

文章编号 1004-924X(2012)04-0706-06

## 基于星点图像的小像差复原

陈新华, 季轶群\*, 沈为民

- (1. 苏州大学 现代光学技术研究所, 江苏 苏州 215006;
2. 江苏省现代光学技术重点实验室, 江苏 苏州 215006)

**摘要:**提出了一种基于星点图像的小像差光学系统像差复原方法。应用标量衍射理论和 Bessel 级数, 推导了以波像差的 Zernike 系数为参量的小像差光学系统点扩散函数的解析计算公式, 利用该公式给出了基于星点图像的小像差复原问题的目标函数及梯度函数的表达式, 并采用最优化方法进行求解。分别在理想情况和噪声情况下数值模拟了光学系统的像差复原, 验证了本文提出的像差复原方法的有效性, 并分析了星点目标尺寸对复原效果的影响。该方法以波像差的 Zernike 系数为优化变量, 并利用推导得到的解析表达式计算目标函数及其梯度值, 避免了常用像差复原算法中所需的傅里叶变换和有限差分等数值运算, 提高了复原算法的运算速度。

**关键词:**小像差复原; Zernike 多项式; 点扩散函数; 星点图像

**中图分类号:** TH703; TP391.4 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20122004.0706

## Small-aberration retrieval based on spot images

CHEN Xin-hua, JI Yi-qun\*, SHEN Wei-min

- (1. Institute of Modern Optical Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China;
  2. Jiangsu Key Laboratory of Modern Optical Technology, Suzhou 215006, China)
- \* Corresponding author, E-mail: jiyiqun@163.com

**Abstract:** A small-aberration retrieval method based on spot images was introduced and an analytic formula to computer the point spread function for a small aberration optical system was derived according to the scalar diffraction theory and Bessel series. With this formula, the objective function and its gradient were given for the small-aberration retrieval method. Then, the optimized method was used to solve this problem. The effectiveness of this method was demonstrated by using the numerical simulation under ideal and noisy conditions, respectively, and the influence of the size of spot object on the retrieval results was also analyzed. This method uses aberration's Zernike coefficients as optimization variants and computes the objective function and its gradient with analytic expressions to avoid Fourier transform or numerical integral needed in common aberration retrieval methods. Therefore, it improves the speed of aberration retrieval greatly.

**Key words:** small-aberration retrieval; Zernike polynomial; point spread function; spot image

收稿日期: 2011-09-30; 修订日期: 2011-12-15.

基金项目: 国家 973 重点基础研究发展计划资助项目 (No. 613113); 国家自然科学基金资助项目 (No. 61078043); 江苏高校优势学科建设工程资助项目 (PAPD)

## 1 引言

星点图像是光学系统对点光源所成的像,光学系统的像差和衍射决定了其强度分布,理想光学系统的星点图像即为艾里斑。星点图像能够反映光学系统的像差特性,利用它检验光学系统像差具有装置简单、易于实现等优点,在显微物镜、望远物镜等小像差光学系统的像差检验中具有广泛应用。然而,当光学系统像差类型较多时,星点图像包含的像差信息难以提取,使得星点图像长期以来只能用于光学系统像差的定性检验。因此,研究基于星点图像的像差定量检测对于光学系统的性能检测和评价具有重要意义<sup>[1-2]</sup>。

基于图像的像差复原方法的提出使得利用星点图像定量检测光学系统像差成为可能。该方法通过获取光学系统的星点图像,利用复原算法反演出光学系统光瞳处的位相分布,从而得到光学系统的像差。该方法于1991年成功应用于哈勃太空望远镜的像差检测后<sup>[3]</sup>,得到了各国科研人员的关注。与传统的干涉仪检测方法相比,该方法测量像差时无需参考波面,具有结构简单,易于实现,检测效率高等优点。

$$U(x, y; f) = U(r, \phi; f) = \frac{1}{\pi} \int_{v^2 + \mu^2 \leq 1} \exp[if(v^2 + \mu^2)] \exp[i\Phi(v, \mu)] \exp[2\pi i vx + 2\pi i \mu y] dv d\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(if\rho^2) \exp[i\Phi(\rho, \theta)] \exp[2\pi i r \rho (\theta - \phi)] \rho d\rho d\theta, \quad (1)$$

