

文章编号 1004-924X(2013)01-0217-07

# 彩色图像三维六边形离散余弦变换编码

王墨林, 莽思淋, 桑爱军\*, 崔海廷, 陈贺新  
(吉林大学 通信工程学院, 吉林 长春 130022)

**摘要:**为了适应人视网膜细胞的正六边形结构的排列方式并充分利用彩色图像各颜色分量间的相关性,提出了一种基于六边形采样的三维离散余弦变换方法。该方法根据传统的矩形采样和正六边形采样之间的关系来完成两者的转换;然后在已有的六边形离散余弦变换的基础上提出三维六边形采样的离散余弦变换,并验证它的能量集中性。最后,在同一个模型下建立彩色图像的空间位置和颜色分量,并利用提出的方法分别以不同的子图大小对不同的图像进行整体变换。实验结果表明:相对于传统的矩形采样,提出方法的压缩比提高了约 51.1%,峰值信噪比提高了约 16.3%,从而有效地降低了彩色图像各颜色分量间的相关性。得到的结果表明,利用六边形采样技术可以提高采样率,降低编码速率。

**关键词:**三维离散余弦变换;彩色图像编码;六边形采样;矩形采样

**中图分类号:**TP391.4 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20132101.0217

## Three dimensional hexagonal discrete cosine transform for color image coding

WANG Mo-lin, MANG Si-lin, SANG Ai-jun\*, CUI Hai-ting, CHEN He-xin

(College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

\* Corresponding author, E-mail: sangaj@jlu.edu.cn

**Abstract:** A three-dimensional (3D) Discrete Cosine Transform (DCT) method based on hexagonal sampling was proposed to fit the arrangement of hexagonal structure of the human retinal cells and to take advantage of the correlation among each color component of the color images. The method completed the conversion between the traditional rectangular sampling and hexagonal sampling according their relationships. Then, it proposed 3D Hexagonal sampling DCT (3D HDCT) on the basis of existing HDCT and verified its energy concentration. Finally, the spatial positions and color components of the color images in the same model were established, and the different images were transformed with different sub-plot sizes in a whole way by proposed method respectively. Experimental results show that the proposed method increases the compression ratio about 51.1% and the Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) about 16.3% as compared with that traditional rectangular sampling method, respectively. The results decrease the correlation among color components of color images effectively, and demonstrate that hexagonal sampling applied to image coding can improve sampling rates and decrease coding rates.

**Key words:** Three-dimensional Discrete Cosine Transform (3D HDCT); color image coding; hexagonal sampling; rectangular sampling

收稿日期:2012-09-15;修订日期:2012-10-14.

基金项目:国家自然科学基金国际合作项目(No. 60911130128);国家自然科学基金资助项目(No. 61171078)

## 1 引言

彩色图像形象鲜明,生动直观,是表达现实世界的最佳形式。一幅彩色图像由 RGB 三帧组成,其数据量是灰度图像的 3 倍,这就对其图像编码技术提出了更高的要求。通常对彩色图像进行编码时,首先将 RGB 信号转换成 YUV 信号(JPEG 标准中采用),然后再对各分量分别应用灰度图像的编码方法。彩色图像的 RGB 3 个颜色分量来自于同一个物理模型,除了颜色不同之外,它们具有相同的纹理、边缘和灰度变化梯度,相关性极强。虽然将 RGB 转换成 YUV 后,相关性有所减弱,但仍存在大量视觉冗余。换句话说,在压缩过程中,各颜色分量之间的相关性也没有得到充分利用,从而限制了压缩性能的进一步提高。

