

文章编号 1004-924X(2013)12-3214-09

确保稳定裕度的 PID 稳定域计算

赵秀伟^{1,2,3}, 任建岳^{1*}

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学, 北京 100039; 3. 中国电子科技集团公司第四十五研究所, 北京 100176)

摘要:在 PID 控制器稳定参数域的研究中, 要求控制系统具有一定的稳定裕度, 以便补偿被控对象模型的不确定性和 PID 控制器的参数漂移特性。本文扩展了传统稳定裕度(幅值裕度和相位裕度)的定义, 定义了被控对象在 PID 控制下的 4 种稳定裕度。针对含有右半平面(RHP)极点和不含 RHP 极点的两种被控对象, 讨论了它们必然存在的稳定裕度。对于以这些稳定裕度作为性能指标约束的两类 PID 闭环控制系统, 利用扩展 Hurmite-Biehler 定理给出了其 PID 稳定参数域的详细构建方法, 并通过两个仿真实例对该方法进行了验证。结果表明, 利用本文提出的方法可以得到满足稳定裕度条件的 PID 参数稳定域。

关键词: PID 控制器; PID 稳定域; 幅值裕度; 相位裕度; 扩展 Hurmite-Biehler 定理

中图分类号: TP273; TP13 **文献标识码:** A **doi:** 10. 3788/OPE. 20132112. 3214

Computation of PID stabilizing region with stabilized margins

ZHAO Xiu-wei^{1,2,3}, REN Jian-yue^{1*}

(1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;*

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China;

3. No. 45 Research Institute, China Electronics Technology Group Corporation, Beijing 100176, China)

** Corresponding author, E-mail: renjy@ciomp.ac.cn*

Abstract: On research of the stabilizing region of a PID controller, the control system is required a stabilized margin to compensate the uncertainty of plant modeling and the parameter deviation of PID controller. This paper defines four types of stability margins for the plant under PID controller to extend the conventional definition of stability margins (gain margin and phase margin). Based on the presences of Right Half Plane(RHP) poles or not, the closed-loop systems are classified into two categories and their necessary stabilized margins are stated. A method of constructing PID stabilizing regions by using the generalized Hermite-Biehler theorems is proposed for the PID controlled closed-loop system to meet the prescribed performance of stability margins. Then, two examples are employed to test the validity of the method proposed. Obtained results demonstrate that the PID stabilizing regions with stabilized margins can really be gotten by the proposed method for both cases.

收稿日期: 2013-07-26; 修订日期: 2013-09-25.

基金项目: 国家 863 高技术研究发展计划资助项目 (No. 863-2-5-1-13B)

Key words: PID controller; PID stabilizing region; gain margin; phase margin; generalized Hermite-Biehler theorem

1 引言

比例-积分-微分(PID)控制器作为一种历史悠久、结构简单、鲁棒性强的控制器,至今仍然被广泛应用于工业控制领域的各个方面^[1]。在过去的几十年中,PID 的参数整定一直是个热点问题,大量的基于经验和工业实践的整定方法相继被提出,文献[2]对这些方法进行了汇总。这些方法大多是基于特定结构的时滞对象(例如 FOLPD、SOSPD 和 TOSPD 等)给出的,通用性一般较差。并且,在设计控制器时并不能确定被控对象一定存在稳定的 PID 控制器。

近些年,对于 PID 控制器稳定参数域的研究取得了重要进展。到目前为止,非时滞对象 PID 稳定参数域的构建方法主要有以下几种:(1) 基于边界穿越定理和 D 分割的方法^[3-7],这种方法是根据边界穿越定理建立稳定 D 边界的代数方程,取某一固定的 k_i 或者 k_d ,来获得 (k_p, k_d) 或者 (k_p, k_i) 平面内相应的 D 分割边界,然后通过测试各区域的稳定性来确定 D(0) 稳定区域,其缺点是不能确定参数 k_i 或者 k_d 的有效遍历范围;(2) 基于实数域扩展 Hermite-Biehler 定理^[8]的方法^[9-13]; (3) 基于奇异频率和奇异边界的方法^[14-16]。这两种方法都是先确定 PID 控制器存在的 k_p 可行范围,再确定该范围内的每一个固定 k_p 对应的 (k_i, k_d) 凸多边形区域,这种处理方式也被用于时滞系统的处理^[17-18]; (4) 基于区间分析和集逆算法的方法^[19-21],这种方法首先需要建立使闭环系统稳定,并与控制器参数相关的不等式组,然后,利用区间分析和集逆算法确定预先给定区间上的 3D 稳定区域。可见,方法(1)和方法(4)在预定区间或区域选择不当的情况下,将得不到完整的 PID 稳定区域,甚至会错误地认为不存在使系统稳定的 PID 控制器。

所设计系统不仅要具有稳定性,还要求有一定的鲁棒性以补偿被控对象模型的不确定性,这个要求通常以幅值裕度 G_m 和相位裕度 P_m 的形

式给出。其中,幅值裕度的稳定性等价于一簇实系数多项式的稳定性,可以利用实数域扩展 Hermite-Biehler 定理对其进行处理;相位裕度的稳定性等价于一簇复系数特征多项式的稳定性,可以利用复数域扩展 Hermite-Biehler 定理^[22]对其进行处理^[23]。

本文通过引入可行 k_p 分区间的构建序列不变性,避免了大量的区间可行序列计算和基于无效区间可行序列的参数域构建,从而,使用于 PID 参数域构建的实数域和复数域扩展 Hermite-Biehler 定理的计算效率大幅提高。另一方面,本文基于 Nyquist 图分析了被控对象含有 RHP(右半平面)极点和不含 RHP 极点两种情况下的闭环稳定裕度(P_m 和 G_m)分布,给出了基于区间稳定裕度指标约束的 PID 稳定参数域算法。

2 理论依据

考虑下述 n 阶实系数多项式($p_n \neq 0$):

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_{n-1} s^{n-1} + p_n s^n, \quad (1)$$

