

文章编号 1004-924X(2013)02-0388-06

S 型折叠式微悬臂梁刚度计算

刘双杰^{1,2*}, 郝永平²

(1. 长春理工大学 机电工程学院, 吉林 长春 130022; 2. 沈阳理工大学 装备工程学院, 辽宁 沈阳 110159)

摘要:针对目前没有成熟的设计计算 S 型折叠式悬臂梁刚度公式的问题, 本文利用能量法和胡克定律推导了 S 型折叠悬臂梁 x 向、 y 向和 z 向的刚度计算公式。推导过程中发现对于复杂的微悬臂梁结构, 其转角处的弯矩对最终结果影响较大, 不可忽略。在 ANSYS 中对 S 型折叠悬臂梁建模, 应用有限元法计算了 S 型悬臂梁的刚度, 并和理论公式进行了对比。与有限元法对比显示, 公式计算值的相对误差分别为 0.67%、1.09% 和 2.95%, 均小于 3%。应用图像测位移法对 S 型悬臂梁进行了 x 、 y 向的拉伸实验, 实验显示得到的实验值和理论值吻合, 表明本文推导的 S 型悬臂梁的刚度计算公式合理, 能够为该类型悬臂梁的设计和计算提供理论依据。

关键词:微悬臂梁; 刚度计算; 微机电系统; 有限元法

中图分类号: TH122; TH703 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20122010.0388

Calculation for spring constants of folded serpentine micro-cantilevers

LIU Shuang-jie^{1,2*}, HAO Yong-ping²

(1. College of Mechanical and Electric Engineering,

Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;

2. School of Equipment Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China)

* Corresponding author, E-mail: shuangjieliu@126.com

Abstract: For lack of calculating formulas to design folded serpentine micro-cantilevers, this paper deduces calculating formulas to compute the deflection of a folded serpentine micro-cantilever and its spring constants in x , y and z directions combining the Hooke's law and the energy method. In deduction, it is found that the bending moment at the out corner will effect on the final results of the complex micro-cantilever seriously, so it can not be ignore in calculation. The spring constant of the folded serpentine micro-cantilever is calculated by finite element analysis using ANSYS software to validate the theoretic calculation. Compared with the finite element simulation, the relative errors of the folded serpentine micro-cantilever is 0.67%, 1.09% and 2.95% in the x , y and z directions respectively, and the values are all less than 3%. An image measurement system is established to measure the distortion of the cantilever. Experimental results indicate that the theoretic calculation values coincide with the measured values well. The formulas deduced for the folded serpentine micro-cantilever are logical, and the formula deduction can offer the gists for the computation and design of the folded

收稿日期: 2012-10-29; 修订日期: 2012-12-02.

基金项目: 国防装备预研基金资助项目 (No. 51305050300)

serpentine micro-cantilevers.

Key words: micro-cantilever; spring constant; Micro-electro-mechanic System (MEMS); finite element method

1 引言

受到空间尺寸和驱动能量的限制, MEMS (Micro-electro-mechanical Systems) 机构通常需要将能量传递、运动转换和执行调节等机构集成于一体^[1], 为了实现 MEMS 这种多功能的结构, 大多数设计者采用微弹性悬臂梁传递能量, 即利用微悬臂梁的变形实现机构的多自由度运动, 因此微悬臂梁是一种典型的并且非常重要的 MEMS 器件。悬臂梁是微传感器、微执行器和微陀螺仪等的重要组成部分, 它不仅可为其提供弹性力, 而且能够传递能量^[2-6]。微悬臂梁性能的好坏对器件能否按照设计要求工作起着至关重要的作用。

结构简单的微悬臂梁的刚度计算公式已成熟, 而许多实际应用中结构复杂的微悬臂梁(如多节 S 型折叠式悬臂梁)并没有成熟的设计计算公式, 在器件的设计及优化中缺乏理论支持。以往的文献报道中, 何光、石庚辰^[7]对 MEMS 平面 Z 型、L 型等复杂形状的多节悬臂梁进行了平面刚度计算公式的推导, 但忽略了转角处的弯矩, 精度不高; 南京理工大学的吴志亮^[8]对 S 型折叠式、W 型悬臂梁的刚度公式进行了推导, 精度有了进一步的提高, 但其推导公式仅限于 y 向刚度, 切向以及垂直平面方向的刚度缺少精确的计算公式。另外以上文献只采用公式推导和利用有限元模拟方法进行分析验证, 没有实验验证。本文提出 S 型折叠式微悬臂梁 x 、 y 、 z 3 个方向的刚度计算公式, 精度上有了进一步的提高, 并通过实验验证了该公式的正确性和精度。