传统情况下,图像采样是基于矩形网格结构的。Peterson<sup>[1]</sup>认为在二维欧氏平面上,可以把六边形采样作为一种可能的替代采样方案来考虑,从而矩形采样网格并不是最有效的采样方案。Golay<sup>[2]</sup>研究了基于六边形结构的并行计算系统。Mersereau<sup>[3]</sup>总结整理了早期的一些工作,对六边形采样理论进行了公式化描述,推导出六边形离散傅里叶变换(HDFT),同时证明了对于相同的数据而言,使用六边形采样比使用矩形采样所需的采样数少 13.4%。生物医学研究<sup>[4]</sup>表明人视网膜细胞的排列方式为正六边形结构,因此当图像信号的频带在一个圆形区域之内是带限时,六边形采样是最优的采样方式。Mersereau 又在此基础上推导出基于六边形采样数据的二维快速傅里叶变换(HFFT)<sup>[5]</sup>,这都为基于六边形结构的图像的变换编码和滤波器设计奠定了基础。吴海山<sup>[6]</sup>在此基础上提出了一种正六边形离散余弦变换(HDCT)并将其应用于图像编码中,相比于 HDFT,HDCT 有更好的能量集中性。与矩形采样结构相比,六边形采样结构还具有圆对称性、一致连通性、更小的量化误差和更高的分辨率以及在图像处理过程中可以减少存储和计算的时间等优点<sup>[7]</sup>。

为了充分利用彩色图像各颜色分量之间的相关性,发挥六边形采样方式的优点,本文在前期工作的基础上<sup>[8]</sup>提出了基于六边形采样的三维离散余弦变换(3D HDCT),即将彩色图像的 RGB 分

量看作一个整体,建立在同一个模型下进行变换,最后通过实验验证了本文方法的有效性。

## 2 矩形采样到正六边形采样的转换

由于目前所有的图像采集与显示设备都基于矩形网格结构,因此要对图像进行 HDCT 编码需要先将矩形采样图像转换为正六边形采样图像,再将 HDCT 应用于这种正六边形采样图像。

在二维平面上,任何一种坐标系统都可以由 2 个基向量所生成。设  $v_1$  和  $v_2$  为平面的 2 个基向量,则该坐标系统下的任何一点都可以表示成  $n_1 v_1 + n_2 v_2$ ,  $n_1, n_2$  为整数,即任何一点在该坐标系统下的坐标值。不同的  $v_1, v_2$  可以产生不同的网格。由矩形网格结构的采样矩阵可知,矩形采样网格的基向量为  $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$ ;而产生六边形采样网格的方式很多,最常用的一组基向量为  $v_1 = (1, 0), v_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ <sup>[9]</sup>。2 种采样网格只有  $v_2$  不同,即它们的水平采样间隔是相同的,由此生成的六边形采样网格的各个采样位置的集合如图 1 所示<sup>[10-11]</sup>。由图 1 可以看出,每隔一行的各行排列是相同的,相邻两行交错半个采样间隔。由  $T_2 = \sqrt{3} T_1$  为正六边形采样,可知每个采样位置都有 6 个最近的邻近采样。

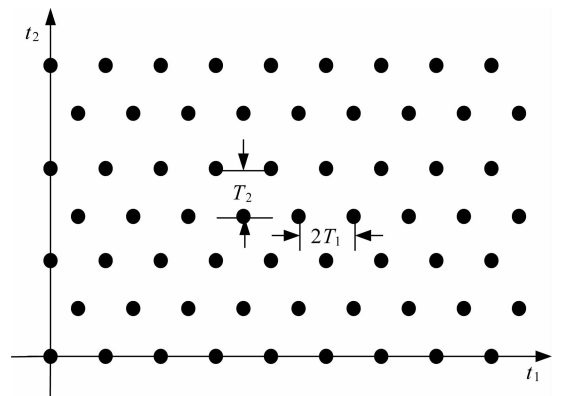


图 1 六边形采样网格

Fig. 1 Hexagonal sampling lattice

按照图 1 所示的网格将矩形采样转换到六边形采样时,奇数行保持不变,偶数行相邻两个像素取算术平均,并作为新的像素值保存,即完成利用采样矩阵  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$  将矩形采样图像内插为