如果 $P(s) = 0$ 所有根的实数部分都是负的(也就是说, $P(s)$ 所有零点全部位于开左半复数平面内),则称 $P(s)$ 为 Hurwitz 多项式。

对于任意的 $\omega \in R$,取 $s = j\omega$,则有:

$$P(j\omega) = P_r(\omega) + jP_i(\omega). \quad (2)$$

其中: $P_r(\omega)$ 和 $P_i(\omega)$ 分别为 $P(j\omega)$ 的实部和虚部,则两者都是关于 ω 的实系数多项式。

取 $\omega_{r,1} < \omega_{r,2} < \omega_{r,3} < \dots$ 和 $\omega_{i,0} = 0 < \omega_{i,1} < \omega_{i,2} < \omega_{i,3} < \dots$ 分别为 $P_r(\omega)$ 和 $P_i(\omega)$ 的相异非负实数零点。

定理 1(Hermite-Biehler 定理):对于 n 阶实系数多项式(1), $P(s)$ 是 Hurwitz 多项式的充分必要条件是下列 3 个条件同时成立^[8,22]:

- (1) p_n 和 p_{n-1} 同号,即 $\text{sgn}[p_n] = \text{sgn}[p_{n-1}]$;
- (2) $P_r(\omega)$ 和 $P_i(\omega)$ 只有实数零点,且相异;
- (3) $P_r(\omega)$ 和 $P_i(\omega)$ 的非负实数零点满足交错特性,即:

$$\omega_{i,0} < \omega_{r,1} < \omega_{i,1} < \omega_{r,2} < \omega_{i,2} < \omega_{r,3} < \dots, \quad (3)$$

上述条件(2)和条件(3)等价于下面的条件:

$$n = \begin{cases} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{\operatorname{sgn}[P_r(0)] + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-1} 2\operatorname{sgn}[P_r(\omega_{i,j})] + (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[P_r(\infty)]\}, n = 2m \\ \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{\operatorname{sgn}[P_r(0)] + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-1} 2\operatorname{sgn}[P_r(\omega_{i,j})]\} \\ n = 2m+1 \end{cases} \quad (4)$$

Hermite-Biehler 定理只能用于判断 $P(s)$ 是否为 Hurwitz 多项式,而不能给出 $P(s)$ 的零点分布情况。

定理 2(实数域扩展 Hermite-Biehler 定理): 假设 n 阶实系数多项式 $P(s)$ 含有 k 个原点处的零点, l 个左半平面(Left Half Plane, LHP)零点, r 个右半平面(Right Half Plane, RHP)零点,取 $\sigma(P) = l - r$ 。令 $\omega_{i,0} = 0 < \omega_{i,1} < \omega_{i,2} < \dots < \omega_{i,m-1}$ 为 $P_i(\omega)$ 的所有奇数重相异非负有限实数零点,且 $\omega_{i,m} \rightarrow +\infty$ 。取 $i_0 = \operatorname{sgn}[P_r^{(k)}(0)]$, $i_t = \operatorname{sgn}[P_r(\omega_{i,t})]$, $t \in \{1, 2, m\}$, $j_+ = (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[P_i(\omega_{i,m})]$, 则^[8]有:

$$\sigma(P) = \begin{cases} j_+ \cdot \left\{ i_0 + \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t 2i_t + (-1)^m \cdot i_m \right\}, n \text{ 为偶数} \\ j_+ \cdot \left\{ i_0 + \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t 2i_t \right\}, n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5)$$

如前所述,相位裕度 P_m 约束下的 PID 参数域涉及到复系数多项式簇的稳定性,故而需要引入复数域的 Hermite-Biehler 定理,如下:

定理 3(复数域扩展 Hermite-Biehler 定理): 对于首项为实数的 n 阶复系数多项式 $P(s)$,取 $\sigma(P) = l - r$,其中, l 和 r 分别为 $P(s)$ 在左半平面和右半平面的零点个数。令 $\omega_{i,1} < \omega_{i,2} < \dots < \omega_{i,m-1}$ 为所有 $P_i(\omega)$ 的奇数重相异有限实数零点,定义 $\omega_{i,0} \rightarrow -\infty$ 和 $\omega_{i,m} \rightarrow +\infty$ 。取 $i_t = \operatorname{sgn}[P_r(\omega_{i,t})]$, $t \in \{0, 1, 2, m\}$, $j_+ = (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[P_i(\omega_{i,m})]$ 则^[19]:

$$\sigma(P) = \begin{cases} j_+ \cdot \left\{ \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t i_t \right\}, \deg(P_i) \geq \deg(P_r) \\ \frac{1}{2} j_+ \cdot \left\{ i_0 + \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t 2i_t + (-1)^m i_m \right\}, \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

3 PID 参数稳定域

考虑图 1 所示的典型单位反馈控制系统

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (7)$$

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}, \quad (8)$$

其中: $N(s)$ 和 $D(s)$ 为关于 s 的互质多项式。系统的闭环特征多项式为:

$$\delta(s, \mathbf{K}) = sD(s) + (k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), \quad (9)$$

目的就是确定 $\delta(s)$ 为 Hurwitz 多项式时,

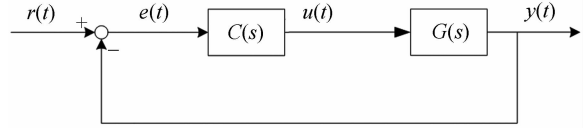


图 1 典型单位反馈系统

Fig. 1 Typical feedback control system

PID 参数增益向量 $\mathbf{K} = \{k_p, k_i, k_d\}$ 所需要满足的条件,并以图形的形式加以显示。分别将 $N(s)$ 和 $D(s)$ 按照奇偶次幂分解:

$$\begin{aligned} N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\ D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2) \end{aligned} \quad (10)$$

