

文章编号 1004-924X(2012)04-0760-06

## 悬臂梁式硅纳米谐振器的量子压缩效应

张霞<sup>1\*</sup>, 闫社平<sup>2</sup>

- (1. 西安邮电学院 电子工程学院, 陕西 西安 710100;
2. 上海汉得信息技术股份有限公司, 上海 201203)

**摘要:**分析了厚度分别为 12 nm 和 38.5 nm 的悬臂梁式硅纳米谐振器内由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度, 分析结果表明, 零点位置不确定度与悬臂梁的厚度和宽度成反比、与悬臂梁的长度成正比, 12 nm 厚的悬臂梁其零点位置不确定度为  $4.1 \times 10^{-3}$  nm。结合参量泵量子压缩技术, 分析了不同厚度的悬臂梁式硅纳米谐振器的量子压缩系数与器件结构尺寸、温度、泵激电压之间的关系, 结果显示, 量子压缩系数与温度成正比、与泵激电压成反比。当温度为 0.01 K、泵激电压为 4 V 时, 12 nm 厚的悬臂梁式硅纳米谐振器的量子噪声降低了 26.56 dB。该项研究有助于提高极薄悬臂梁式硅纳米谐振器在量子噪声影响下的极限检测精度。

**关键词:** 纳米谐振器; 悬臂梁; 量子噪声; 量子压缩; 零点位置不确定度

**中图分类号:** TN752; TH824 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20122004.0760

## Quantum-squeezing effects of silicon cantilever nano-resonators

ZHANG Xia<sup>1\*</sup>, YAN She-ping<sup>2</sup>

- (1. Department of Electronic Engineering, Xi'an University of Posts & Telecommunications, Xi'an 710100, China;
2. HAND Enterprise Solutions Co., Ltd., Shanghai 201203, China)

\* Corresponding author, E-mail: zhangxia@xupt.edu.cn

**Abstract:** This paper analyzed the zero-point displacement uncertainty determined by Heisenberg uncertainty principle in the silicon cantilever nano-resonators with the thicknesses of 12 nm and 38.5 nm. The analysis results show that the zero-point displacement uncertainty is inversely proportional to the thickness and width of the cantilever and proportional to the length of the cantilever, and the zero-point displacement uncertainty of the silicon cantilever nano-resonator with the thickness of 12 nm is  $4.1 \times 10^{-3}$  nm. Combining the parametric pumping quantum squeezing technique, the relationships between the quantum-squeezing factors of the silicon cantilever nano-resonators with different thicknesses and their structure dimensions, temperatures, pumping voltages were analyzed. The analysis results show that the quantum-squeezing factor is proportional to the temperature, and inversely proportional to the pumping voltage. When the temperature is 0.01 K and the pumping voltage equals 4 V, the quantum noise of the silicon cantilever nano-resonator with the thickness of 12 nm

收稿日期: 2011-11-12; 修订日期: 2011-12-16.

基金项目: 西安邮电学院中青年教师科研基金资助项目 (No. 0001282)

is reduced by 26.56 dB. The analysis results promote the improvement of the measurement accuracy of the ultra-thin cantilever nano-resonators under the influence of the quantum noises observably.

**Key words:** nano-resonator; cantilever; quantum noise; quantum-squeezing; zero-point displacement uncertainty

## 1 引言

上世纪90年代末,纳机电系统(NEMS)的概念被提出来,它是继微机电系统(MEMS)后出现的一类在系统特征尺寸和效应上具有纳米技术特点的超小型机电一体系统,其特征尺寸一般在亚纳米到数百纳米之间,以纳米级结构所产生的新效应,包括量子效应、界面效应和纳米尺度效应为工作特征<sup>[1-2]</sup>。与MEMS器件相比,NEMS器件具有频率高、能耗低、品质因子高等优点,因此它在高分辨率检测传感器、高速执行器、高频信号处理等领域得到了广泛应用<sup>[3-4]</sup>。随着NEMS技术的发展,悬臂梁式传感器获得了广泛的应用,特别是在单分子、单细胞等水平上的极其细微的探测<sup>[5]</sup>。在众多悬臂梁式传感器中,谐振器具有较高的频率偏移分辨率,因此倍受重视<sup>[6-8]</sup>。李昕欣等人于2002年报道了一种采用单面加工技术制造的厚度仅为12 nm的悬臂梁式硅纳米谐振器,并研究了不同厚度情况下硅的杨氏模量的尺度效应<sup>[5,9]</sup>。随着纳米谐振器尺寸的不断减小,谐振器振动或检测产生的位移接近甚至小于由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度(即量子噪声),从而导致检测信号可能淹没在量子噪声中而无法进行精确测量,因此减小量子噪声已成为目前的研究热点之一,而量子压缩则提供了一种可以减小量子噪声的有效方法<sup>[10-12]</sup>。