正六边形采样图像,从而将 HDCT 应用于正六边形采样图像。

### 3 三维六边形离散余弦变换

#### 3.1 六边形离散余弦变换(HDCT)<sup>[6]</sup>

设  $x(i, j)$  为支撑区如图 2 所示的正六边形有限区域序列,则 HDCT 的正变换定义为:

$$X(u, v) = c(u, v) \sum_{(i, j) \in R_N} x(i, j) \cos \phi(i, j, u, v). \tag{1}$$

其反变换(IHDCT)为:

$$x(i, j) = \frac{2}{M} \sum_{(u, v) \in R_w} c(u, v) X(u, v) \cos \phi(i, j, u, v), \tag{2}$$

其中: $R_N = \{(i, j) : 0 \leq i < 2N - 1, 0 \leq j < 2N - 1, |i - j| < N\}$ ,  $M = 3N^2 - 3N + 1$  为六边形阵列的采样点数,  $c(u, v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & (u, v) = (0, 0) \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$ ,

$$\phi(i, j, u, v) = \frac{\pi}{3N^2 - 3N + 1} \{ (i - N/2 + 1) + [(4N - 2)u - (N - 1)v] - (j + 0.5) \times [2Nu - (2N - 1)v] \},$$

$R_w = \{(u, v) : -1 < \frac{1}{M} [(4N - 2)u - (N - 1)v] < 1 \cup 0 \leq \frac{1}{M} [\frac{1}{2}(3N - 1)v - u] < 1\}$ ,  $u$  和  $v$  为满足上述不等式的离散点值。

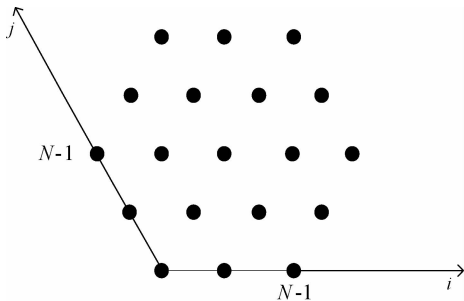


图 2 六边形阵列(边长  $N=3$ )

Fig. 2 Hexagonal array ( $N=3$ )

#### 3.2 三维六边形离散余弦变换的基本定义

3D HDCT 是在 HDCT 的基础上得到的。设函数  $x(i, j, k)$  为支撑区为有限区域的三维实数信号序列,其支撑区  $R$  满足:

$$R = \{(i, j, k) : 0 \leq i < 2N - 1, 0 \leq j < 2N - 1, |i - j| < N, 0 \leq k \leq L - 1\}$$

则 3D HDCT 的基本定义如下:

$$X(u, v, w) = \sqrt{\frac{2}{L}} c(u, v) c(w) \sum_{(i, j) \in R_N} \sum_{k=0}^{L-1} x(i, j, k) \cdot \cos \phi(i, j, u, v) \cos \left[ \frac{\pi(2k + 1)w}{2L} \right], \tag{3}$$

其反变换(3D IHDCT)定义为:

$$x(i, j, k) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2}{M} \sum_{(u, v) \in R_w} \sum_{w=0}^{L-1} c(u, v) c(w) X(u, v, w) \cdot \cos \phi(i, j, u, v) \cos \left[ \frac{\pi(2k + 1)w}{2L} \right], \tag{4}$$

其中: $R_N = \{(i, j) : 0 \leq i < 2N - 1, 0 \leq j < 2N - 1, |i - j| < N\}$ ,  $M = 3N^2 - 3N + 1$  为六边形阵列的采样点数,  $c(u, v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & (u, v) = (0, 0) \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$ ,

$$c(w) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & w = 0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi(i, j, u, v) = \frac{\pi}{3N^2 - 3N + 1} \{ (i - N/2 + 1) \times [(4N - 2)u - (N - 1)v] - (j + 0.5) \times [2Nu - (2N - 1)v] \},$$

$R_w = \{(u, v) : -1 < \frac{1}{M} [(4N - 2)u - (N - 1)v] < 1 \cup 0 \leq \frac{1}{M} [\frac{1}{2}(3N - 1)v - u] < 1\}$ ,  $u$  和  $v$  为满足上述不等式的离散点值。