取:

$$N^*(s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2), \quad (11)$$

引入扩展特征多项式 $v(s, \mathbf{K})$,

$$v(s, \mathbf{K}) = \delta(s, \mathbf{K}) * N^*(s). \quad (12)$$

如果 $\delta(s, \mathbf{K})$ 为 Hurwitz 多项式,则 $\sigma(\delta) = n$ 。取 $l(N^*)$ 和 $r(N^*)$ 分别为 $N^*(s)$ 的 LHP 和 RHP 零点个数,则:

$$\sigma(v) = \sigma(\delta * N^*) = n + [l(N^*) - r(N^*)], \quad (13)$$

取 $s = j\omega$, 得

$$v(j\omega, \mathbf{K}) = v_r(\omega, k_i, k_d) + jv_i(\omega, k_p), \quad (14)$$

其中:

$$\begin{cases} v_r(\omega, k_i, k_d) = p_1(\omega) + (k_i - \omega^2 k_d) p_2(\omega) \\ v_i(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \\ p_1(\omega) = -\omega^2 (N_e(\omega^2) D_o(\omega^2) - N_o(\omega^2) D_e(\omega^2)) \\ p_2(\omega) = N_e^2(\omega^2) + \omega^2 N_o^2(\omega^2) \\ q_1(\omega) = \omega (N_e(\omega^2) D_e(\omega^2) + \omega^2 N_o(\omega^2) D_o(\omega^2)) \\ q_2(\omega) = \omega p_2(\omega) \end{cases} \quad (15)$$

3.1 可行 k_p 区间 U_s 的确定

为了保证 $\delta(s, \mathbf{K})$ 为 Hurwitz 多项式,要求 $v(s, \mathbf{K})$ 的 RHP 零点全部由 $N^*(s)$ 引入。由于 $v_i(\omega, k_p)$ 为 R 上的奇函数,所以要求 $v_i(\omega, k_p)$ 至少应该有 Z_0 个奇数重非负相异实数零点。

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{\sigma(v)}{2}, & \text{for } \deg[v(s, \mathbf{K})] \text{ is even} \\ \frac{\sigma(v)+1}{2}, & \text{for } \deg[v(s, \mathbf{K})] \text{ is odd} \end{cases}, \quad (16)$$

取:

$$k_p(\omega) = -\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)}. \quad (17)$$

定义 n_{12} 为 $q_1(\omega)$ 和 $q_2(\omega)$ 的公因式的非负实数零点个数, $n_{12} \geq 1$. 则上面对于 $v_i(\omega, k_p)$ 的要求就等价于: 式(17)所代表的曲线与直线 $k_p(\omega) = k_p$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上至少存在 $Z_0 - n_{12}$ 个交点。

3.2 固定 k_p 下的 (k_i, k_d) 区域 R_{S, k_p}

对于某一个固定 k_p , 假设 $v_i(\omega, k_p)$ 的奇数重相异非负实数零点为 $\omega_0 = 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$, 取 $\omega_m \rightarrow +\infty$. 然后, 做以下定义:

$$i_t = \{-1, 1\}, t=0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (18)$$

$$i_m = \begin{cases} 0, & \text{for } \deg[v(s, \mathbf{K})] \text{ is odd} \\ \{-1, 1\}, & \text{for } \deg[v(s, \mathbf{K})] \text{ is even} \end{cases}$$

$$A_{k_p} = \{[i_0, i_1, i_2, \dots, i_m]\}, \quad (19)$$

$$j_+ = (-1)^{m-1} \text{sgn}[v_i(\omega_m, k_p)]. \quad (20)$$

根据定理 2, 如果存在使 $\delta(s, \mathbf{K})$ 为 Hurwitz 多项式的 PID 参数增益向量 \mathbf{K} , 则必然存在满足(21)式的序列 $\mathbf{I} = [i_0, i_1, i_2, \dots, i_m] \in A_{k_p}$.

$$\sigma(v) = j_+ \cdot \left\{ i_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i 2i_t + (-1)^m \cdot i_m \right\}, \quad (21)$$

定义可行序列集合:

$$F_{k_p} := \{I_1, I_2, I_3, \dots\}, \quad (22)$$

其中: I_1, I_2, I_3, \dots 为满足式(21)的序列 $I \in A_{k_p}$.

对于 F_{k_p} 中的一个序列 $\mathbf{I}_t = [i_0, i_1, i_2, \dots, i_m]$, 与之对应的 (k_i, k_d) 区域 X_t 由下述不等式组决定:

$$v_t(\omega_t, k_i, k_d) \cdot i_t > 0, \quad (23)$$

其中: $i_t \neq 0, (t=0, 1, 2, \dots, m)$. F_{k_p} 中所有序列 I_1, I_2, I_3, \dots 对应的 (k_i, k_d) 区域的并集即为当前 k_p 下的 (k_i, k_d) 区域, 即:

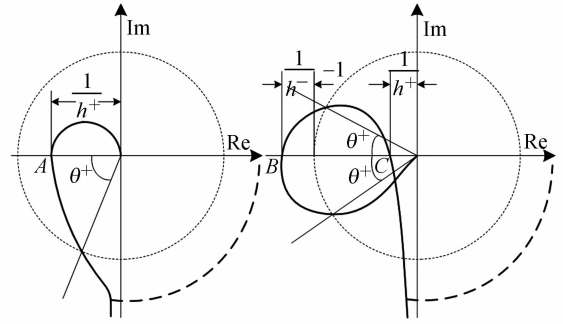
$$R_{S, k_p} = \bigcup_{i=1, 2, 3, \dots} X_i. \quad (24)$$

4 稳定裕度约束下的 PID 稳定域

对于图 1 的控制系统, 其开环传递函数为:

$$G_o(s) = G(s)C(s) = \frac{(k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s)}{sD(s)}, \quad (25)$$

