

文章编号 1004-924X(2013)11-2860-10

# 望远镜副镜的三自由度并联支撑构型研究与运动分析

王 永<sup>1\*</sup>, 姚太克<sup>1</sup>, 周 烽<sup>1</sup>, 张丽敏<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027;

2. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

**摘要:**针对望远镜副镜姿态和焦距自动调整的需求,设计了副镜三自由度并联支撑机构构型,分析了它们的运动学特性并讨论了构型的选取。首先,基于约束螺旋理论,设计了对称三支链两转一移并联机构的构型;根据副镜支撑运动副尽可能少、低惯性、直线驱动等要求,选取了 12 种可行构型。然后,针对 12 种可行构型,根据驱动输入特点和支链约束特性,提出分类建模思想,并建立了统一运动学模型;引入 ZXZ 欧拉角法描述机构姿态,简化了姿态空间和伴随运动的表达和分析方式。最后,以 1.2 m 口径望远镜系统为例,仿真研究了副镜并联支撑机构的伴随运动。结果表明,支链约束力线矢平行静平台的 7 种构型具有更小的伴随运动,不大于 0.27 mm。该项研究为后续的精度和刚度特性研究提供了基础。

**关键词:**望远镜;副镜;三自由度并联支撑;构型设计;运动学建模;伴随运动

**中图分类号:**TH743 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20132111.2860

## Type synthesis of 3-DOF parallel support system for telescope secondary mirror

WANG Yong<sup>1\*</sup>, YAO Tai-ke<sup>1</sup>, ZHOU Feng<sup>1</sup>, ZHANG Li-min<sup>2</sup>

(1. *Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China;*

2. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)*

*\* Corresponding author, E-mail: yongwang@ustc.edu.cn*

**Abstract:** To realize tip/tilt and focus adjustment for a telescope secondary mirror, several types of parallel support systems were designed and their dynamic characteristics and construct selection were analyzed. First, the screw theory was used to realize the type synthesis for 2R1T (two-rotation and one-translation degrees of freedom) parallel mechanisms with 3 symmetrical branches. 12 types of feasible mechanisms with the fewest joint in each branch, the smallest inertia and linear actuators were selected for the support systems. Then, the selected mechanisms were classified according to the actuating characteristics and constraint properties and the kinematics models were established respectively, including actuation models and constraint models. Moreover, ZXZ Euler angles were introduced to describe the orientation of moving platform and to simplify the description and analysis of orientation and parasitic motion for 2R1T parallel mechanisms. Finally, a 1.2 m telescope was taken as an il-

收稿日期:2013-05-12;修订日期:2013-06-17.

基金项目:中国科技大学-长春光学精密机械与物理研究所超精密控制与系统联合实验室资助项目

lustrative example to calculate the parasitic motion induced by the constraints. The results indicate that 7 types of mechanisms with constraint force parallel to the static platform have smaller parasitic motions no more than 0.27 mm. The kinematic model and design results provide theory basis for the following analysis on accuracy and stiffness.

**Key words:** telescoping; secondary mirror; 3-DOF parallel support; type synthesis; kinematic modeling; parasitic motion

### 1 引 言

望远镜在观测跟踪空间目标时,需要根据任务的需要和环境的变化,实时自动调整副镜的姿态和焦距,以保证跟踪指向精度和光学成像质量。因此,设计具有绕副镜镜面的 2 个转动和沿光轴轴线的 1 个移动(两转一移)自由度特性的副镜支撑,是望远镜系统设计的一个重要课题<sup>[1]</sup>。

并联机构因其刚度大、精度高、运行平稳等优点,在大口径光学望远镜副镜支撑中得到一定的应用<sup>[2-4]</sup>。目前望远镜副镜并联支撑多采用六自由度并联机构,在增加承载力和刚度的同时,牺牲了制造和加工成本,并且 6 个支链易发生干涉,耦合程度高,增加了系统的复杂性和控制难度。加拿大学者 Carretero<sup>[5-6]</sup>提出 3-PRS 型三自由度并联机构用于望远镜副镜支撑,并研究了其运动特性和优化设计。

望远镜副镜三自由度并联支撑属于两转一移三自由度并联机构的范畴,目前还未有学者结合副镜支撑的运动需求和工作要求,设计和选取副镜并联支撑机构构型。对两转一移三自由度并联机构的运动分析,主要针对具体构型,如 3-PRS<sup>[5-7]</sup>、3-RPS<sup>[8-9]</sup>、3-UPU<sup>[10]</sup>、3-UCR<sup>[11]</sup>等,没有系统地归类建立统一模型。机构姿态的描述方法多采用 ZXY<sup>[6-7]</sup>、XYZ<sup>[9]</sup> 欧拉角法,不能很好地解释参数间的耦合关系,且伴随运动分析较为复杂,增加了分析设计难度。刘辛军等<sup>[12]</sup>提出用方位角和摆角法来描述[PP]S 类三自由度并联机构的姿态,描述参数减少到 5 个,不涉及绕动平台法线的转动伴随运动,但不是由一般方法推广得到,需要证明完备性。