将式(3)变形,可得:

$$X(u, v, w) = \sqrt{\frac{2}{L}} c(w) \sum_{k=0}^{L-1} \left[ c(u, v) \sum_{(i, j) \in R_N} x(i, j, k) \cdot \cos \phi(i, j, u, v) \right] \cos \left[ \frac{\pi(2k + 1)w}{2L} \right], \tag{5}$$

由式(5)可以看出,第三维与前两维是可分离的,因此可把彩色图像的颜色分量看作一维数据,将 RGB 三帧作为一个整体进行变换。

#### 3.3 3D HDCT 的能量集中性

DCT 可以将图像大部分的能量集中在少数几个变换系数上,从而达到图像数据压缩<sup>[12]</sup>的目的。以下验证了 3D HDCT 的能量集中性。

对于支撑区满足  $R$  的三维实数信号序列  $x(i, j, k)$ , 设  $N=L=3$ ,  $x(i, j, k)$  中所有实数设为 100, 将  $x(i, j, k)$  代入式(3)可得:

$$X(u, v, w) = \begin{cases} 2 \ 327, & u = v = w = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

可以看到,3D HDCT 具有理想的能量集中效果,这就为彩色图像的 3D HDCT 编码奠定了基础。

### 3.4 基于六边形采样的彩色图像三维表示及分割

用三维函数  $f(i, j, k)$  来表示一幅彩色图像,其中:  $i, j$  表示像素的空间位置,  $k$  表示颜色分量。在经过矩形采样到正六边形采样的转换之后,得到基于六边形采样的彩色图像,像素的空间位置发生变化,颜色信息不变,此时的彩色图像可以看作作为一个六棱柱体。经过六边形重采样<sup>[13]</sup>后,即可对彩色图像的这种三维表示方法应用 3D HDCT,将像素的空间位置和颜色分量建立在同一个模型下,充分利用它们之间的相关性,从而实现进一步的能量压缩。

在彩色图像变换压缩之前,要对图像进行分割处理。在进行六边形重采样后,彩色图像的三维子图分割如图 3 所示,将重采样后的彩色图像看作一个大的六棱柱,然后根据变换需要将其分割成一个个小的六棱柱。

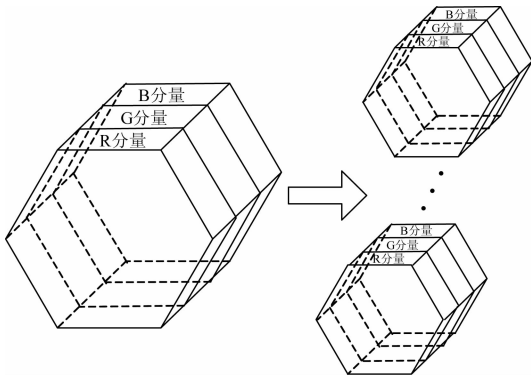


图 3 基于六边形采样的彩色图像的三维子图分割

Fig. 3 3D sub-image segmentation for color image based on hexagonal lattice

## 4 实验仿真结果

本文从测试图像库中选取  $256 \times 256 \times 24$  bit 的彩色图像作为实验对象进行仿真。首先对原始图像进行从矩形采样到正六边形采样的转换,接着将转换后的图像进行三维六边形子图分割,然后对每个子图分别进行 3D HDCT 变换得到相应