可见, $G_o(s)$ 的 RHP 极点与 $G(s)$ 的 RHP 极点完全相同, 也就是说开环特征多项式的 RHP 零点个数 N_p 是已知的。根据 Nyquist 稳定判据可知, 当 $N_p > 0$ 时, 存在开环 RHP 极点, 如果闭环系统稳定, 则 $G_o(j\omega)$ 必定穿越实轴区间 $(-\infty, -1)$ 至少一次; 当 $N_p = 0$ 时, 不存在开环 RHP 极点, 如果闭环系统稳定, 则要求 $G_o(j\omega)$ 所包围 $(-1, 0)$ 区间的点的代数和为零, 此时, 并不能确定 $G_o(j\omega)$ 是否穿越实轴区间 $(-\infty, -1)$ 。但只要闭环系统稳定, $G_o(j\omega)$ 就必定穿越实轴区间 $(-1, 0)$ 至少一次。同样, 当 $N_p = 0$ 时, $G_o(j\omega)$ 与原点处的单位圆至少存在一个实轴下方的交点, 实轴上方是否存在交点不能确定; 当 $N_p > 0$ 时, 实轴上方和下方至少各存在一个交点。



(a) $G(s)$ 不含有 RHP 极点 (b) $G(s)$ 含有 RHP 极点
(a) $G(s)$ without RHP poles (b) $G(s)$ with RHP poles

图 2 开环传递函数 $G_o(s)$ 的 Nyquist 图

Fig. 2 Nyquist plots for open loop TF $G_o(s)$

基于以上分析, 两种情况下包含最少交点的开环 Nyquist 曲线如图 2 所示。对于闭环稳定系统, 做以下定义:

(1) 开环 Nyquist 图与实轴区间 $(-1, 0)$ 的所有交点中距离点 $(-1, 0)$ 最近的点 $(-a, 0)$ 对应的值为 $h^+ = 1/a > 1$, 将其定义为系统的最小幅值裕度。

(2) 开环 Nyquist 图与实轴区间 $(-\infty, -1)$ 的所有交点中距离点 $(-1, 0)$ 最近的点 $(-b, 0)$ 对应的值为 $h^- = 1/b < 1$, 将其定义为系统的最大幅值裕度。

(3) 将开环 Nyquist 图与原点处的单位圆在实轴下方逆时针方向的第一个交点对应的角度 $\theta^+ > 0$ 定义为系统的正相位裕度。

(4) 将开环 Nyquist 图与原点处的单位圆在实轴上方顺时针方向的第一个交点对应的角度

$\theta^- < 0$ 定义为系统的负相位裕度。

当 $N_p > 0$ 时, 4 个稳定裕度 $h^+, h^-, \theta^+, \theta^-$ 必然都存在; 而当 $N_p = 0$ 时, 必定存在的只有 h^+ 和 θ^+ 。为了保证闭环系统的稳定性和鲁棒性, 需要对系统的稳定裕度加以限制。本节所要解决的就是上述稳定裕度约束下的 PID 稳定域求解问题。

对于一个固定的 k_p , 由于 R_{S, k_p} 是由所有能够使闭环系统稳定的 (k_i, k_d) 参数点构成的区域, 所以能够保证闭环系统稳定性和鲁棒性的 (k_i, k_d) 区域 R_{k_p} 必定在 R_{S, k_p} 内。如图 3 所示:

$$R_{k_p} = R_{S, k_p} \cap R_{P_m, k_p} \cap R_{G_m, k_p} \quad (26)$$

其中: R_{P_m, k_p} 和 R_{G_m, k_p} 分别为相位裕度和幅值裕度单独约束下的 (k_i, k_d) 区域。

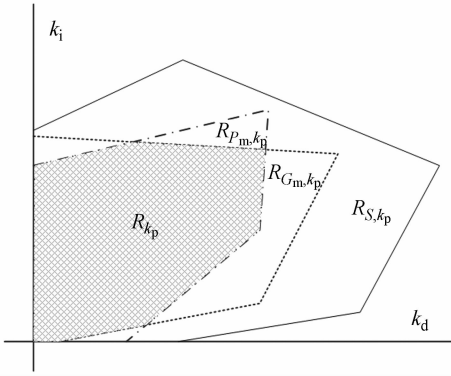


图 3 固定 k_p 对应的 $R_{S, k_p}, R_{G_m, k_p}, R_{P_m, k_p}, R_{k_p}$ 区域

Fig. 3 Regions $R_{S, k_p}, R_{G_m, k_p}, R_{P_m, k_p}$ and R_{k_p} for a fixed k_p

4.1 幅值裕度约束下的稳定区域

根据幅值裕度的物理含义可以知道, 幅值裕度 h 约束下的 PID 稳定性等价于新被控对象 $hG(s)$ 的 PID 稳定性。

对于幅值裕度约束: $h_1 \leq h \leq h_2$, 可行 k_p 区间和固定 k_p 下的 (k_i, k_d) 区域由下列 2 个实系数多项式簇的稳定区域决定:

$$\begin{cases} \delta_1 = sD(s) + A_1(k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), A_1 \in H_1 \\ \delta_2 = sD(s) + A_2(k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), A_2 \in H_2 \end{cases} \quad (27)$$

(1) 如果 h 为最小幅值裕度 h^+ (H_i 为 $[1, h_i]$), 则:

$$\begin{aligned} U_{G_m}^+ &= U_S \cap U_{h_1}^+ \\ R_{G_m, k_p}^+ &= R_{G_{m_1}, k_p}^+ - R_{G_{m_2}, k_p}^+ \end{aligned} \quad (28)$$

其中: $U_{h_1}^+$ 为 $A_1 = h_1$ 对应的可行 k_p 区间; $R_{G_{m_1}, k_p}^+$ 和 $R_{G_{m_2}, k_p}^+$ 分别为固定 k_p 下的 δ_1 和 δ_2 对应的 (k_i, k_d)

区域, R_{G_m, k_p}^+ 为 h^+ 约束下的 (k_i, k_d) 区域。

(2) 如果 h 为最大幅值裕度 h^- (H_i 为 $[h_i, 1]$), 则:

$$\begin{aligned} U_{G_m}^- &= U_S \cap U_{h_2}^- \\ R_{G_m, k_p}^- &= R_{G_{m_2}, k_p}^- - R_{G_{m_1}, k_p}^- \end{aligned} \quad (29)$$