本文针对望远镜副镜位姿调整的需求,运用约束螺旋法设计两转一移三自由度并联机构构型,选取副镜并联支撑的可行方案,系统地研究可

行构型的驱动模型和约束模型。根据约束特性,引入 ZXZ 欧拉角法描述动平台姿态,分析伴随运动,并以 1.2 m 口径望远镜为例进行仿真研究。

### 2 望远镜副镜并联支撑构型设计

望远镜副镜并联支撑运动需求可分解为:

- (1)调整姿态:并联支撑机构具有空间两自由度转动,实现光轴以空间任意方向射向接收器;
- (2)调节焦距:并联支撑机构具有沿光轴轴线(即动平台法线)方向的移动自由度。

因此本文将首先设计具有 2 个转动 1 个移动自由度的三自由度并联机构,然后讨论选型问题。

#### 2.1 约束螺旋法构型设计基本原理

并联机构的构型设计理论和方法,目前主要有枚举法、构型演化法、基于位移子群理论的运动设计法、以及基于螺旋理论的约束螺旋法等<sup>[13]</sup>。约束螺旋法具有几何概念清楚、物理意义明确、表达形式简单等优点,因此,本文采用约束螺旋法设

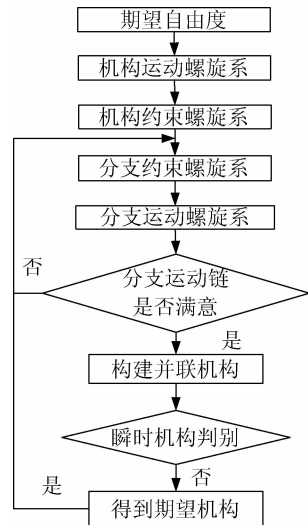


图 1 约束螺旋构型设计原理图

Fig. 1 Block diagram of type synthesis based on screw theory

计两转一移三自由度并联机构构型,如图 1 所示<sup>[13-14]</sup>。

## 2.2 两转一移三自由度并联机构构型设计

本文主要研究典型的结构对称、各向同性的两转一移三自由度并联机构构型设计。不失一般性,设系统参考坐标系  $O-XYZ$  的  $XY$  平面平行于并联机构的静平台,分支坐标系  $O_l-x_l y_l z_l$  的  $x_l y_l$  平面平行静平台。

参考坐标系下,两转一移三自由度并联机构,其机构运动螺旋系的标准基为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{p1} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{p2} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{p3} = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

对式(1)求反螺旋,可得并联机构的机构约束螺旋线标准基为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{r_{p1}}^r = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{r_{p2}}^r = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{r_{p3}}^r = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\mathcal{S}_{r_{p1}}^r$ 表示 1 个过参考坐标系原点沿  $X$  轴方向的约束力线矢, $\mathcal{S}_{r_{p2}}^r$ 表示 1 个过原点沿  $Y$  轴的约束力线矢, $\mathcal{S}_{r_{p3}}^r$ 表示一个绕  $Z$  轴的约束力偶。

因此,对于两转一移三自由度并联机构,其机构约束螺旋系为 1 个约束力偶和 2 个约束力线矢,要构成这样的机构约束螺旋系,分支约束螺旋系有 3 种情况<sup>[13]</sup>:分支自由度数为 3,含 1 个约束力偶和 2 个约束力线矢;分支自由度数为 4,含 1 个约束力偶和 1 个约束力线矢;分支自由度数为 5,只含 1 个约束力线矢。分支自由度数为 3 和 4 均为瞬时机构,下面讨论分支自由度数为 5 的情况:

分支运动链自由度为 5 时,对动平台施加 1 个约束力线矢。令分支约束旋量系只含 1 个平行于  $x_l$  方向且过分支坐标系原点的力线矢

$$\mathcal{S}_{l1}^r = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \quad (3)$$

对上式求反旋量可得分支运动旋量系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{l1} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{l2} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{l3} = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{l4} = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \\ \mathcal{S}_{l5} = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (4)$$

分支中任意运动副旋量都可以由式(4)中的 5 个标准基线性组合生成。线性组合过程,必须保持所有运动旋量的线性无关性。

两转一移三自由度并联机构必须满足 3 个分支约束力线矢共面不平行,且不汇交于一点。由分支运动旋量系生成的分支对动平台施加一个平行  $\mathcal{S}_{l1}$  且过分支中心点的约束力线矢,只需各分支以  $\mathcal{S}_{l1}$  为轴线的转动副互不平行且分支中心点不重合即可。

接下来讨论运动副的生成,运动副的形式为:

$$\mathcal{S} = (a, b, c; 0, e, f) = \begin{cases} (s^r; r \times s^r) \text{ 转动副} \\ (0; s^r) \text{ 移动副} \end{cases} \quad (5)$$

为避免出现螺旋副,分支中的移动副只能由  $\mathcal{S}_{l4}$  和  $\mathcal{S}_{l5}$  线性组合得到,具有  $\mathcal{S}_{lP} = (0, 0, 0; 0, e, f)$  形式,其方向矢量平行  $YOZ$  平面, $x_l$  方向无分量。