的变换系数,最后对变换系数进行矢量量化,并采用无损压缩技术对其进行一定的压缩编码。其编解码流程如图 4 所示。

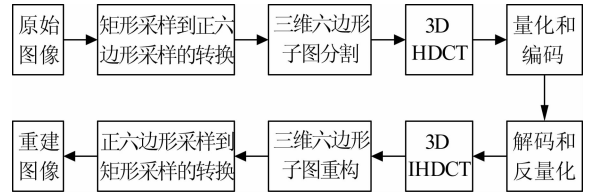


图 4 基于 3D HDCT 的彩色图像编解码框图

Fig. 4 Block diagram of color image coding and decoding based on 3D HDCT

在实验结果中,本文主要采用压缩比(CR)和峰值信噪比(PSNR)2 个参数作为压缩评价标准。

压缩比的计算公式为:

$$CR = 256 \times 256 \times 24 / b_{p0}, \quad (6)$$

其中:  $b_{p0}$  为压缩编码后文件的总比特数。

峰值信噪比的计算公式为:

$$PSNR = 10 \lg \frac{255 \times 255}{MSE} \text{ (dB)}, \quad (7)$$

其中: MSE 为重建图像的均方误差。一幅彩色图像由 RGB 三帧组成,所以重建图像相应的峰值信噪比分别为:  $PSNR_R$ 、 $PSNR_G$ 、 $PSNR_B$ ,则平均峰值信噪比即为重建图像的峰值信噪比的计算公式为:

$$\overline{PSNR} = \frac{PSNR_R + PSNR_G + PSNR_B}{3}. \quad (8)$$

本文将 3D HDCT 分别应用于彩色图像 Lena 和 Pepper,三维六边形子图边长分别取为  $N=2$ 、 $N=3$  和  $N=4$ 。表 1 和表 2 分别给出了 Lena 和 Pepper 相应的压缩比和峰值信噪比。

从表 1 和表 2 可以看出,利用 3D HDCT 对彩色图像进行编码,在取得较高压缩比的同时也得到了较好的重建图像质量,说明 3D HDCT 确实可以降低彩色图像各颜色分量间的相关性,提高编码效率。随着三维六边形子图边长的增大,压缩比和峰值信噪比均有相应的提高,压缩比提高的幅度尤为明显。

利用类似的方法对传统的矩形采样图像进行相同的实验。在图像分块时,将颜色模式转换及亚采样后的图像分成  $4 \times 4$  的数据块,对每个数据块进行传统意义的 DCT 变换,然后对变换系数进行矢量量化和熵编码。表 3 和表 4 分别给出了

利用传统 DCT 和 3D HDCT 对 Lena 和 Pepper 图像压缩结果的对比情况。这里给出的是六边形子图  $N=3$  时的对比结果,由  $M=3N^2-3N+1$  可知,当  $N=3$  时,每个六边形子图包含 19 个像素,而每个  $4 \times 4$  的四边形块包含 16 个像素,二者包含的像素个数相近,具有可比性。

表 1 Lena 图像的 3D HDCT 实验结果

Tab.1 Experimental results of Lena based on 3D HDCT

Lena	CR	PSNR			
		PSNR <sub>R</sub>	PSNR <sub>G</sub>	PSNR <sub>B</sub>	PSNR
N=2	32.8	32.21	30.37	30.02	30.87
	26.2	33.16	31.14	30.56	31.62
	20.8	34.37	32.19	31.47	32.68
N=3	54.8	32.40	30.27	30.33	30.90
	44.2	33.99	31.61	31.12	32.24
	37.7	35.89	33.38	32.63	35.13
N=4	81.9	34.29	32.05	31.67	32.67
	71.7	36.08	33.52	32.91	34.17
	68.0	37.07	34.30	33.59	34.98

表 2 Pepper 图像的 3D HDCT 实验结果

Tab.2 Experimental results of Pepper based on 3D HDCT

Pepper	CR	PSNR			
		PSNR <sub>R</sub>	PSNR <sub>G</sub>	PSNR <sub>B</sub>	PSNR
N=2	34.3	31.32	31.23	30.91	31.15
	30.0	32.25	32.26	32.08	32.20
	21.5	33.82	33.88	33.61	33.77
N=3	55.5	31.77	31.62	31.53	31.64
	43.3	33.41	33.34	33.37	33.34
	37.0	35.47	35.50	35.42	35.46
N=4	76.1	33.70	33.59	33.38	33.56
	72.2	35.72	35.75	35.43	35.63
	68.1	37.07	37.11	36.80	36.99