式中 $(\rho, \theta)$ 和 $(r, \phi)$ 分别为正则归一化光瞳面坐标 $(v, \mu)$ 和像面坐标 $(x, y)$ 对应的极坐标<sup>[8-9]</sup>,  $f$ 表示离焦量。

光瞳函数 $\exp[i\Phi(\rho, \theta)]$ 可以用泰勒级数进行展开。对于小像差光学系统,可以舍去泰勒级数展开式中的高次项,仅采用前两项来近似表示光瞳函数。同时利用 Zernike 多项式  $R_n^m \cos(m\theta)$  对

基于图像的像差复原问题属于反问题,直接求解较为困难。1972年, Gerchberg 和 Saxton 等人提出了著名的 G-S 算法<sup>[4]</sup>, 利用光瞳面和像面之间的傅里叶变换关系, 通过迭代运算复原出光瞳处的波像差。Fienup 等人对 G-S 算法进行深入研究, 并提出了改进算法, 提高了像差复原算法的收敛速度<sup>[5]</sup>。Gonsalves 等人提出了 Phase diversity 方法, 解决了像差复原中的二值问题<sup>[6]</sup>。

本文提出一种基于星点图像的小像差光学系统像差复原方法, 利用星点图像解析计算公式建立以光学系统波像差的 Zernike 系数为优化变量的目标函数, 并采用最优化方法对目标函数进行求解, 获得光学系统的像差。该方法以波像差的 Zernike 系数为优化变量, 复原结果即为光学系统像差的 Zernike 系数; 引入星点图像解析计算公式, 避免了传统像差复原算法中的傅里叶变换和有限差分等运算, 提高了运算速度。

## 2 点扩散函数的解析计算公式

由标量衍射理论可知, 不同像面处点扩散函数的复振幅分布  $U$  与光学系统波像差函数  $\Phi$  之间的关系满足式(1)<sup>[7]</sup>。

波像差函数进行分解, 如式(2)所示。

$$\exp[i\Phi(\rho, \theta)] \approx 1 + i\Phi(\rho, \theta) = 1 + i \sum_{n,m} \alpha_n^m R_n^m \cos(m\theta), \quad (2)$$

式中  $n, m \geq 0$ ,  $n - m$  为偶数且  $n - m \geq 0$ ,  $\alpha_n^m$  为 Zernike 多项式的系数。

将式(2)带入式(1)中, 可得:

$$U(r, \phi; f) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [1 + i \sum_{n,m} \alpha_n^m R_n^m \cos(m\theta)] \exp(if\rho^2) \exp[2\pi i r \rho \cos(\theta - \phi)] \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^1 \rho \exp(if\rho^2) J_0(2\pi r \rho) d\rho + 2i \sum_{n,m} i^m \alpha_n^m \cos(im\phi) \int_0^1 \rho \exp(if\rho^2) R_n^m(\rho) J_m(2\pi r \rho) d\rho, \quad (3)$$

式(3)中的  $\int_0^1 \rho \exp(i f \rho^2) R_n^m(\rho) J_m(2\pi \rho r) d\rho$  项可以利用 Bessel 级数来表示,如下式所示<sup>[10]</sup>:

$$V_n^m(r, f) = \int_0^1 \rho \exp(i f \rho^2) R_n^m(\rho) J_m(2\pi \rho r) d\rho = \exp(i f) \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{-i f}{\pi r} \right]^l \sum_{j=0}^p u_{lj} \frac{J_{m+l+2j+1}(2\pi r)}{2\pi r}, \quad (4)$$

其中  $u_{lj}$  为:

$$u_{lj} = (-1)^p \frac{m+l+2j+1}{q+l+j+1} \cdot \frac{\binom{m+j+l}{l} \binom{j+l}{l} \binom{l}{p-j}}{\binom{q+j+l}{l}}, \quad (5)$$

其中  $l=0, 1, \dots, j=0, 1, \dots, p, p=(n-m)/2, q=(n+m)/2$ 。

将式(4)带入式(3),可得:

$$U(r, \phi; f) = 2V_0^0(r, f) + 2i \sum_{n,m} i^m \alpha_n^m V_n^m(r, f) \cos(m\phi). \quad (6)$$

