\}^2 + \mu \sum_{i=1}^n [d^{(2)} * C(i)][d^{(2)} * C(i) * b^3(i)]. \quad (21)$$

通过建立式(21)对 $C(i)$ 导数为零的求导方程, 可以求得相应的平滑样条系数。将上式表示成内积形式并利用内积运算求导公式及 $b^3(i)$ 的对称关系, 可得:

$$(b^3(i))' * y(i) = (b^3(i))' * b^3(i) * C(i) + \mu [d^{(2)}(i)]' * d^{(2)}(i) * (b^3(i))' * C(i), \quad (22)$$

其中 $b^3(i)'$ 表示 $b^3(i)$ 的伴随算子, 即 $b^3(i)$ 的反序, $b^3(i)' = b^3(-i)$, Z 变换为 $B^3(1/z)$ 。而 $d^{(2)}$ 的 Z 变换为 $D^{(2)}(z) = (z-2+z^{-1})$ 。

所以, 式(22)的 Z 域表达式为:

$$B^3(z^{-1})Y(z) = B^3(z^{-1})B^3(z)C(z) + \mu D^{(2)}(z)D^{(2)}(z^{-1})B^3(z^{-1})C(z), \quad (23)$$

最后可以得到:

$$C(z) = p_\mu^3(z)Y(z) = \frac{1}{B_1^3(z) + \mu(z-2+z^{-1})^2} Y(z), \quad (24)$$

从式(24)可以看出平滑样条系数可以由一滤波器对输入信号进行数字滤波得到, 这一滤波器 P_μ^3

(z)实际上是一 IIR 型滤波器。得到 $C(z)$ 后,再经过间接 B 样条变换,就可以得到表面轮廓中线 $s(x)$,整个过程可由图 1 表示。

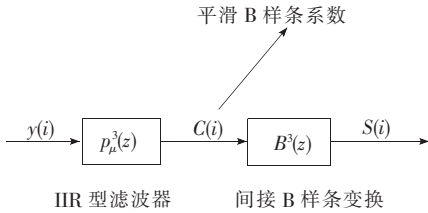


图 1 用 B 样条滤波器建立表面轮廓中线

Fig. 1 Determining mean line of surface profile by B-spline filter

图 1 中构成了一个等效的数字滤波器,如式(25),这一滤波器即为建立表面轮廓中线的 B 样条滤波器。

$$H_{\mu}^3(z) = B^3(z)p_{\mu}^3(z) = \frac{B^3(z)}{B^3(z) + \mu(z - 2 + z^{-1})^2} \quad (25)$$

设 n 为波长 λ 内的采样点数, N_c 为截止波长 λ_c 内的采样点数,式(25)的频率响应为:

$$H_{\mu}^3(e^{j\omega}) = \frac{2 + \cos \omega}{2 + \cos \omega + 12\mu(\cos \omega - 1)^2} = \frac{2 + \cos(2\pi/n)}{2 + \cos(2\pi/n) + 12\mu[\cos(2\pi/n) - 1]^2}, \quad (26)$$

其实质上是一个低通滤波器,在零频时增益为 1,滤波器的衰减受 μ 控制。根据表面粗糙度测量滤波要求在截止波长 λ_c 处,滤波器幅度传输特性应为 $1/2$,所以可得 μ 可以由式(27)确定:

$$\frac{2 + \cos(2\pi/N_c)}{2 + \cos(2\pi/N_c) + 12\mu[\cos(2\pi/N_c) - 1]^2} = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{2 + \cos(2\pi/N_c)}{12[\cos(2\pi/N_c) - 1]^2}, \quad (27)$$

5 算法实现

式(25)中 $B^3(z)$ 可以表示为:

$$B^3(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \quad (28)$$

$P_{\mu}^3(z)$ 可以表示成:

$$P_{\mu}^3(z) = \frac{6}{z + 4 + z^{-1} + 6\mu(z^{-2} - 4z^{-1} + 6 - 4z + z^2)}, \quad (29)$$

其可以分解成两个互补因式之积:

$$P_{\mu}^3(z) = p'(z)p'(1/z), \quad (30)$$

$$P_{\mu}^3(z) = \frac{A}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} * \frac{A}{1 - b_1 z - b_2 z^2}, \quad (31)$$

其中系数由式(32)确定。

$$\begin{cases} A = 1 - 2\rho \cos \omega + \rho^2 \\ b_1 = 2\rho \cos \omega \\ b_2 = -\rho^2 \end{cases} \quad (32)$$

ρ 和 ω 是式(29)的特征多项式两个共轭复根的幅值和相角。

可见 $p_{\mu}^3(z)$ 由两个相互共轭的滤波器组成。可以应用零相移滤波技术来得到相应的差分方程^[10-11],即输入序列先经过其中的一个因果滤波器滤波,然后将得到的输出序列反序再经过同一滤波器,得到的输出再反序,结果即为 $p_{\mu}^3(z)$ 的输出。