表 3 两种方法对 Lena 图像压缩结果的数据对比

Tab.3 Comparison of two methods for Lena

四边形 DCT		3D HDCT	
CR	PSNR	CR	PSNR
34.3	27.17	54.8	30.90
29.4	28.49	44.2	32.24
24.4	30.10	37.7	35.13

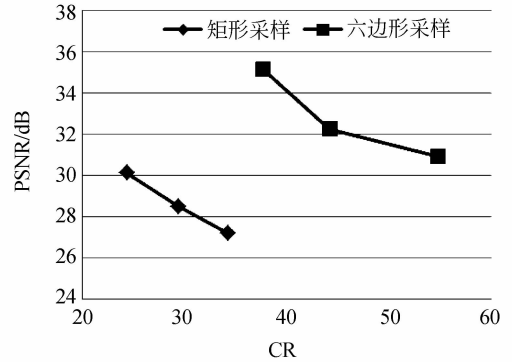


图 5 两种方法对 Lena 图像压缩结果的数据对比

Fig.5 Comparison of two methods for Lena

表 4 两种方法对 Pepper 图像压缩结果的数据对比

Tab.4 Comparison of two methods for Pepper

四边形 DCT		3D HDCT	
CR	PSNR	CR	PSNR
33.9	27.06	55.5	31.64
29.5	28.51	43.3	33.34
26.7	29.43	37.0	35.46

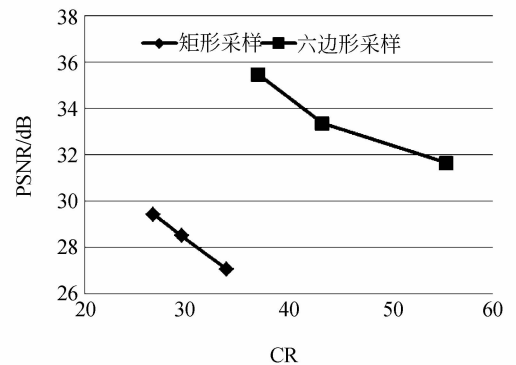


图 6 两种方法对 Pepper 图像压缩结果的数据对比

Fig.6 Comparison of two methods for Pepper

通过表 3 和表 4 可以明显地看出在每个子块像素个数相近的情况下,3D HDCT 在 CR 和 PSNR 上均优于传统的 DCT,图 5 和图 6 的曲线也更加清楚地表明了本算法的性能。这是在采样方式不同,其他处理方法相同的情况下获得的实验数据,说明彩色图像的三维六边形采样比传统的四边形采样具有更好的压缩性能。

实验中的重建图像与原始图像几乎看不出差别,取得了较好的主观重建图像质量。本实验在变换前后,图像需要在矩形采样网格和六边形采样网格之间进行转换,转换的过程即为插值的过程,所以会对图像质量产生一定的影响。可以预见,如果出现六边形显示设备,利用六边形采样可以大幅度地提高图像的峰值信噪比。实验结果中重建图像的尺寸比原始图像的尺寸略小,这是由于文中进行的是六边形变换,在对图像进行分割时,对于图像边缘上不能构成完整正六边形子图的点忽略不计,在计算压缩比时,这些点同样不计算在内。

## 参考文献:

- [1] PETERSON D P, MIDDLETON D. Sampling and reconstruction of wave-number-limited function in N-dimensional Euclidean spaces [J]. *Information and Control*, 1962, 5: 279-323.
- [2] GOLAY M J E. Hexagonal parallel pattern transforms [J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1969, 18(8): 733-740.
- [3] MERSEREAU R M. The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1979, 67(6): 930-949.
- [4] WATSON A B, AHUMADA A J. A hexagonal orthogonal-oriented pyramid as a model of image representation in visual cortex [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1989, 36(1):97-106.
- [5] MERSEREAU R M. A Two-dimensional FFT for Hexagonally Sampled Data [M]. Academic Press, 1980: 93-101.
- [6] 吴海山,顾晓红. 正六边形离散余弦变换图像编码 [J]. 上海交通大学学报,1993,27(1):80-87.  
WU H SH, GU X H. Hexagonal discrete cosine transform for image coding [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1993,27(1):80-87.