其中: $U_{h_2}^-$ 为 $A_2 = h_2$ 对应的可行 k_p 区间; $R_{G_{m_1}, k_p}^-$ 和 $R_{G_{m_2}, k_p}^-$ 分别为固定 k_p 下的 δ_1 和 δ_2 对应的 (k_i, k_d) 区域, R_{G_m, k_p}^- 为 h^- 约束下的 (k_i, k_d) 区域。

(3) 如果同时约束 h^+ 和 h^- , 则:

$$\begin{aligned} U_{G_m} &= U_{G_m}^+ \cap U_{G_m}^- \\ R_{G_m, k_p} &= R_{G_m, k_p}^+ \cap R_{G_m, k_p}^- \end{aligned} \quad (30)$$

其中: U_{G_m} 为幅值裕度约束下的可行 k_p 区间; R_{G_m, k_p} 为固定 k_p 对应的 (k_i, k_d) 区域。

4.2 相位裕度约束下的稳定区域

与幅值裕度类似, 相位裕度 θ 约束下的 PID 稳定性等价于被控对象 $e^{-j\theta}G(s)$ 的 PID 稳定性。这里,

$$\theta = \begin{cases} \theta^+, & \text{for } N_p = 0 \\ \min(\theta^+, -\theta^-), & \text{for } N_p > 0 \end{cases} \quad (31)$$

如果要求 $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, 则可行 k_p 区间 U_{P_m} 和固定 k_p 下的 (k_i, k_d) 区域 R_{P_m, k_p} 由下列 2 个复系数多项式的稳定区域决定:

$$\begin{cases} \delta_3 = sD(s) + e^{-jr_1}(k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), r_1 \in [0, \theta_1] \\ \delta_4 = sD(s) + e^{-jr_2}(k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), r_2 \in [0, \theta_1] \end{cases} \quad (32)$$

此时,

$$\begin{aligned} U_{P_m} &= U_{P_{m_1}} \\ R_{P_m, k_p} &= R_{P_{m_1}, k_p} - R_{P_{m_2}, k_p} \end{aligned} \quad (33)$$

其中: $U_{P_{m_1}}$ 为 δ_3 对应的可行 k_p 区间, U_{P_m} 为相位裕度约束下的可行 k_p 区间; $R_{P_{m_1}, k_p}$ 和 $R_{P_{m_2}, k_p}$ 分别为固定 k_p 下的 δ_3 和 δ_4 对应的 (k_i, k_d) 区域, R_{P_m, k_p} 为固定 k_p 对应的 (k_i, k_d) 区域。

4.3 复系数多项式的稳定性

对于式(32)类型的复系数多项式与实数情况类似, 可以得到式(14), 这里:

$$\begin{aligned} v_i'(\omega, k_i, k_d) &= -q_1(\omega) \sin(\theta) + p_1(\omega) \cos(\theta) + \\ &\quad (k_i - \omega^2 k_d) p_2(\omega) \\ v_i'(\omega, k_p) &= q_1(\omega) \cos(\theta) + p_1(\omega) \sin(\theta) + k_p q_2(\omega) \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $p_1(\omega), p_2(\omega), q_1(\omega), q_2(\omega)$ 参见式(15)。

由于 $v_i'(\ast)$ 既非奇函数又非偶函数,所以需要根据 $v_i'(\ast)=0$ 的所有实根个数来确定可行 k_p 区间。也就是说, $v_i'(\ast)=0$ 至少需要有 Z_0' 相异奇数重实根。

$$Z_0' = \begin{cases} \sigma(v), & \text{for } \deg[v_i'(\ast)] \geq \deg[v_r'(\ast)] \\ \sigma(v) - 1, & \text{for } \deg[v_i'(\ast)] < \deg[v_r'(\ast)] \end{cases}, \quad (35)$$

$$k_p'(\omega) = -\frac{q_1(\omega)\cos(\theta) + p_1(\omega)\sin(\theta)}{q_2(\omega)}. \quad (36)$$

定义 n_{12}' 为式(36)右边分子和分母多项式的公因式多项式的实数零点个数,则对于 $v_i'(\omega, k_p)=0$ 的实根个数的约束就等价于式(36)所代表的曲线 $k_p'(\omega)=k_p$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 直线在上方至少存在 $Z_0' - n_{12}'$ 个交点。

对于固定 k_p 下的 (k_i, k_d) 区域 R_{P_m, k_p} 的构建方法,与实系数情况也有所不同。如果 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ 为 $v_i'(\ast)=0$ 的所有相异奇数重实根,取 $\omega_0 \rightarrow -\infty, \omega_m \rightarrow +\infty$ 。做以下定义:

$$i_t = \{-1, 1\}, t=1, 2, \dots, m-1$$

$$i_r = \begin{cases} 0, & \text{for } \deg(v_i'(\ast)) \geq \deg(v_r'(\ast)) \\ \{-1, 1\}, & \text{for } \deg(v_i'(\ast)) < \deg(v_r'(\ast)) \end{cases}, r=0, m \quad (37)$$

则可行序列集合 F_{k_p} 的元素 $I_i = [i_0, i_1, i_2, \dots, i_m]$ 都需要满足式(38)。对于 F_{k_p} 的每一个元素通过式(23)构建相应的 (k_i, k_d) 区域,取并集后就可得到 R_{P_m, k_p} 。

$$\sigma(v) = \frac{j_{\pm}}{2} \cdot \left\{ i_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i 2i_i + (-1)^m \cdot i_m \right\}. \quad (38)$$

4.4 稳定裕度约束下的 PID 稳定域算法

在构建 (k_i, k_d) 区域时,没有必要对每一个固定 k_p 都求解一次可行序列 F_{k_p} 。对于每一个可行 k_p 分区间上的所有 k_p, v_i 或者 v_i' 的相异(非负)实数零点个数都是相同的,其可行序列集合 F_{k_p} 也必定相同,记为 F_i 。其中, i 为可行分区间序号。并不是可行序列集合中的每一个元素都会构成 (k_i, k_d) 区域,将确实能够构成 (k_i, k_d) 区域的序列称为构建序列 $I_{k_p}^*$,所有 $I_{k_p}^*$ 的集合称为构建序列集合 $F_{k_p}^*$ 。由于可行分区间上 (k_i, k_d) 区域的连