由式(6)可知,在小像差的条件下,点扩散函数的复振幅分布可以表示为多项式  $V_n^m(r, f) \cos(m\phi)$  的线性组合,其系数恰为光学系统波像差进行 Zernike 多项式分解后对应多项式的系数。利用该式即可直接由光学系统像差的 Zernike 系数计算得到光学系统的点扩散函数的复振幅分布,无

$$g = \sum_i |\omega_i [I_{i,m}(r, \phi; f_i) - I_{i,r}(r, \phi; f_i)]|^2 = \sum_i \left| \omega_i \left[ I_{i,m}(r, \phi; f_i) - \left| 2V_0^0(r, f_i) + 2i \sum_{n,m} i^m \alpha_n^m V_n^m(r, f_i) \cos(m\phi) \right|^2 \right] \right|^2, \quad (9)$$

其中  $I_{i,m}(r, \phi; f_i)$  为测量得到的第  $i$  个像面上的星点图,  $I_{i,r}(r, \phi; f_i)$  是由恢复得到的像差系数通过理论计算得到的第  $i$  个像面上的星点图,  $\omega_i$  为权重因子。

目标函数建立之后,需要选择合适的最优化

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_n^m} = - \sum_i 4\omega_i^2 \cos(m\phi) \{ [I_{i,m}(r, \phi; f_i) - I_{i,r}(r, \phi; f_i)] \} \times \{ i^{m+1} V_n^m(r, f_i) \text{conj}[U(r, \phi; f_i)] + \text{conj}[i^{m+1} V_n^m(r, f_i)] U(r, \phi; f_i) \}, \quad (10)$$

其中符号  $\text{conj}(\cdot)$  表示求共轭。

## 4 数值仿真

为了验证本文所提出的像差复原方法,本文利

用傅里叶变换运算,提高了运算速度。

## 3 基于星点图像的像差复原

根据信息光学理论可知,非相干线性空间不变光学成像系统物像强度分布满足式(7)<sup>[11]</sup>。

$$I(x, y; f_i) = o(x, y) \otimes h(x, y; f_i), \quad (7)$$

式中  $I(x, y; f_i)$  表示离焦量为  $f_i$  的像面处的光强分布,  $h(x, y; f_i)$  表示对应像面处的强度点扩散函数,  $o(x, y)$  表示目标的强度分布,  $\otimes$  表示卷积运算。

对于星点目标成像时,星点目标  $o$  可以看作  $\delta$  函数,则像面强度分布即为光学系统的强度点扩散函数,将式(6)带入可得:

$$I(r, \phi; f_i) = |U(r, \phi; f_i)|^2 = \left| 2V_0^0(r, f_i) + 2i \sum_{n,m} i^m \alpha_n^m V_n^m(r, f_i) \cos(m\phi) \right|^2. \quad (8)$$

基于星点图像的像差复原方法期望通过不同像面处的图像强度分布  $I(r, \phi; f_i)$  恢复出光学系统像差的 Zernike 系数  $\alpha_n^m$ 。该问题可以通过建立目标函数后采用最优化方法求解<sup>[12]</sup>。本文采用的目标函数如式(9)所示:

算法,寻找使目标函数达到极值的变量值。本文采用共轭梯度法进行求解,求解过程中需要计算目标函数及其梯度值。推导得到目标函数梯度的解析表达式,如式(10)所示。利用该式可以直接计算目标函数的梯度,避免了有限差分运算。

用 Matlab 软件编程进行数值模拟。假设光学系统的  $F/\#$  为 3.3, 焦距为 50 mm, 工作波长为 550 nm, 像面上的采样间隔为 0.325  $\mu\text{m}$ , 利用衍射公式生成不同像面处的星点图。图 1 为光学系统波像差由 8 项 Zernike 多项式组成时模拟生成的星点图。