本文以李昕欣等人设计并加工的悬臂梁式硅纳米谐振器为研究对象,分析悬臂梁在不同厚度情况下由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度,并进一步分析了采用参量泵技术实现量子压缩后,尺寸、温度以及泵激电压(pumping电压)对量子压缩系数的影响,为今后降低悬臂梁式硅纳米谐振器的量子噪声提供可行的方案。

## 2 悬臂梁式硅纳米谐振器的零点位置不确定度

随着高精度检测的需要,纳米谐振器的机械位移变化量已经变得很小,甚至小于由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度 $\Delta x_{zp}$ ,从而导致信号淹没在器件的量子噪声中<sup>[13]</sup>。在经典物理学中,复振幅 $\hat{X} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2$ 能够完全精确的测得,其中 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 分别是复振幅的实部和虚部。但在量子理论中由于 $\hat{X}_1$ 、 $\hat{X}_2$ 并不对易,且存在对易关系 $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i\hbar/m_{\text{eff}}\omega_0$ 。其中 $\hbar$ 为约化普朗克常数, $\hbar = 1.054\ 57 \times 10^{-34}$  J·s, $m_{\text{eff}}$ 为机械系统中核心结构梁的有效运动质量, $\omega_0$ 为核心结构梁的基态角频率<sup>[14-15]</sup>。因此, $\hat{X}_1$ 、 $\hat{X}_2$ 的波动必须满足海森堡不确定原理,即:

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle| = \hbar/2m_{\text{eff}}\omega_0. \quad (1)$$

对于一个悬臂梁式硅纳米谐振器来说,引入零点位置不确定度 $\Delta x_{zp}$ ,其表达式为<sup>[10]</sup>:

$$\Delta x_{zp} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\omega_0}}, \quad (2)$$

其中, $m_{\text{eff}} = \eta\rho LWH$ , $\rho$ 为梁材料的体密度, $L$ 、 $W$ 、 $H$ 分别为梁的长度、宽度及厚度。无外应力时, $\omega_0 = 2\pi A(E/\rho)^{1/2} H/L^2$ <sup>[16]</sup>, $E$ 为杨氏模量,对于悬臂梁来说 $\eta = 0.25$ , $A = 0.162$ <sup>[17]</sup>。结合文献[5]中给出的厚度为12 nm和38.5 nm的悬臂梁式硅纳米谐振器的杨氏模量分别为53 GPa和68 GPa,得到零点位置不确定度 $\Delta x_{zp}$ 与 $L$ 和 $W$ 之间的关系曲线如图1所示。

可见,由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度 $\Delta x_{zp}$ 与梁的长度成正比,与梁的厚度和宽度成反比。当 $L = 13\ \mu\text{m}$ 、 $W = 0.1\ \mu\text{m}$ 、 $H = 12\ \text{nm}$ 时,计算得到悬臂梁式硅纳米谐振器的零点位置不确定度 $\Delta x_{zp} = 4.1 \times 10^{-3}\ \text{nm}$ ;当梁的长度和宽度不变,厚度为38.5 nm时,计算得到悬

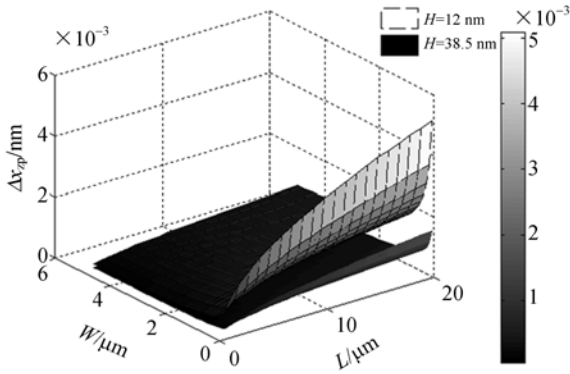


图 1 悬臂梁厚度分别为 12 nm 和 38.5 nm 时,  $\Delta x_{zp}$  与  $L$  和  $W$  之间的关系曲线

Fig. 1  $\Delta x_{zp}$  versus  $L$  and  $W$  of cantilever with the different thicknesses of 12 nm and 38.5 nm