续性,所以,可以用分区间上所取的第一个固定 k_p 所对应的 $F_{k_p}^*$ 作为区间构建序列集合 F_i^* 。如果可行分区间 i 和 j 对应的 v_i 或者 v_i' 的相异(非负)实数零点个数相同,则有 $F_i^* = F_j^*$ 。以上特性称为可行 k_p 分区间上的构建序列不变性。通过以上操作,构建序列部分的算法复杂度由 $O(n)$ 降为 $O(1)$,从而减少了整个算法的计算时间。仿真实例部分的例 1 求取所有 R_{S, k_p} 共进行了 5 次仿真实验,并取平均值,实验结果显示:原始算法耗时为 534.165 4 s,引入以上操作后耗时为 346.236 2 s。

基于以上内容,算法如下:

(1) 分别计算 θ, h^+, h^- 约束下的可行 k_p 区间,将这 2 个分区间取交集得到总的可行 k_p 区间:

$$U = U_{G_m} \cap U_{P_m}, \quad (39)$$

如果 U 为空集,则不存在满足条件的 PID 控制器,程序结束;否则转(2)。

(2) 在 U 上均匀地取 k 个 k_p 点用以构建 (k_i, k_d) 区域,将这 k 个 k_p 点用数组 \mathbf{M} 表示。

(3) 对于 \mathbf{M} 内的每一个元素,分别执行步骤(4)到(6)。

(4) 计算幅值裕度约束下对应于固定 k_p 的 (k_i, k_d) 区域 R_{G_m, k_p} 。

(5) 计算相位裕度约束下对应于固定 k_p 的 (k_i, k_d) 区域 R_{P_m, k_p} 。

(6) 将两者取交集后所得的区域即为稳定裕度混合约束下,固定 k_p 对应的 (k_i, k_d) 区域 R_{k_p} :

$$R_{k_p} = R_{P_m, k_p} \cap R_{G_m, k_p}. \quad (40)$$

(7) 则可行 k_p 区间 U 上所有的 k_p 对应的 (k_i, k_d) 区域的外轮廓所包含的区域就是满足要求的 PID 稳定域。

5 仿真实例

例 1:考虑文献[7]中的不含开环 RHP 极点(即 $N_p=0$)的一个随机系统的简化传递函数:

$$G(s) = \frac{-5.5136s^2 + 6.4324s + 61.0346}{s^4 + 4.6715s^3 + 12.912s^2 + 18.299s + 2.672}$$

要求 $2 \leq h^+ \leq 4$, 且 $15^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ 约束下的 PID 控制器的稳定区域。

首先求解可行 k_p 区间, 可以得到:

$$U_{G_m} : [-0.021\ 889, 0.221\ 87],$$

$$U_{P_m} : [-0.043\ 778, 0.396\ 67],$$

$$U = U_{G_m} \cap U_{P_m} = [-0.021\ 889, 0.221\ 87].$$

所以, 满足稳定裕度 h^+ 和 θ 要求的 PID 控制器的比例增益系数 k_p 只可能在区间 U 内, 也就是说区间 U 外不存在满足要求的 PID 控制器。

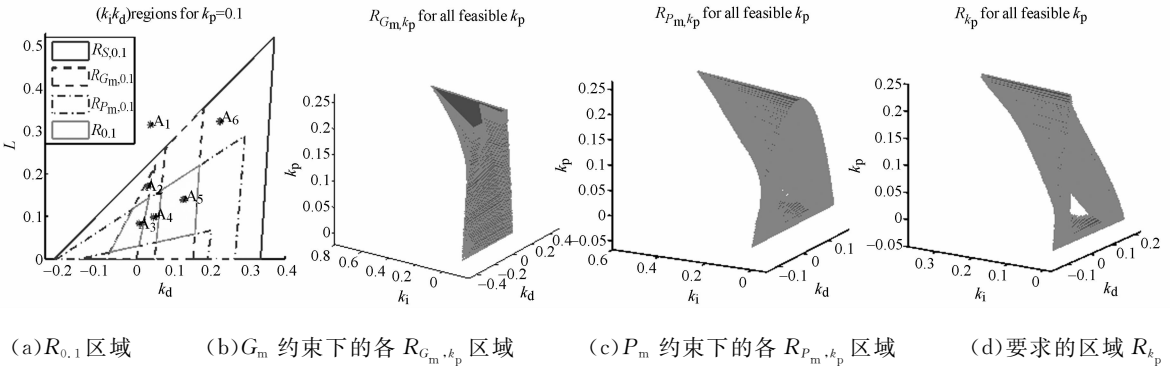
当 $k_p = 0.1$ 时, 对应的 $R_{S,0.1}, R_{G_m,0.1}, R_{P_m,0.1}, R_{0.1}$ 如图 4 所示, 在其上选取 6 个点 $A_1 \sim A_6$, 对应的 (k_i, k_d) 坐标以及相应的稳定裕度参见表 1。可见, 这 6 个点所在的区域与稳定裕度信息完全符合, 并且, 只有 A_3 和 A_5 2 点满足稳定裕度约束。

在可行区间 U 上均匀地取 100 个点构成关于 k_p 的集合 M , 遍历 M 的每一个元素构建相应的 (k_i, k_d) 区域, 相应的 $R_{G_m, k_p}, R_{P_m, k_p}, R_{k_p}$ 如图 4 所示。