转动副可以通过  $\mathcal{S}_{l1}$ 、 $\mathcal{S}_{l2}$  和  $\mathcal{S}_{l3}$  线性组合得到,具有  $\mathcal{S}_{lR} = (a, b, c; 0, 0, 0)$  形式,通过分支中心点,轴线在空间任意方向。同时, $\mathcal{S}_{l1}$  可以通过与移动副  $\mathcal{S}_{l4}$ 、 $\mathcal{S}_{l5}$  的线性组合转换为过空间任意点、平行于  $y_l$  方向的转动副,即  $\mathcal{S}'_{l1} = (1, 0, 0; 0, e, f)$ 。 $\mathcal{S}_{l2}$  可以通过与  $\mathcal{S}_{l5}$  的线性组合转换为过  $x_l$  上任意点、平行于  $y_l$  方向的转动副,即  $\mathcal{S}'_{l2} = (0, 1, 0; 0, 0, f)$ 。 $\mathcal{S}_{l3}$  可以通过与  $\mathcal{S}_{l4}$  的线性组合转换为过  $x_l$  上任意点、平行于  $z_l$  方向的转动副,即  $\mathcal{S}'_{l3} = (0, 0, 1; 0, e, 0)$ 。

由 2 个轴线互相垂直的转动副可以组成 1 个万向铰(U),由 3 个轴线互相垂直的转动副可以组成 1 个球铰(S),由轴线平行的 1 个移动副和 1 个转动副可以组成 1 个圆柱副(C)。

常用的运动副有:单自由度副 R 和 P,2 自由度副 U 和 C;3 自由度副 S。每个分支有 5 个自由度,实现方式有:a. 5 个单自由度副;b. 3 个单自由度+1 个 2 自由度副;c. 2 个单自由度+1 个 3 自由度副;d. 1 个单自由度+2 个 2 自由度副。

其中 c、d 组合方式各支链运动副最少,表 1 列举了这两类并联机构,从左到右分别表示与静平台相连的关节、中间关节和与动平台相连的关节。

表 1 对称三支链 2R1T 并联机构列举

Tab. 1 Enumeration of 2R1T parallel mechanisms with 3 symmetrical branches

c	3-PPS, 3-SPP, 3-RPS, 3-SPR, 3-PRS, 3-SRP, 3-PSR, 3-RSP, 3-RRS, 3-SRR, 3-RSR
d	3-PUU, 3-UPU, 3-UUP, 3-RUU, 3-UUR, 3- URU, 3-UCR, 3-RCU, 3-CRU, 3-URC, 3- CUR, 3-RUC

### 2.3 三自由度望远镜副镜并联支撑选型

两转一移三自由度并联机构有很多种构型,需要根据并联机构的特点和望远镜副镜支撑的需求对支链进行筛选,去除不可行的构型,减少后续产品设计和研究所需要分析的构型。

望远镜副镜并联支撑机构构型选取时,在考虑基本运动需求外,还需考虑机构整体刚度、稳定性以及加工、装配工艺性等各方面性能:

- (1) 结构简单紧凑,易加工实现;
- (2) 分支不含闭环,结构对称,满足各向同性;
- (3) 各支链运动副数量尽可能少;
- (4) 运动特性相对简单,控制难度小。

为保证并联机构低惯性、高刚度的优点,驱动装置要安装在静平台上或靠近静平台的地方,一般采用固定在静平台上的移动或转动关节,或邻近静平台的中间移动关节。相对来说,转动关节驱动支链会占用更大空间,影响望远镜光束传递,因此本文只考虑移动副或圆柱副作为驱动关节的情况。

表 1 列举的各并联机构,3-PPS、3-SPP、3-RPS、3-SPR、3-PRS、3-PSR、3-PUU、3-UPU、3-UCR、3-RCU、3-CRU 和 3-CUR 等 12 种可以使用与静平台相连接或邻接的移动副或圆柱副作为驱动关节,是可行的构型,而 3-SRP、3-RSP、3-RRS、3-SRR、3-RSR、3-UUP、3-RUU、3-UUR、3-URU、3-URC 和 3-RUC 等 11 种不能提供所需形式的驱动。接下来,对 12 种可行构型分类建模,分析运动特性。

### 3 望远镜副镜并联支撑运动学建模

并联机构的运动学建模是结构参数设计、动态仿真研究和控制器设计的基础,对于两转一移三自由度副镜并联支撑机构,其运动学模型可以

分为驱动模型和约束模型 2 部分。

#### 3.1 望远镜副镜并联支撑机构驱动模型

对称三支链两转一移并联机构,驱动输入可能改变支链长度,也可能改变联接动、静平台运动副的位置,对应的驱动方程不同。根据驱动关节与动、静平台的连接方式不同,并联支撑分为 3 类:

第一类变支链长度,驱动输入改变支链长度,支链联接动、静平台的运动副相对联接平台位置不变,包括 3-RPS、3-SPR、3-UPU、3-UCR 和 3-RCU 等 5 种构型,其驱动关节在支链中间;

第二类变联接位置,驱动输入改变联接动、静平台运动副的位置,支链的长度不变,包括 3-PRS、3-PSR、3-PUU、3-CRU 和 3-CUR 等 5 种构型,其驱动关节(P 或 U)直接与静平台相连;