臂梁式硅纳米谐振器的零点位置不确定度  $\Delta x_{zp} = 1.2 \times 10^{-3}$  nm。

### 3 悬臂梁式硅纳米谐振器的量子压缩效应

海森堡不确定原理要求  $\Delta X_1$  与  $\Delta X_2$  的乘积大于等于  $\hbar/m_{\text{eff}}\omega$ , 因此可以使得  $\Delta X_1$  与  $\Delta X_2$  的其中一个量小于量子噪声所确定的零点位置不确定度  $\Delta x_{zp}$ , 而另一个量大于  $\Delta x_{zp}$ , 即可以通过使得  $\Delta X_1 \leq (\hbar/m_{\text{eff}}\omega)^{1/2}$  或者  $\Delta X_2 \geq (\hbar/m_{\text{eff}}\omega)^{1/2}$  来在  $X_1$  或  $X_2$  分量上实现量子压缩。

文献[18,19]中指出通过 BAE (Back-action-evading) 平衡桥电路, 可以抑制加到梁上的静电驱动力, 而只剩下对其弹性系数的调制。在悬臂梁和衬底之间施加泵激电压  $V_{\text{pump}}(t) = V_p [1 + \sin(2\omega_p t + \theta)]$ , 得到调制后的弹性系数  $k_p(t) = k_0 \sin(2\omega_p t + \theta)$ , 其中  $k_0 = C_B V_p^2 / 2d^2$ ,  $C_B$  为桥电容,  $C_B = LW\epsilon_0/d$ ,  $d$  为梁与衬底之间的间隙。当频率  $\omega_p = \omega$  时, 从最初的热平衡状态调制悬臂梁, 得到  $X_1$  和  $X_2$  的平均波动幅度  $\Delta X_{1,2}^2(t, \theta)$ , 具体如下<sup>[20-21]</sup>:

$$\Delta X_{1,2}^2(t, \theta) = \frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\omega} (2N+1) e^{-t/\tau} [\text{ch}(2\eta t) \mp \cos \theta \text{sh}(2\eta t) + \tau^{-1} (I_a \pm \cos \theta I_b)], \quad (3)$$

式中,

$$I_a = \int_0^t e^{t'/\tau} \text{ch}[2\eta(\delta - t)] d\delta, \quad (4)$$

$$I_b = \int_0^t e^{t'/\tau} \text{sh}[2\eta(\delta - t)] d\delta, \quad (5)$$

$$N = 1 / (e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1), \quad (6)$$

其中,  $N$  为量子数,  $T$  为初始晶格温度,  $K_B$  为玻尔兹曼常数,  $\tau = Q/\omega_0$  为机械振动的弛豫时间,  $Q$  为品质因子,  $\eta = C_B V_p^2 / 8d^2 m_{\text{eff}} \omega_0$ 。当相位  $\theta=0$  时达到最大调制状态或称最佳量子压缩态,  $\Delta X_1$  可以简化为:

$$\Delta X_1(t)|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\omega} (2N+1) \frac{1}{(1/\tau + 2\eta)} [1/\tau + 2\eta e^{-(1/\tau + 2\eta)t}]}. \quad (7)$$

当  $t$  趋于无穷时,  $\Delta X_1$  的最大压缩为有限值, 其表达式为:

$$\Delta X_1|_{t \rightarrow \infty, \theta=0} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{eff}}\omega} (2N+1) \frac{1}{1 + Q C_B V_p^2 / 4d^2 m_{\text{eff}} \omega^2}}. \quad (8)$$

定义量子压缩系数为  $R = \Delta X_1 / \Delta x_{zp}$ , 其表达式为:

$$R = \sqrt{\frac{2 / (e^{K_B \hbar \omega / 2} - 1) + 1}{1 + \frac{Q \epsilon_0 V_p^2 L^4}{(2\pi A)^2 E d^3 H^3}}}. \quad (9)$$

由式(9)可见, 量子压缩系数  $R$  与梁的长度、厚度、梁与衬底之间的间隙、泵激电压、温度、杨氏模量以及品质因子有关。

对于本文所研究的不同厚度的悬臂梁式硅纳米谐振器来说, 在长度、厚度、梁与衬底之间间隙一定的情况下, 量子压缩系数  $R$  与温度  $T$  之间的关系曲线如图 2 所示, 量子压缩系数  $R$  与 pump 电压  $V_p$  之间的关系曲线如图 3 所示。文献[5]中给出在  $1 \times 10^{-5}$  Pa 下, 12 nm 厚悬臂梁式硅纳米谐振器的品质因子为 20 533, 依据  $Q$  与梁的厚度之间的关系可知 38.5 nm 厚的悬臂梁式硅纳米谐振器的品质因子为 23 940<sup>[16]</sup>。