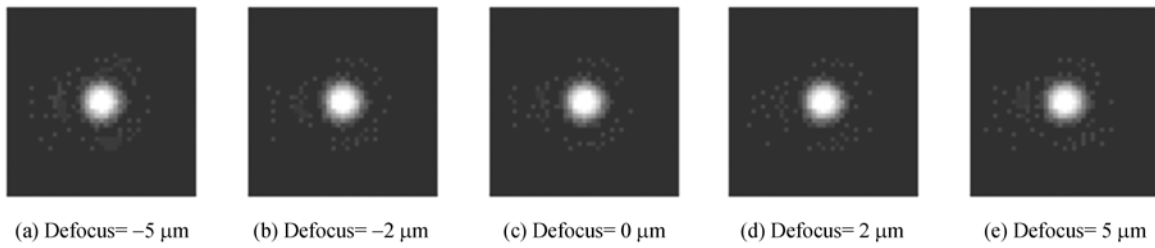


图 1 模拟生成的不同像面处的星点图  
Fig. 1 Simulated spot images on different image planes

4.1 无噪声星点图的像差复原模拟

首先在星点图像不包含噪声的理想情况下,对本文提出的小像差复原算法进行验证,分别利用未离焦的单幅星点图,离焦量为 0 和 ±2 μm 的三幅星点图,以及离焦量为 0、±2 μm 和 ±5 μm 的五幅星点图进行像差复原,复原结果如表 1 所示。

为了描述像差复原结果与真实值的符合程度,引入均方根误差(RMSE)衡量复原结果和真实值的偏差,作为像差复原效果的评价指标。均方根误差的计算公式如式(11)所示,其中  $x_j$  表示真实值中第  $j$  个参数,  $\hat{x}_j$  表示复原结果中的对应参数。

$$RMSE = \sqrt{\sum_j (\hat{x}_j - x_j)^2} \quad (11)$$

表 1 无噪声情况下基于星点图像的像差复原结果

Tab.1 Aberration retrieval results under noise-free condition

$(n, m)$	真实值 (mλ)	单幅图复原 (mλ)	三幅图复原 (mλ)	五幅图复原 (mλ)
(2,2)	32.98	32.98	32.98	32.98
(1,3)	37.88	37.88	37.88	37.88
(0,4)	40.08	40.11	40.08	40.08
(3,3)	50.41	50.41	50.41	50.41
(2,4)	34.11	34.12	34.11	34.11
(1,5)	51.66	51.67	51.66	51.66
(0,6)	33.22	33.25	33.23	33.22
(4,4)	49.63	49.60	49.63	49.63
RMSE	—	0.05	0.01	0.00

由表 1 可知,3 种情况下的复原结果与真实值的一致性很好,这表明在无噪声条件下,本文提出的复原方法能够取得很好的复原结果,且随着

像差复原时所用星点图像幅数的增加,复原结果的 RMSE 值逐渐减小。

4.2 有噪声星点图的像差复原模拟

实际的星点图像获取中,由于探测器以及环境杂光等因素的影响,获得的星点图像不可避免地包含了噪声分量,因此有必要在模拟生成的星点图像中添加噪声分量,以验证本文提出的算法在噪声条件下的像差复原效果。在模拟生成的星点图像中添加期望为 0 的高斯噪声,调整所加高斯噪声的方差,得到具有不同信噪比的星点图像。在信噪比不同的条件下,分别进行单幅图像、三幅图像和五幅图像的像差复原,并利用 RMSE 来评价像差复原效果,其结果如图 2 所示。

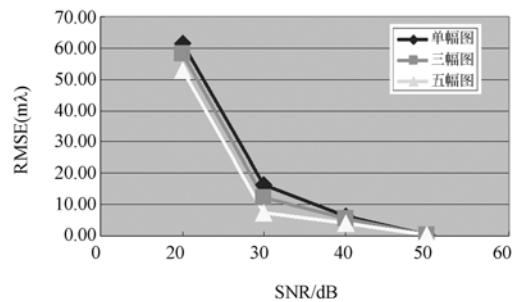


图 2 像差复原结果的 RMSE 随信噪比变化的曲线图

Fig. 2 RMSE of aberration retrieval results vs. signal to noise ratio

由图 2 可知,噪声会影响像差复原的效果,当图像信噪比低于 30 dB 时,像差复原效果会急剧下降,提高星点图像的信噪比有利于提高像差复原效果。在一定信噪比条件下,增加参与像差复原运算的离焦星点图像的数量能够改善像差复原效果。