第三类同时改变支链长度和联接位置,驱动输入不仅改变支链的长度,同时改变联接动或静平台运动副的位置,如 3-SPP 和 3-PPS 等 2 种构型。

其中第一、第二类驱动的并联机构支链只有 1 个移动副,如图 2 所示;第三类驱动的并联机构支链含 2 个移动副,如图 3 所示。在静平台平面建立定坐标系  $O-XYZ$ ,原点位于平台中心  $O$  处, $X$  轴由  $O$  指向  $A_1$ , $Z$  轴为静平台法线,在动平台平面建立动坐标系  $c-xyz$ ,原点位于平台中心  $c$  处, $x$  轴沿  $ca_1$  方向, $z$  轴为动平台法线。

假设定坐标系下点  $A_1, A_2, A_3$  的绝对坐标为  $A_1, A_2, A_3$ ,动平台中心点  $c$  的绝对坐标为  $\mathbf{c} = (X_c, Y_c, Z_c)^T$ ,动坐标系下点  $a_1, a_2, a_3$  的相对坐标为  $a_1^c, a_2^c, a_3^c$ ,动坐标系对定坐标系的旋转矩阵为  $R$ ,则动坐标系对静坐标系的齐次坐标变换矩阵为:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l & y_l & z_l & X_c \\ x_m & y_m & z_m & Y_c \\ x_n & y_n & z_n & Z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

这样,点  $a_1, a_2, a_3$  对定坐标系的坐标为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{g} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^c \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

$c-xyz$  坐标系下的矢量  $\mathbf{u}_i^c$  在定坐标系  $O-XYZ$  中表示为  $\mathbf{u}_i$ ,满足:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{g} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

各支链运动矢量方程为：

$$l_i = l_i n_i = a_i - A_i. \quad (9)$$

$l_i$  是第  $i$  支链的长度,  $n_i$  表示第  $i$  支链运动的单位方向矢量。

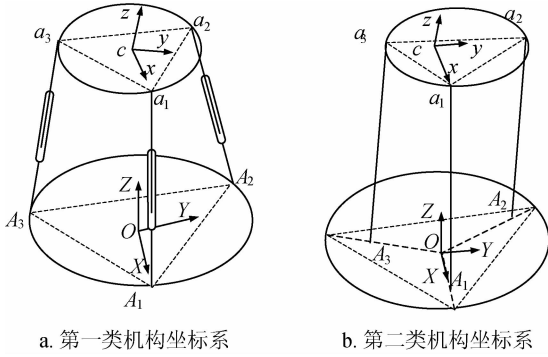


图 2 支链含 1 个移动副的并联机构坐标系示意图  
Fig. 2 Coordinate systems for parallel mechanisms with one prismatic joint in each chain

第一类驱动的并联机构如图 2(a)所示,支链联接动、静平台的运动副相对联接平台位置不变的情况。易得  $A_1, A_2, A_3$  在  $O$ -XYZ 下的绝对坐标为：

$$A_1 = \begin{bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -r_B/2 \\ \sqrt{3}r_B/2 \\ 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -r_B/2 \\ -\sqrt{3}r_B/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$a_1, a_2, a_3$  在  $c$ -xyz 坐标系下的相对坐标为：

$$a_1^c = \begin{bmatrix} r_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2^c = \begin{bmatrix} -r_p/2 \\ \sqrt{3}r_p/2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3^c = \begin{bmatrix} -r_p/2 \\ -\sqrt{3}r_p/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

第三类驱动的并联机构,如图 3 所示,每个支链含有 2 个移动副,支链的长度和联接动或静平台的运动副相对平台中心位置均发生变化。驱动关节只能是支链上的移动副,有 3-PPS 和 3-SPP 两种构型,下面分别讨论。

代入(7)式,得到  $a_1, a_2, a_3$  在  $O$ -XYZ 坐标系下的绝对坐标为：

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} a_{3x} \\ a_{3y} \\ a_{3z} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

联合(9)、(10)和(12)式,可以得到机构的驱动输入和动平台的位姿输出之间的函数关系,即并联机构的驱动方程：

$$l_i n_i = a_i - A_i = R a_i^c + c - A_i. \quad (13)$$

驱动输入  $l_i$  为：

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(a_{1x} - r_B)^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2} \\ l_2 = \sqrt{(a_{2x} + \frac{r_B}{2})^2 + (a_{2y} - \frac{\sqrt{3}r_B}{2})^2 + a_{2z}^2} \\ l_3 = \sqrt{(a_{3x} + \frac{r_B}{2})^2 + (a_{3y} + \frac{\sqrt{3}r_B}{2})^2 + a_{3z}^2} \end{cases} \quad (14)$$

第二类驱动的并联机构,如图 2(b)所示,支链联接静平台的运动副相对静平台中心位置变化。 $A_1, A_2, A_3$  在  $O$ -XYZ 下的绝对坐标为：

$$A_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix} -r_B/2 \\ \sqrt{3}r_B/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \lambda_3 \begin{bmatrix} -r_B/2 \\ -\sqrt{3}r_B/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

并联机构的支链长度保持不变  $l_i = l$ ,其驱动输入  $q_{Ai} = \lambda_i r_B$  为与静平台相连的移动副长度。

支链矢量方程(9)式可写为：

$$l n_i = R a_i^c + c - q_{Ai} n_{Ai}. \quad (16)$$

由式(12)、(15)和(16)得驱动输入  $q_{Ai}$  为：

$$\begin{cases} q_{A1} = a_{1x} \pm \sqrt{l^2 - a_{1y}^2 - a_{1z}^2} \\ q_{A2} = \frac{-a_{2x} + \sqrt{3}a_{2y}}{2} \pm \sqrt{l^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}a_{2x} + \frac{1}{2}a_{2y})^2 - a_{2z}^2} \\ q_{A3} = \frac{-a_{2x} - \sqrt{3}a_{2y}}{2} \pm \sqrt{l^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}a_{3x} - \frac{1}{2}a_{3y})^2 - a_{3z}^2} \end{cases} \quad (17)$$