由图 2 和图 3 可见, 量子压缩系数  $R$  与温度成正比, 而与泵激电压成反比。当温度一定时, 泵激电压越大, 量子压缩系数  $R$  越小, 图中  $\log(R) < 0$  的区域则说明此时  $\Delta X_1 < \Delta x_{zp}$ , 即能够实现量子压缩, 反之  $\log(R) > 0$  的区域则说明该条件下不能够实现量子压缩。同时, 由图 2 可知, 悬臂梁的厚度越大, 要使得量子压缩能够实现的温度

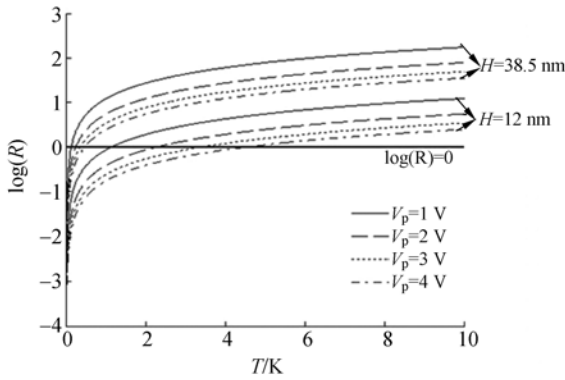
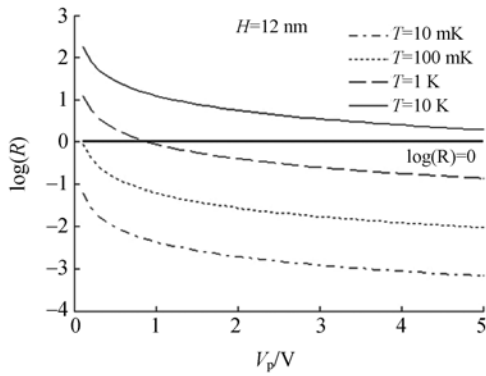


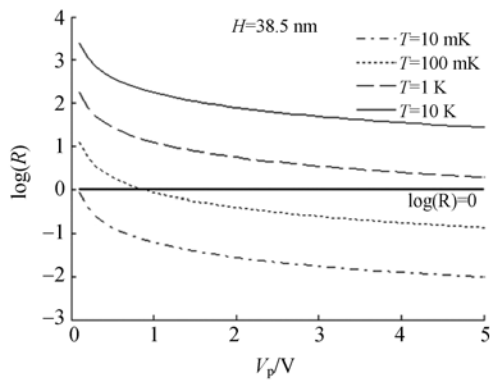
图 2 悬臂梁时厚度不同,量子压缩系数 R 与温度 T 之间的关系曲线

Fig.2 R versus T of cantilever with different thicknesses



(a) 悬臂梁厚度为 12 nm 时,量子压缩系数 R 与泵激电压 Vp 之间的关系曲线

(a) R versus Vp of cantilever with the thickness of 12 nm



(b) 悬臂梁厚度为 38.5 nm 时,量子压缩系数 R 与泵激电压 Vp 之间的关系曲线

(b) R versus Vp of cantilever with the thickness of 38.5 nm

图 3 不同厚度的悬臂梁量子压缩系数 R 与泵激电压 Vp 之间的关系曲线

Fig.3 R versus Vp of cantilever with different thicknesses

条件就越低,这是因为温度越低,其量子数 N 就越少,则越容易实现量子压缩。表 1 中给出了典型参数下的量子压缩系数 R 的数值。当  $T=10$  mK,  $V_p=4$  V,  $H=12$  nm 时  $R$  为 0.047,即施加量子压缩效应后,悬臂梁式硅纳米谐振器的零点位置不确定度由  $4.1 \times 10^{-3}$  nm 压缩为  $1.9 \times 10^{-4}$  nm,即量子噪声降低了 26.56 dB。

表 1 不同温度和电压下,不同厚度的悬臂梁式硅纳米谐振器的量子压缩系数

Tab.1 R of silicon cantilever nano-resonators with different thicknesses at various T and  $V_p$