表 1 选定点 $A_1 \sim A_6$ 对应的稳定裕度

Tab. 1 Stability margins for selected $A_1 \sim A_6$

A_i	(k_i, k_d)	h^+	θ	稳定性
1	(0.034 6, 0.315 4)	不存在	11.853 7	不稳定
2	(0.027 3, 0.170 3)	2.703 2	8.900 4	稳定
3	(0.004 4, 0.083 4)	3.368 5	28.946 1	稳定
4	(0.043 1, 0.098 4)	4.369 8	28.948 1	稳定
5	(0.124 5, 0.139 1)	2.485 2	26.605 5	稳定
6	(0.224 3, 0.323 5)	1.578 4	6.711 0	稳定



(a) $R_{0.1}$ 区域 (b) G_m 约束下的各 R_{G_m, k_p} 区域 (c) P_m 约束下的各 R_{P_m, k_p} 区域 (d) 要求的区域 R_{k_p}
 (a) $R_{0.1}$ region (b) R_{G_m, k_p} regions for G_m constraint (c) R_{P_m, k_p} regions for P_m constraint (d) Required R_{k_p} regions

图 4 $k_p = 0.1$ 时的 (k_i, k_d) 区域和可行 k_p 区间上的 $R_{G_m, k_p}, R_{P_m, k_p}, R_{k_p}$ 区域
 Fig. 4 (k_i, k_d) regions for $k_p = 0.1$ and $R_{G_m, k_p}, R_{P_m, k_p}, R_{k_p}$ for all feasible k_p

例 2: 考虑含有 2 个开环 RHP 极点 (即 $N_p = 2$) 的被控对象^[23]:

$$G(s) = \frac{2s-1}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 9}$$

稳定裕度限制为: $1.5 \leq h^+ \leq 3, 0.5 \leq h^- \leq 0.7, 10^\circ \leq \theta \leq 35^\circ$, 求解满足以上要求的 PID 控制器稳定区域:

$$U_{G_m}^- : [-0.436\ 3, 9],$$

$$U_{G_m}^+ : [-0.290\ 9, 6],$$

$$U_{P_m} : [-0.041\ 4, 8.951\ 2].$$

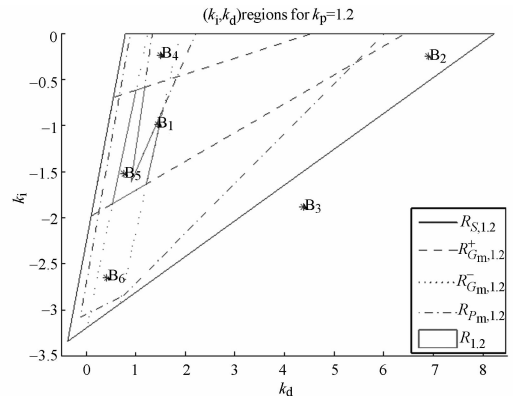


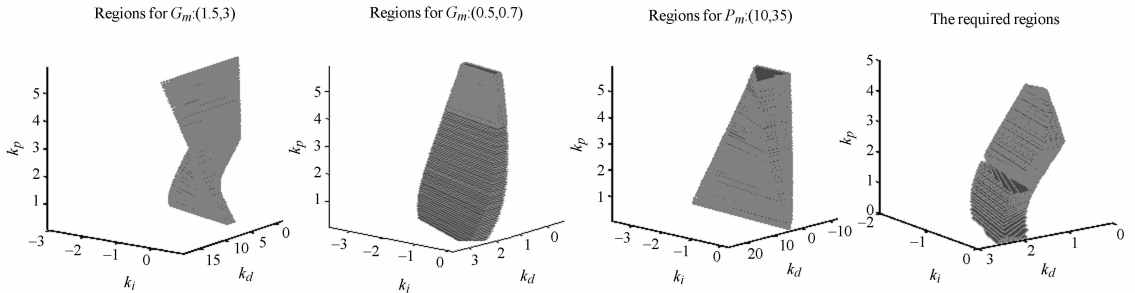
图 5 $k_p = 1.2$ 时的 (k_i, k_d) 区域

Fig. 5 (k_i, k_d) regions for $k_p = 1.2$

$$U = U_{G_m}^- \cap U_{G_m}^+ \cap U_{P_m} = [-0.041 \ 4, 6]$$

取固定 k_p 为 1.2, 相应的裕度约束区域如图 5 所示。在其上取 6 个测试点 $B_1 \sim B_6$, 其坐标信息和裕度信息参见表 2, 由表 2 可知, 只有 B_1, B_5 满足稳定裕度的要求, 其它点所在的位置也与

表 2 计算得到的稳定裕度相符。取可行区间 U 上 75 个点构成关于 k_p 的集合 M , 遍历 M 中的所有元素, 可以得到图 6 中的相应 (k_i, k_d) 区域 $R_{G_m^+, k_p}^+, R_{G_m^-, k_p}^-, R_{P_m, k_p}$ 。



(a) G_m^+ 约束下的各 $R_{G_m^+, k_p}^+$ 区域 (b) G_m^- 约束下的各 $R_{G_m^-, k_p}^-$ 区域 (c) P_m 约束下的各 R_{P_m, k_p} 区域 (d) G_m^+, G_m^- 和 P_m 约束下的各 R_{k_p} 区域

(a) $R_{G_m^+, k_p}^+$ regions for G_m^+ constraint (b) $R_{G_m^-, k_p}^-$ regions for G_m^- constraint (c) R_{P_m, k_p} regions for P_m constraint (d) Required R_{k_p} regions

图 6 稳定裕度约束下的 PID 参数 (k_p, k_i, k_d) 的稳定区域

Fig. 6 Stabilizing regions of PID parameters (k_p, k_i, k_d) for the constraints of stability margins

表 2 选定点 $B_1 \sim B_6$ 对应的稳定裕度

Tab. 2 Stability margins for selected $B_1 \sim B_6$

B_i	(k_i, k_d)	h^+	h^-	θ	稳定性
1	(1.456 4, -0.990 5)	2.064 1	0.505 8	34.570 3	稳定
2	(6.902 5, -0.251 5)	1.137 4	0.164 6	3.090 2	稳定
3	(4.379 1, -1.883 4)	不存在	0.878 5	11.519 2	不稳定
4	(1.504 4, -0.241 2)	4.349 9	0.571 6	39.077 9	稳定
5	(0.769 7, -1.524 2)	1.688 3	0.648 8	29.396 0	稳定
6	(0.418 3, -2.653 2)	1.125 1	0.612 0	23.250 1	稳定