3-PPS 并联机构如图 3(a)所示,驱动输入保持与静平台垂直,大小为：

$$l_i = |a_{iz}|. \quad (18)$$

由式(12)和(18),可得驱动输入  $l_i$  为

$$\begin{cases} l_1 = Z_c + r_p x_n \\ l_2 = Z_c - \frac{1}{2} r_p x_n + \frac{\sqrt{3}}{2} r_p y_n \\ l_3 = Z_c - \frac{1}{2} r_p x_n - \frac{\sqrt{3}}{2} r_p y_n \end{cases} \quad (19)$$

3-SPP 型并联机构如图 3(b)所示,驱动输入为支链上的移动副,方向保持与动平台垂直,而被动移动副与动平台相连。这里,我们在  $c\text{-}xyz$  动坐标系下建立 3-SPP 型并联机构的驱动模型。

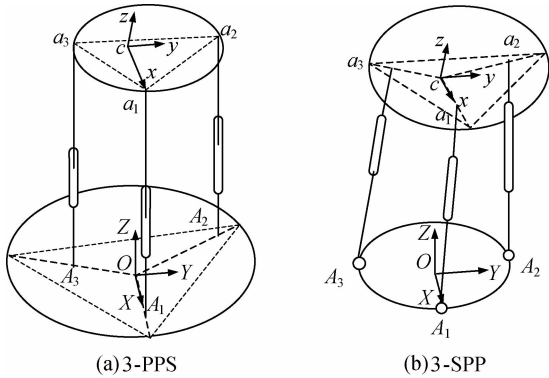


图 3 支链含 2 个移动副的并联机构坐标系示意图  
Fig. 3 Coordinate systems for parallel mechanisms with two prismatic joints in each chain

3-SPP 型并联机构的驱动大小为:

$$l_i = |A_{iz}^c|. \quad (20)$$

静坐标系对动坐标系的齐次坐标变换矩阵为:

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l & x_m & x_n & X'_c \\ y_l & y_m & y_n & Y'_c \\ z_l & z_m & z_n & Z'_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

$A_1, A_2, A_3$  在  $c\text{-}xyz$  下的相对坐标为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^c \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{g}' \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (22)$$

由(20)和(22)式,可得驱动输入  $l_i$  为:

$$\begin{cases} l_1 = z_l X_c + z_m Y_c + z_n Z_c - r_B z_l \\ l_2 = z_l X_c + z_m Y_c + z_n Z_c + \frac{1}{2} r_B z_l - \frac{\sqrt{3}}{2} r_B z_m \\ l_3 = z_l X_c + z_m Y_c + z_n Z_c + \frac{1}{2} r_B z_l + \frac{\sqrt{3}}{2} r_B z_m \end{cases} \quad (23)$$

已知两转一移并联机构动平台的位姿,由式(14)、(17)、(19)和(23)很方便求得机构的驱动输入。

### 3.2 望远镜副镜并联支撑机构约束模型

对称三支链两转一移并联机构,由于受到各支链的运动约束,动平台的运动是不完全的。各支链的运动螺旋必须与相应的支链约束螺旋互为反螺旋,即支链线速度方向(运动方向)与约束线矢力方向垂直,由此可以导出 3 个约束方程。支链  $i$  的运动矢量为  $\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i$ ,约束线矢力方向为  $\mathbf{u}_i$ ,则有

$$\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0. \quad (24)$$

两转一移并联机构的支链约束线矢力可能平行动平台,也可能平行静平台,还可能与动静平台均不平行。因此,根据支链运动约束的不同,两转一移并联支撑机构可分为 3 类:

第一类,支链约束线矢力作用点在联接动平台运动副的中心,方向平行静平台且相对静平台不变,包括 3-PPS、3-RPS、3-PRS、3-RCU 和 3-CRU 等 5 种构型;

第二类,支链约束线矢力作用点在联接静平台运动副的中心,方向平行动平台且相对动平台不变,包括 3-SPP、3-SPR、3-PSR、3-UCR 和 3-CUR 等 5 种构型;

第三类,支链约束线矢力作用点不在支链上,方向平行静平台但相对变化,包括 3-UPU 和 3-PUU 等 2 种构型。

第一类运动约束,支链约束线矢力方向平行静平台且相对静平台不变。约束线矢力方向分别为:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

由  $\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{a}_i = 0$ ,得到约束方程:

$$\begin{cases} x_m = y_l \\ X_c = r_p(x_l - y_m)/2. \\ Y_c = -r_p x_m \end{cases} \quad (26)$$