	T=10 mK,	T=500 mK,	T=5 K,
	$V_p=4$ V	$V_p=2$ V	$V_p=1$ V
H=12 nm 时的 R	0.047	0.471	2.106
H=38.5 nm 时的 R	0.149	1.490	6.665

采用与时间相关的参量泵技术实现量子压缩的过程中,可以避免当  $t$  趋于无穷时  $X_2$  无限增大,泵激过程应在特征时间  $t_c$  后停止,此时 R 已接近其极限值,  $t_c$  的表达式为:

$$t_c = \frac{4 m_{\text{eff}} \omega_0 d^2}{C_B V_p} \ln(QC_B V_p^2 / 4 m_{\text{eff}} \omega_0^2 d^2) \quad (10)$$

当  $L=13 \mu\text{m}$ ,  $W=0.1 \mu\text{m}$ ,  $H=12$  nm,  $V_p=4$  V 时,  $t_c$  为  $0.286 \mu\text{s}$ 。当  $T=1$  K,  $V_p=4$  V 时,  $\Delta X_1$  和  $\Delta X_2$  随着时间的变化如图 4 所示,其中横坐标时间  $t$  是以  $t_c$  为单位的,纵坐标为以对数表示的  $\Delta X_1$  和  $\Delta X_2$  与  $\Delta x_{zp}$  的比值。可见,在近  $0.3 t_c$  之后 R 已达到其稳定值。

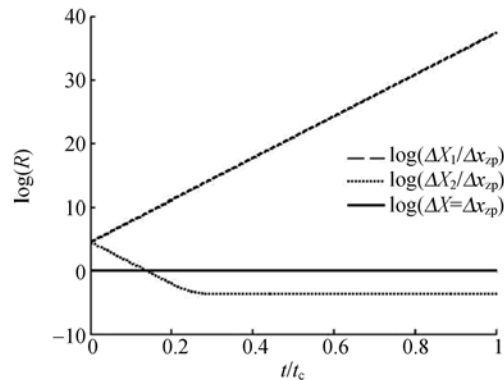


图 4  $\Delta X_1$  和  $\Delta X_2$  随时间变化的曲线

Fig.4 Time dependences of  $\Delta X_1$  and  $\Delta X_2$

## 4 结 论

以李昕欣等人设计并加工的悬臂梁式硅纳米谐振器为研究对象,分析了厚度分别为 12 nm 和 38.5 nm 的悬臂梁,悬臂梁内由海森堡不确定原理所决定的零点位置不确定度  $\Delta x_{zp}$  与梁的长度成正比,与梁的厚度和宽度成反比。进一步分析

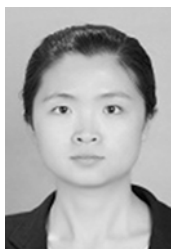
了采用参量泵技术,通过增大泵激电压、降低温度可以减小量子压缩系数,使得量子噪声对悬臂梁式硅纳米谐振器检测精度的影响降低了 26.56 dB。分析结果表明,悬臂梁的厚度越厚,就越不容易实现量子压缩。今后可以在实验中通过量子压缩技术来提高纳米尺寸悬臂梁式谐振器的极限检测精度。