设样条滤波器中间序列为 $wz(k)$,表面轮廓总的采样点数为 M ,把式(31)转换成差分方程。则整个基于 3 阶平滑 B 样条滤波器确定表面轮廓中线的计算过程如下:

$$\begin{cases} wz(k) = Ay(k) + b_1 wz(k-1) + b_2 wz(k-2) \\ k = 3 \cdots M \\ C(M-k+1) + Awz(M-k+1) + \\ b_1 C(M-k+2) + b_2 C(M-k+3) \\ k = 3 \cdots M \\ s(k) = \frac{1}{6}C(k-1) + \frac{2}{3}C(k) + \frac{1}{6}C(k+1) \\ k = 4 \cdots M-3 \end{cases}$$

6 实 验

对一个实际工件表面进行测量,选取截止波长 $\lambda_c = 0.8 \text{ mm}$,采样间隔为 $0.5 \text{ }\mu\text{m}$,测量长度为 $7 \lambda_c$,评定长度为 $5 \lambda_c$,共测得 11 200 个数据,其原始轮廓图如图 2 所示。

采用上述 3 阶 B 样条滤波方法,由给定的测量条件,根据前面的计算公式可以得到滤波器参数为 $\mu = 4.2049 \times 10^9$, $\rho = 0.99723$, $\cos \omega = 9.999961 \times 10^{-1}$, $A = 1.5378 \times 10^{-5}$, $b_1 = 1.9944$, $b_2 = -0.99446$ 。所得到的滤波中线如图 3 所示。

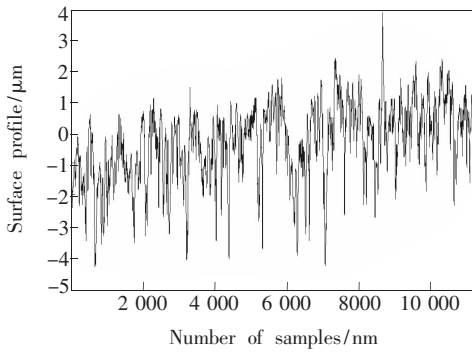


图 2 工件表面轮廓

Fig. 2 Surface profile of a workpiece

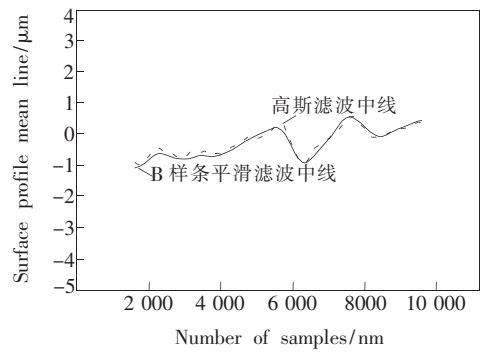


图 3 B样条滤波中线和 Gaussian 滤波中线

Fig. 3 B-spline filtering mean line and Gaussian filtering mean line

7 结 论

从图 3 可以看出 B 样条滤波中线非常接近高斯滤波中线,这说明选用 B 样条滤波器作为一种滤波器用来建立表面轮廓中线的可行性,并且从第 4 节可以看出 B 样条滤波算法具有很高的

计算效率,只通过 3 个差分方程即可完成整个滤波过程,算法简单易实现。众所周知,算法的计算效率主要取决于乘法的计算次数,而在相同计算条件下,就乘法计算次数与高斯滤波逼近实现方法相比,其计算效率提高了 3 倍。该方法也具有零相移的特性,不会使表面粗糙度轮廓产生失真,这些显示出了它的优势。

参考文献:

- [1] RAJA J, MURALIKRISHNAN B, SHENG Y F. Recent advances in separation of roughness waviness and form [J]. *Precision Eng.*, 2002, 26: 222-235.
- [2] 宋康,赵玉龙,蒋庄德.激光干涉微轮廓测量仪[J]. *光学精密工程*, 2003, 11(3): 245-249.
SONG K, ZHAO Y L, JIANG ZH D. Laser profilometer [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2003, 11(3): 245-249. (in Chinese)
- [3] 高春甫, 郭敏. 粗糙表面精度测量系统的研究 [J]. *光学精密工程*, 2005, 13(6): 697-702.
GAO CH F, WU M. Study of measurement system for rough surface accuracy [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2005, 13(6): 697-702. (in Chinese)
- [4] ISO11562-1996, Geometrical Product Specifications (GPS) -Surface Texture: Profile Method-Metrological Characteristics of Phase Correct Filters[S]. International Organization for Standardization, Geneva.
- [5] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. B-spline signal processing: part I -theory [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(2): 821-832.
- [6] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. B-spline signal processing: part II -efficient design and applications [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(2): 834-848.
- [7] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(3): 278-285.
- [8] KRISTEK M. Form filtering by splines [J]. *Measurement*, 1996, 18(1): 9-15.
- [9] KRISTEK M. Discrete L-spline filtering in roundness measurements [J]. *Measurement*, 1996, 18(2): 129-138.
- [10] 程佩青. 数字信号处理教程 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2001.
CHENG P Q. *Digital Signal Processing* [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. (in Chinese)
- [11] YUAN Y B, QIANG X F, SONG J F, et al.. A fast algorithm for determining the Gaussian filtered mean line in surface metrology [J]. *Prec Eng.*, 2000, 24: 62-69.