第二类运动约束,支链约束线矢力方向平行动平台且相对动平台不变。约束线矢力方向单位矢量在  $c\text{-}xyz$  坐标系下分别为:

$$\mathbf{u}_1^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2^c = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3^c = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由  $\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^T (\mathbf{c} - \mathbf{A}_i) = 0$ ,得到约束方程:

$$\begin{cases} x_m = y_l \\ X_c = \frac{-(z_n - y_m^2 + 3x_m^2)r_B + 2z_l Z_c}{2z_n} \\ Y_c = \frac{(3x_l - y_m)y_l r_B + 2z_m Z_c}{2z_n} \end{cases} \quad (28)$$

第三类运动约束,支链约束线矢力方向平行静平台但相对变化。3-UPU 并联机构支链约束力线矢  $\mathbf{u}_i$  平行联接静平台万向铰的内转动副轴线  $\mathbf{R}_{i2}$ 。 $\mathbf{R}_{i2}$  的方向矢量求取较为复杂,考虑到并联机构的几何特点,联接静平台万向铰的内转动副轴线  $\mathbf{R}_{i2}$  和联接动平台万向铰的内转动副轴线  $\mathbf{R}_{i3}$  平行,而  $\mathbf{R}_{i3}$  与联接动平台万向铰的外转动副轴线  $\mathbf{R}_{i4}$  垂直,进而可以得到,支链的运动方向  $\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i$  与  $\mathbf{R}_{i4}$  共面,即:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{R}_{i4} = 0. \quad (29)$$

联接动平台万向铰的外转动副轴线  $\mathbf{R}_{i4}$  方向矢量在  $cxyz$  坐标系下分别为:

$$\mathbf{R}_{41}^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{42}^e = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{43}^e = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

由式(8)、(10)、(12)、(29)和(30),得到 3-UPU 平台的约束方程为:

$$\begin{cases} x_m = y_l \\ X_c = \frac{x_l - 3y_m}{2z_n} x_l r_B + r_B \\ Y_c = \frac{x_l - 3y_m}{2z_n} x_m r_B \end{cases}. \quad (31)$$

由式(26)、(28)和(31),可以看出,两转一移三自由度并联机构对位姿态旋转矩阵具有相同的约束  $x_m = y_l$ 。另两个约束分别表示沿  $X$  轴和  $Y$  轴的伴随运动,对副镜支撑有害,设计中应尽可能小。

### 3.3 望远镜副镜并联支撑机构姿态描述

表示空间刚体姿态的欧拉角有 24 组,不考虑姿态表示的奇异性,不同的欧拉角表示方法相互之间等价,但是对于约束少自由度并联机构,不同的姿态表示得到的结果复杂度不同。

本文采用 ZXZ 欧拉角法表示动平台的姿态:动坐标系  $\{P\}$  初与静坐标系  $\{B\}$  重合,首先将  $\{P\}$  系统  $\{B\}$  系的  $Z$  轴旋转角  $\gamma$ ,然后绕  $\{B\}$  系的  $X$  轴旋转  $\beta$  角,最后绕  $\{B\}$  系的  $Z$  轴旋转  $\alpha$  角。3 次转动绕的都是静坐标系的坐标轴,得到旋转矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} cac\gamma - sac\beta s\gamma & -cas\gamma - sac\beta c\gamma & sas\beta \\ sac\gamma + cac\beta s\gamma & -sas\gamma + cac\beta c\gamma & -cas\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\gamma \end{pmatrix}, \quad (32)$$

其中:  $c^* = \cos(*), s^* = \sin(*),$  下同。

由式(26)、(28)和(31),三自由度并联机构对旋转矩阵有相同的约束  $x_m = y_l$ ,对比式(6)和(32)得

$$\gamma = -\alpha. \quad (33)$$

代入旋转矩阵式(32),得

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c^2\alpha + s^2\alpha c\beta & sac\alpha(1-c\beta) & sas\beta \\ sac\alpha(1-c\beta) & s^2\alpha + c^2\alpha c\beta & -cas\beta \\ -sas\beta & cas\beta & c\beta \end{pmatrix}. \quad (34)$$

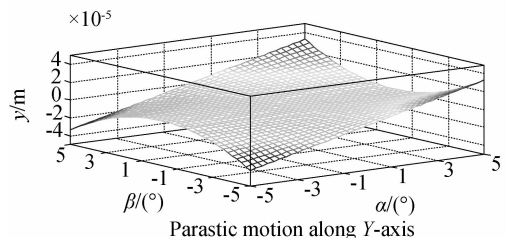
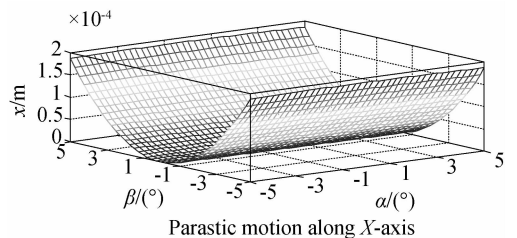
由此可见,采用 ZXZ 欧拉角法,只需要 2 个角度参数就可以表示两转一移并联机构的动平台姿态。也可以看出,该姿态旋转矩阵等效于绕与  $X$  轴成  $\alpha$  角的轴线旋转  $\beta$  角,与刘辛军等<sup>[12]</sup>采用的方位角和摆角法结论一样,但是这里是由更一般的欧拉角推导得出的,物理意义更明确。