## 5 分析与讨论

### 5.1 星点目标尺寸的影响

对于无穷小的星点目标,由式(8)计算得到的星点图像强度分布是准确的。然而实际使用的星点目标总是具有一定的几何尺寸,采用式(8)计算会带来一定的误差。为了考察星点目标尺寸对像差复原的影响,利用衍射公式模拟生成不同尺寸星点目标的星点图像后利用本文提出的算法进行像差复原,复原结果如图 3 所示。

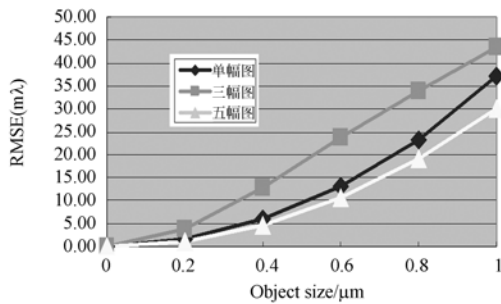


图 3 像差复原结果的 RMSE 随目标尺寸变化的曲线图  
Fig. 3 RMSE of aberration retrieval results vs. object size

由图 3 可知,星点目标尺寸小于  $0.2 \mu\text{m}$  时,像差复原的结果与真实值差异较小,当星点目标尺寸大于  $0.2 \mu\text{m}$  时,像差复原的质量快速下降。同理,在一定星点目标尺寸下,增加参与像差复原运算的离焦星点图像的数量能够改善像差复原的效果。

### 5.2 波像差大小的影响

本文利用小像差条件下的线性近似得到点扩散函数的解析表达式,并用于像差复原。当像差逐渐增大时,舍去高次项而引起的误差越来越大,会影响复原算法的效果。为了考察高次项舍去误差的影响,模拟生成 5 组星点图像,每组包含 10 幅星点图像,对应的波前 PV 值分别为  $0.2\lambda$ ,  $0.4\lambda$ ,  $0.6\lambda$ ,  $0.8\lambda$  和  $1.0\lambda$ 。利用本文提出的复原算法对每组星点图像进行像差复原,并比较不同波前 PV 值下的复原效果,如图 4 所示。由图可知,随着 PV 值的增加,复原结果与真实值的偏差逐渐增大。当 PV 值达到  $\lambda$  时,复原结果的平均归一化均方根误差为 0.16。

### 5.3 与常用像差复原算法的比较

常用的像差复原算法需要在迭代运算中反复

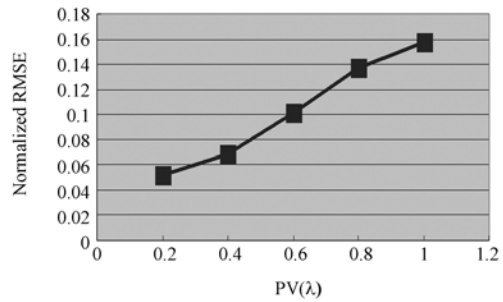


图 4 像差复原结果的归一化均方根误差与波前 PV 值的曲线图

Fig. 4 Normalized RMSE of aberration retrieval results vs. wavefront PV value

进行傅里叶变换以及有限差分运算来计算目标函数及其梯度值,需要耗费大量的时间。分别利用本文提出的算法和常用的像差复原算法对上一节中模拟生成的 5 组星点图像进行复原,迭代次数均为 50 次,对复原结果和运行时间进行比较,结果如图 5 所示。图中折线图表示两种算法像差复原的平均归一化均方根误差,柱状图表示两种算法的平均运行时间。由图中结果可以看出,在小像差的情况下,本文算法复原结果的误差与常用算法相当,而运算速度可以提高 10 倍以上。

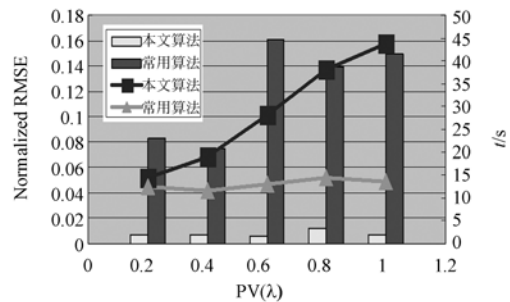


图 5 本文算法与常用算法复原结果误差及运行时间图  
Fig. 5 Comparison of normalized RMSE and computation time between proposed and traditional methods