6 结 论

本文根据开环 Nyquist 曲线在临界点 $(-1,$

$0)$ 附近的形状, 定义了 4 种稳定裕度 $(h^+, h^-, \theta^+, \theta^-)$ 。根据 Nyquist 稳定判据的条件, 分析了开环含 RHP 极点和不含 RHP 极点两种情况下的稳定裕度。给出了以这些稳定裕度作为约束条件时的 PID 稳定参数区域的构建方法。并且通过引入可行 k_p 分区间上的构建序列不变性, 将求解构建序列部分的算法复杂度由 $O(n)$ 降低为 $O(1)$, 大幅度提高了算法的执行效率。该方法非常适合于 Matlab 编程实现, 文中用于验证有效性的 2 个例子就是笔者通过自己编制的 PID 参数域工具箱实现的。

参考文献:

[1] ÅSTRÖM K J, HÄGGLUND T. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning* [M]. North Carolina: Instrument Society of America, 1995.

[2] AIDAN O'DWYER. *Handbook of PI and PID controller tuning rules* [M]. London: Imperial College Press, 2009.

[3] HUANG Y J, WANG Y J. Robust PID tuning strategy for uncertain plants based on the Khritonov theorem [J]. *ISA Transactions*, 2000, 39(4):419-431.

[4] CHAPPELLAT H, MANSOUR M, BHATTACH-

ARYYA S P. Elementary proofs of some classical stability criteria [J]. *IEEE Transactions on Education*, 1990, 33(3):232-239.

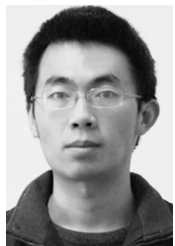
[5] MATUŠU R. Calculation of all stabilizing PI and PID controllers [J]. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 5(3): 224-231.

[6] 李银伢, 盛安冬, 王远钢. 期望指标集约束下一类随机系统的满意 PID 控制 [J]. *控制与决策*, 2007, 22(3): 252-257.

LI Y Y, SHENG A D, WANG Y G. On satisfactory PID control for a class of stochastic systems with desired index set constraint [J]. *Control and Decision*, 2007, 22(3): 252-257. (in Chinese)

- [7] 马建伟, 李银侏. 满意 PID 控制设计理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
MA J W, LI Y Y. *Satisfactory PID Control Design: Theorem and Methods* [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [8] HO M T, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. Bhattacharyya generalizations of the Hermite-Biehler theorem [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1999, 302-303:135-153.
- [9] BHATTACHARYYA S P, DATTA A, KEEL L H. *Control Theory: Structure, Robustness and Optimization* [M]. Florida: CRC Press, 2009.
- [10] SILVA G J, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. *PID Controller for Time-Delay Systems* [M]. Boston: Birkhäuser, 2005.
- [11] BHATTACHARYYA S P, CHAPPELLAT H, KEEL L H. *Robust Control: The Parametric Approach* [M]. London: Prentice Hall PTR, 1995.
- [12] DATTA A, HO M T, BHATTACHARYYA S P. *Structure and Synthesis of PID Controller* [M]. London: Springer, 2000.
- [13] HO M T, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers [C]. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, 1997, 6:3922-3928.
- [14] ACKERMANN J, KAESBAUER D. Design of robust PID controllers [C]. *Proc. European Control Conference, Porto*, 2001.
- [15] BAJCINCA N. The method of singular frequencies for robust control design in an affine parameter space [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 100-105.
- [16] BAJCINCA N. Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies [J]. *Automatica*, 2006, 42(11):1943-1949.
- [17] 方斌. 时滞系统 PID 控制器参数稳定域的实现 [J]. 电子科技大学学报, 2011, 40(3):411-417.
FANG B. Realization of PID controller parameter stable regions for time delay systems [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2011, 40(3):411-417. (in Chinese)
- [18] 方斌. 基于稳定裕量的二阶时滞系统 PID 控制器参数稳定域 [J]. 信息与控制, 2011, 40(2), 192-197.
FANG B. Second-order time delay system stable regions of PID controller parameter based on stability margins [J]. *Information and Control*, 2011, 40(2), 192-197. (in Chinese)
- [19] 彭瑞, 岳继光. 基于区间分析的参数不确定系统 PID 鲁棒控制器设计 [J]. 电机与控制学报, 2006, 10(4):411-419.
PENG R, YUE J G. Robust design of PID controller for interval plants based on interval analysis [J]. *Electronic Machines and Control*, 2006, 10(4):411-419. (in Chinese)
- [20] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Fixed order multivariable controller synthesis: A new algorithm [C]. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico*, 2008; 977-982.
- [21] KNAP M J, KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust stability of complex systems with applications to performance attainment problems [C]. *Proceedings of the 2010 American Control Conference, Baltimore*, 2010; 3907-3912.
- [22] HO M T, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. Generalizations of the Hermite - Biehler theorem; the complex case [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2000, 320:23-36.
- [23] HO M T, WANG H S. PID controller design with guaranteed gain and phase margins [J]. *Asian Journal of Control*, 2003, 5(3):374-381.

作者简介:



赵秀伟(1983—),男,山东潍坊人,博士,2005年于山东大学控制科学与工程学院获得学士学位,2013年于中国科学院长春光学精密机械与物理研究所获得博士学位,主要从事2-DOF-PID鲁棒控制方面的研究。E-mail:fdcp@163.com

导师简介:



任建岳(1952—),男,吉林长春人,研究员,博士生导师,主要研究方向为光学遥感器的研制和性能评价,曾获863计划航天领域先进个人,863计划先进个人,全国优秀科技工作者等称号。E-mail:renjy@ciomp.ac.cn.