### 3.4 望远镜副镜并联支撑机构伴随运动

本节以 1.2 m 口径光学望远镜为对象,研究副镜并联支撑机构的伴随运动。要求运动范围为  $Z \in [0.265, 0.315]$  m,  $\alpha \in [-5^\circ, +5^\circ], \beta \in [-5^\circ, +5^\circ]$ ,定位精度要求为:  $|\Delta Z| \leq 5 \times 10^{-5}$  m,  $|\Delta\alpha| \leq 0.002^\circ, |\Delta\beta| \leq 0.002^\circ$ ,设计的动、静平台半径为  $r_P = 0.1$  m,  $r_B = 0.14$  m。

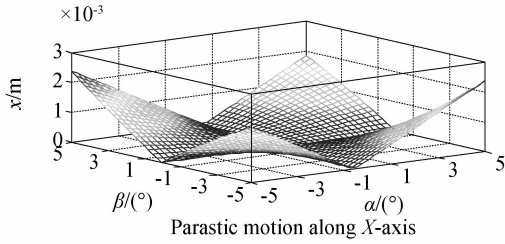
对于第一和第三类约束的并联机构,其伴随运动与  $Z$  无关,对于第二类约束的并联机构, $Z$  值不影响伴随运动变化趋势, $Z$  最大时,伴随运动最大。

$Z = 0.315$  m 时,姿态空间内伴随运动的变化规律如图 4 所示,  $|X_c|, |Y_c|$  最大值如表 2。

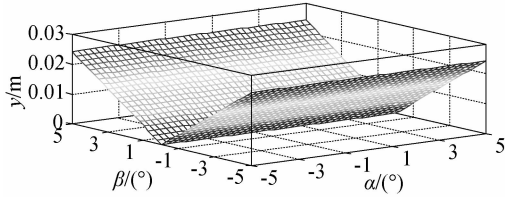


(a)第一类约束条件下的伴随运动

(a)Parasitic motion under the 1<sup>st</sup> kind of constraints



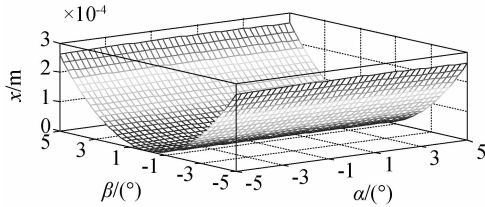
Parastic motion along X-axis



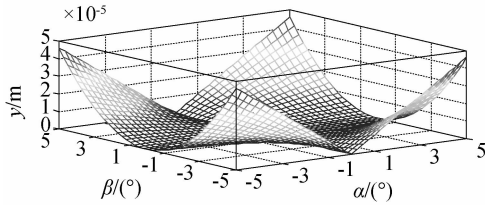
Parastic motion along Y-axis

(b)第二类约束条件下的伴随运动

(b)Parastic motion under the 2<sup>nd</sup> kind of constraints



Parastic motion along X-axis



Parastic motion along Y-axis

(c)第三类约束条件下的伴随运动

(c)Parastic motion under the 3<sup>rd</sup> kind of constraints

图 4 Z=0.315 m 时,沿 X 轴、Y 轴的伴随运动

Fig.4 Parastic motion along X-axis and Y-axis at Z=0.315 m

由图 4 可以看出,对于第一类和第三类约束三自由度并联机构,各支链约束线矢力均平行于静平台,其伴随运动只有动静平台半径有关,与动静平台之间的距离 Z 无关,变化规律类似。 $\alpha$  角的变化对 X 轴方向的伴随运动影响不大,沿 Y 轴方向的伴随运动比 X 轴方向低一个数量级。

对于第二类约束三自由度并联机构, $\alpha$  角的变化对 Y 轴方向的伴随运动影响不大,沿 X 轴方向的伴随运动比 Y 轴方向低一个数量级。

表 2 Z=0.315 m 时,沿 X 轴、Y 轴伴随运动的最大值  
Tab.2 Maximum parasitic motion along X-axis and Y-axis at Z=0.315 m for different constraints

并联机构	最大值
第一类约束	$ X_c _{\max} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ m}$ $ Y_c _{\max} = 3.3 \times 10^{-5} \text{ m}$
第二类约束	$ X_c _{\max} = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}$ $ Y_c _{\max} = 2.7 \times 10^{-2} \text{ m}$
第三类约束	$ X_c _{\max} = 2.7 \times 10^{-4} \text{ m}$ $ Y_c _{\max} = 4.6 \times 10^{-5} \text{ m}$

总的来说,第一类和第三类约束并联机构的伴随运动比第二类低两个数量级。从伴随运动的大小来看,第一类和第三类约束的并联机构更能满足望远镜副镜支撑的精度需要。

## 4 结 论

本文根据望远镜副镜支撑调焦和调姿的需要,采用约束螺旋法设计了具有 2 个转动 1 个移动自由度的对称三支链并联机构,并考虑副镜支撑支链运动副尽量少、低惯性、直线驱动、伴随运动尽可能小等,选取出 3-PPS、3-RPS、3-PRS、3-RCU、3-CRU、3-UPU 和 3-PUU 等 7 种可行构型,进一步考虑精度和刚度特性,选取 3-RCU 实现加工。提出将两转一移并联支撑机构的运动学模型分为驱动模型和约束模型的思想。根据驱动输入可能改变支链长度,也可能改变联接动、静平台运动副的位置,以及可能同时改变支链长度和联接位置 3 种情况分类建立了机构的驱动模型。根据支链约束线矢力的方向可能平行动平台且相对不变,也可能平行静平台且相对不变,还可能平行静平台但相对变化 3 种情况分类建立了机构的约束模型,为优化设计、精度、刚度分析和控制等提供了基础。采用更具普遍性的 ZXZ 欧拉角法描述动平台的姿态,考虑到两转一移三自由度并联支撑机构的姿态约束,得出可以用 2 个角度参数描述动平台姿态,以及允许的姿态旋转矩阵为绕与 X 轴成  $\alpha$  角的轴线旋转  $\beta$  角的结论。