## 参考文献:

- [1] EKINCI K L, ROUKES M L. Nanoelectromechanical systems [J]. *Review of Scientific Instruments*, 2005, 76(6):061101-1-12.
- [2] BLENCOWE M P. Nanoelectromechanical systems [J]. *Contemporary Physics*, 2005, 46(4):249-264.
- [3] EKINCI K L. Electromechanical transducers at the nanoscale: Actuation and sensing of motion in nanoelectromechanical systems (NEMS) [J]. *Small*, 2005, 1(8-9):786-797.
- [4] LI M, TANG H X, ROUKES M L. Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications [J]. *Nature Nanotechnology*, 2007, 2:114-120.
- [5] LI X X, ONO T, WANG Y L, *et al.*. Study on ultra-thin NEMS cantilevers-high yield fabrication and size-effect on Young's modulus of silicon [C]. *Fifteenth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, Technical Digest*, 2002:427-430.
- [6] HARLEY J A, KENNY T W. High-sensitivity piezoresistive cantilevers under 1 000 Å thick [J]. *Applied Physics Letters*, 1999, 75(2):289-291.
- [7] YANG J, ONO T, ESASHI M. Mechanical behavior of ultrathin microcantilever [J]. *Sensors and Actuators A*, 2000, 82(1-3):102-107.
- [8] ALBRECH T R, GRUTTER P, HOME D, *et al.*. Frequency modulation detection using high-Q cantilevers for enhanced force microscope sensitivity [J]. *Journal of Applied Physics*, 1991, 69(2):668-673.
- [9] LI X X, ONO T, WANG Y L, *et al.*. Ultrathin single-crystalline-silicon cantilever resonators: Fabrication technology and significant specimen size effect on Young's modulus [J]. *Applied Physics Letters*, 2003, 83(15):3081-3083.
- [10] LAHAYE M D, BUU O, CAMAROTA B, *et al.*. Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator [J]. *Science*, 2004, 304:74-77.
- [11] BLENCOWE M. Nanomechanical quantum limits [J]. *Science*, 2004, 304:56-57.
- [12] GAO M, LIU Y X, WANG X B. Coupling rydberg atoms to superconducting qubits via nanomechanical resonator [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(2):022309.
- [13] 闫社平. 硅纳米线的机电特性研究 [D]. 杭州:浙江大学, 2011:65-66.
- YAN S P. *Research of the electromechanical characteristics on silicon nanowire* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2011:65-66. (in Chinese)
- [14] 曾谨言. 量子力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2007:1-12.
- ZENG J Y. *Quantum Mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2007:1-12. (in Chinese)
- [15] 关洪. 量子力学基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999:81-91.
- GUAN H. *The Basis of Quantum Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999:81-91. (in Chinese)
- [16] BAO M H. *Micro Mechanical Transducers: Pressure Sensors, Accelerometers and Gyroscopes* [M]. Netherlands: Elsevier Science:33-137.
- [17] BLENCOWE M. Quantum electromechanical systems [J]. *Physics Reports*, 2004, 395(3):159-222.
- [18] CINQUEGRANA C, MAJORANA E, RAPAGNANI P, *et al.*. Back-action-evading transducing scheme for cryogenic gravitational-wave antennas [J]. *Physical Review D*, 1993, 48(2):448-465.
- [19] BLENCOWE M P, WYBOURNE M N. Quantum squeezing of mechanical motion for micron-sized cantilevers [J]. *Physica B*, 2000, 280(1-4):555-556.

- [20] GRISHCHUK L P, SAZHIN M V. Squeezed quantum states of a harmonic-oscillator in the problem of detecting gravitational-waves [J]. *Zh Eksp Teor Fiz*, 1983, 84:1937-1950.
- [21] XU Y, YAN S P, JIN Z H, *et al.*. Quantum squeezing effects of strained multilayer graphene NEMS [J]. *Nanoscale Research Letters*, 2011, 6 (1):355.

## 作者简介:



张霞(1983—),女,内蒙古牙克石人,博士,讲师,2005年于吉林大学获得学士学位,2010年于浙江大学获得博士学位,主要研究方向为微机械惯性传感器和传感器的量子压缩。E-mail: zhangxia@xupt.edu.cn



闫社平(1982—),男,河北邯郸人,博士,工程师,2005年于中山大学获得学士学位,2011年于浙江大学获得博士学位,主要从事微纳器件特性的研究。E-mail: sheping82@163.com

## ●下期预告

## 基于姿态矩阵判据的光学焦距在线快速标定

全伟<sup>1\*</sup>,刘阳<sup>1</sup>,王广君<sup>2</sup>

(1.北京航空航天大学 仪器光电学院 惯性技术国家级重点实验室  
新型惯性仪表与导航系统技术国防重点学科实验室,北京 100191

2.中国地质大学 信息技术实验中心(武汉),武汉 湖北 430074)

在轨运行的微小航天器因发射过程振动引起的结构变形、在轨太阳光照产生的结构热变形等原因会使发射前对惯性恒星罗盘(Inertial Stellar Compass:ISC)标定的光学系统焦距偏离实际值,进而影响了微小航天器的高精度姿态确定。针对此问题,提出了一种基于姿态矩阵判据的ISC光学系统焦距在线快速标定方法。首先,分析了光学系统焦距与姿态矩阵的映射关系,然后利用任一时间由滤波生成的姿态矩阵,结合姿态矩阵单位正交特性的这一判据,并采用迭代法,最终实现了ISC光学系统焦距的在线快速标定。实验结果表明:该方法对ISC光学系统焦距的标定精度同星点质心提取的像素精度相当,大约为0.01个像素。该方法可在轨随时进行光学系统焦距的标定,而且标定速度快,不需要采集大量姿态测量传感器的数据,标定效果良好。