## 6 结论

基于星点图像的像差复原技术是光学系统波前检验的一种重要方法。本文基于标量衍射公式,建立了以光学系统波像差函数的 Zernike 系数为参量的点扩散函数复振幅分布的解析计算公式,并利用该公式和最优化方法由星点图像复原

光学系统的像差。分别进行了理想情况下和噪声情况下光学系统像差复原的数值模拟,验证了该算法的有效性,并分析了实际星点目标尺寸对复原效果的影响。该算法与常用算法相比具有以下优点:优化变量为像差的 Zernike 系数,优化结果

即为光学系统各像差项的值,无需波面拟合运算;采用点扩散函数解析计算公式推导了目标函数及其梯度的解析表达式,避免了常用像差复原算法所需的傅里叶变换以及有限差分等运算,提高了运算速度。

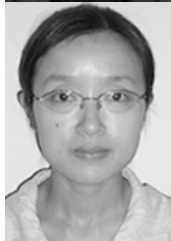
### 参考文献:

- [1] 马冬梅,陈土泉. 点衍射波前位相的测评[J]. 光学精密工程, 2010,18(11):2390-2397.  
MA D M, CH T Q. Test and evaluation of wavefront phase of point diffraction [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2010,18(11):2390-2397. (in Chinese)
- [2] 马冬梅,陈土泉,刘志祥,等. 位相复原技术在光学成像质量测评中的应用[J]. 光学精密工程, 2009, 17(12):2912-2918.  
MA D M, CH T Q, L ZH X, *et al.*. Application of phase retrieval technology in evaluation of optical imaging system [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(12):2912-2918. (in Chinese)
- [3] FIENUP J R, MARRON J C, SCHULZ T J, *et al.*. Hubble space telescope characterized by using phase-retrieval algorithms [J]. *Applied Optics*, 1993,32(10):1747-1767.
- [4] GERCHBERG R W, SAXTON W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, 35 (2):237-246.
- [5] FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15):2758-2769.
- [6] GONSALVES R A. Phase retrieval and diversity in adaptive optics [J]. *Optical Engineering*, 1982,21 (5):829-832.
- [7] BORN M, WOLF E. *Principles of Optics* [M]. Seventh Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [8] 庄松林,钱振邦. 光学传递函数[M]. 北京:机械工业出版社,1981.  
ZHUANG S L, QIAN ZH B. *Optical Transfer Function* [M]. Beijing: China Machine Press, 1981. (in Chinese)
- [9] BRAAT J, DIRKSEN P, JANSSEN J E M. Assessment of an extended Nijboer-Zernike approach for the computation of optical point-spread functions [J]. *JOSA. A*, 2002,19(5):858-870.
- [10] DIRKSEN P, BRAAT J, DE BISSCHOP P, *et al.*. Characterization of a projection lens using the extended Nijboer-Zernike approach [J]. *SPIE*, 2002,4691:1392-1399.
- [11] 苏显渝,李继陶. 信息光学[M]. 北京:科学出版社,1999.  
SU X Y, LI J T. *Information Optics* [M]. Beijing: China Science Press, 1999. (in Chinese)
- [12] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计[M]. 北京:科学出版社,2010.  
MA CH F. *Optimization Methods and Programming with Matlab* [M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese)

### 作者简介:



陈新华(1982—),男,江苏盐城人,助理研究员,博士研究生,2006年于苏州大学获得硕士学位,主要从事光学成像和光学测量技术方面的研究。E-mail: xinhua\_chen@suda.edu.cn



季轶群(1980—),女,江苏宜兴人,助理研究员,博士,2009年于苏州大学获得博士学位,主要从事光学仪器和光学设计方面的研究。E-mail: jiyiqun@163.com

### 导师简介:



沈为民(1963—),男,江苏苏州人,研究员,博士,1998年于苏州大学获得硕士学位,2004年于西安光学精密机械研究所获得博士学位,主要从事光学系统设计方面的研究。E-mail: swm@suda.edu.cn