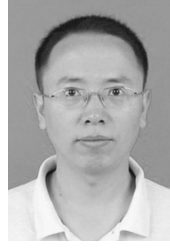
## 参考文献:

- [1] 程景全. 天文望远镜原理和设计[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2003.  
CHENG J Q. *Principle and Design of Astronomical Telescope* [M]. Beijing: China Science & Technology Press, 2003. (in Chinese)
- [2] CASALTA J M, ARINO J, CANCHADO M, *et al.*. The performances of GTC secondary mirror drive unit [J]. *SPIE*, 2004, 5495: 507-517.
- [3] GEIJO E M, CASALTA J M, CANCHADO M, *et al.*. VISTA secondary mirror drive performance and test results [J]. *SPIE*, 2006, 6273: 3801-3810.
- [4] 徐刚, 杨世模, 龚雨兵. 大型光学望远镜副镜位姿精调机构的优化设计[J]. 光学精密工程, 2008, 16(7): 1181-1189.  
XU G, YANG SH M, GONG Y B. Optimal design of pose and position fine tuning apparatus for secondary mirror in large optical telescope [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(7): 1181-1189. (in Chinese)
- [5] CARRETERO J A, NAHON M, GOSELIN C M, *et al.*. Kinematic analysis of a three-DOF parallel mechanism for telescope applications [J]. *Proceedings of the 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, CA*, 1997.
- [6] CARRETERO J A, PODHORODESKI R P, NAHON M A, *et al.*. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator [J]. *ASME J. Mech. Des.*, 2000, 122(1): 17-24.
- [7] LI Q C. Parasitic motion comparison of 3-PRS parallel mechanism with different limb arrangements [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2011, 27(2): 389-396.
- [8] GALLARDO J, OROZCO H, RICO J M. Kinematics of a 3-RPS parallel manipulators by means of screw theory[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2008, 36(5): 598-605.
- [9] 贺新升, 高春甫, 王彬, 等. 太阳自动跟踪机构的设计和位姿分析[J]. 光学精密工程, 2012, 20(5): 1048-1054.  
HE X S, GAO C F, WANG B, *et al.*. Design and positional posture analysis of parallel sun auto-tracking mechanism [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(5): 1048-1054. (in Chinese)
- [10] TSAI L W, JOSHI S A. Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator [J]. *ASME J. Mech. Design*, 2000, 122(4): 439-446.
- [11] 程刚, 葛世荣, 蒋世磊. 3-UCR 并联机构的瞬态运动学研究[J]. 光学精密工程, 2008, 16(1): 108-113.  
CHENG G, GE S R, JIANG S L. Research on transient kinematics characteristics of 3-UCR parallel robot [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(1): 108-113. (in Chinese)
- [12] 刘辛军, 吴超, 汪劲松, 等. [PP]S 类并联机器人机构姿态描述方法[J]. 机械工程学报, 2008, 44(10): 19-23.  
LIU X J, WU C, WANG J S, *et al.*. Attitude description method of [PP]S type parallel robotic mechanisms [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(10): 19-23.
- [13] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.  
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [14] 李仕华. 几种空间少自由度并联机器人机构分析与综合的理论研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2004.  
LI SH H. *Some theoretical issues on analysis and synthesis of lower-mobility parallel mechanisms* [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2004. (in Chinese)

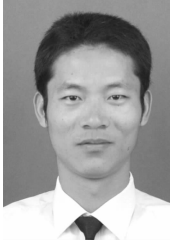
## 作者简介:



王 永(1962—),男,安徽长丰人,博士,教授,博士生导师,1982年于中国科学技术大学获得学士学位,1985年、1999年分别于南京航空航天大学获得硕士学位和博士学位,主要从事飞行器制导与控制、振动主动控制、机器人控制等方面的研究。E-mail: yongwang@ustc.edu.cn



周 烽(1977—),男,湖南邵阳人,讲师,2002年于中国科学技术大学获得硕士学位,现在中国科学技术大学在职攻读博士学位,主要从事运动控制、嵌入式系统等方面的研究。E-mail: zhoufeng@ustc.edu.cn



姚太克(1985—),男,河南信阳人,博士研究生,2008年于中国科学技术大学获得学士学位,主要从事振动主动控制、并联精密平台设计和控制等方面的研究。E-mail: tkyao@mail.ustc.edu.cn



张丽敏(1981—),女,山西朔州人,博士,助理研究员,2008年于中国科学院长春光学精密机械与物理研究所获得博士学位,主要从事精密机械方面的研究。E-mail: zhangtqx@163.com

(版权所有 未经许可 不得转载)