## 5 结 论

为进一步提高彩色图像的采样率,本文提出了 3D HDCT 算法,将彩色图像的空间位置和颜色分量建立在同一个模型下,对不同的图像分别以不同的子图大小进行整体变换,以降低彩色图像各颜色分量之间的相关性。实验结果表明,本文方法充分发挥了六边形采样方式的优点。从对比数据分析可知,在相同信噪比的情况下,压缩比提高约 51.1%;在相同压缩比的情况下,峰值信噪比提高了约 16.3%,即在得到较高压缩比的同时保证了重建图像的质量,验证了该算法的有效性,同时说明将六边形采样技术应用于图像编码领域可以提高采样率,降低编码速率。本文方法在量化阶段采用了矢量量化,对码书具有一定的依赖性,因此针对三维六边形离散余弦变换后系数分布的特点,构造相应的量化表和扫描方式将是下一步研究的重点。

- [7] NICHOLAS I, RUMMELT, JOSEPH N, *et al.*. Array set addressing: enabling technology for the efficient processing of hexagonally sampled imagery [J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2011, 20(2): 023012. 1-11.
- [8] MANG S L, FU P, SANG A J, *et al.*. Color image coding based on hexagonal discrete cosine transform [C]. 2010 *International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering (CiSE)*, 2010:1-4.
- [9] VIRGIL B. The petersen-middleton theorem and sampling of seismic data [J]. *Geophysical Prospecting*, 2009, 57(5):823-834.
- [10] ARGYRIOU V. Sub-hexagonal phase correlation for motion estimation [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011,20(1):110-120.
- [11] YE W X, ALIREZA E. A geometric construction of multivariate sinc functions [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(6): 2969-2979.
- [12] 汤毅,辛勤,李纲,等. 基于内容的高光谱图像无损压缩 [J]. 光学 精密工程, 2012, 20(3): 668-674.  
TANG Y, XIN Q, LI G, *et al.*. Hyperspectral imagery lossless compression based on content [J].

*Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(3):668-674. (in Chinese)

[13] ORTIZ S H C, TSUICHENG C, FOX M D.

Hexagonal adaptive filtering on compound ultrasound images [J]. *Engineering in Medicine and Biology Society*, 2011: 4856-4859.

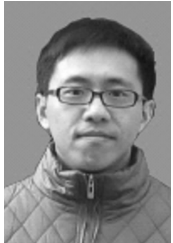
#### 作者简介:



**王墨林**(1960—),男,吉林长春人,硕士,副教授,1991年于吉林工业大学获得硕士学位,主要从事信号检测与处理方面的研究。E-mail: wangmolin@sohu.cn



**崔海廷**(1987—),女,吉林长春人,硕士研究生,2010年于长春理工大学获得学士学位,主要从事多视角视频编解码方面的研究。E-mail: cui\_hai\_ting@126.com



**莽思淋**(1984—),男,吉林省吉林市人,硕士研究生,2008年于吉林大学获得学士学位,主要从事彩色图像与视频编解码方面的研究。E-mail: mangsl08@mails.jlu.edu.cn



**陈贺新**(1949—),男,吉林大安人,博士,教授,博士生导师,1990年于吉林大学获得博士学位,主要从事多维信号处理、图像与视频编解码,视频通信,多媒体数据库技术方面的研究。E-mail: chenhx@jlu.edu.cn



**桑爱军**(1973—),女,山东莱州人,博士,教授,2002年于吉林大学获得博士学位,主要从事多维信号处理、多维视频流编解码方面的研究。E-mail: sangaj@jlu.edu.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)