2 S 型折叠式微悬臂梁模型

为了降低结构刚度, 捕捉到更小的信号, S 型折叠式悬臂梁广泛应用于 MEMS 执行器和传感器中^[2-5]。S 型折叠式微悬臂梁模型如图 1 所示。

为了简化推导过程, 在公式推导前做如下 3

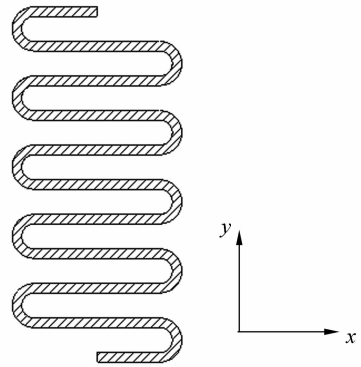


图 1 S 型折叠式微悬臂梁模型

Fig. 1 Model of folded serpentine micro-cantilever

点假设:

1. 由于折叠悬臂梁用于 MEMS 执行器、加速度计等结构, 弹性变形空间有限, 且这些器件本身可以重复使用, 因此假设折叠悬臂梁的变形均为小变形, 力学行为可以用刚度系数 K 来表示。
2. 不考虑悬臂梁中残余应力的影响。
3. 忽略悬臂梁本身重力的影响。

3 刚度计算和有限元仿真

折叠悬臂梁结构由 n 节结构完全相同的单元组成, 每一个单元的形状和基本尺寸如图 2。取出其中一节单元, 建立力学分析模型, 图 2 中 B 和 T 分别为折叠悬臂梁截面宽度和厚度, L 为折叠悬臂梁长度, R 为环形弯曲处的中位半径, D 为折叠梁的间隙宽度, 且 $D = 2R - B$ 。将一节折叠悬臂梁单元分成 5 个部分, 假定其一端固定, 另一端受力 F , 力的方向可以是 x 、 y 、 z 任一方向。

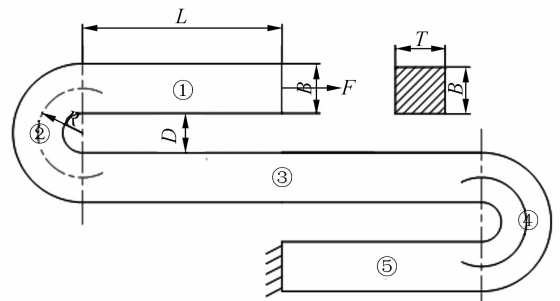


图 2 S 型折叠式微悬臂梁组成单元模型

Fig. 2 Unit model of folded S-type micro-cantilever

由卡氏第二定理^[5]可知,悬臂梁在力作用下的线性位移:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad (1)$$

式(1)中, U 为悬臂梁的变形能, P_i 为悬臂梁所受第*i*个载荷的力, δ_i 为结构在 P_i 作用方向上的位移。

由式(1)可知,对悬臂梁的能量求解力的偏导,即可得到其中一节悬臂梁的位移,将位移逐次叠加,计算出悬臂梁末端的总位移 δ ,则由线弹性理论,折叠悬臂梁的刚度即可表示为:

$$K = F/\delta. \quad (2)$$

3.1 计算平面 x, y 方向刚度

悬臂梁变形能 U 由轴向拉伸变形能和弯曲变形能组成。 F 为水平方向载荷, E 为悬臂梁材料的弹性模量, A 为折叠悬臂梁横截面面积, $N(x)$ 为作用于折叠悬臂梁某截面的轴向拉力, $M(x)$ 为作用于折叠悬臂梁某截面的弯矩, I 为截面的惯性矩。则折叠悬臂梁变形能 U 为:

$$U = \int \frac{N^2(x)}{2EA} dx + \int \frac{M^2(x)}{2EI} dx. \quad (3)$$

沿外力 F 方向的位移 δ 为:

$$\delta = \int \frac{N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial F} dx + \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx. \quad (4)$$

第①部分:

$$\delta_1 = \int_0^l \frac{F}{EA} dx = \frac{FL}{EA}. \quad (5)$$

其中 $A=BT$ 为横截面的面积。

第②部分:

$$M_2(X) = FR(1 - \cos \alpha), \quad (6)$$

所以

$$\frac{\partial M_2(X)}{\partial F} = R(1 - \cos \alpha), (0 \leq \alpha \leq \pi),$$

$$\delta_2 = \int \frac{M_2(X)}{EI} \cdot \frac{\partial M_2(X)}{\partial F} dx = \frac{3FR^3 \pi}{2EI}. \quad (7)$$

其中 $I = \frac{B^3 T}{12}$ 为横截面的惯性积。

第③部分:

$$F_N(X) = F, \quad \frac{\partial F_N(X)}{\partial F} = 1,$$

$$M_3(X) = 2FR, \quad \frac{\partial M_3(X)}{\partial F} = 2R, \quad (8)$$

所以

$$\begin{aligned} \delta_{31} &= \int_0^L \frac{F_N(X)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(X)}{\partial F} dx + 2 \int_0^L \frac{M(X)}{EI} \cdot \\ &\quad \frac{\partial M(X)}{\partial F} dx = \frac{FL}{EA} + \frac{4FR^2 L}{EI} \\ \delta_3 &= 2\delta_{31} = \frac{8FR^2 L}{EI}. \end{aligned} \quad (9)$$

第④部分:

$$M_4(X) = 2FR + FR(1 - \cos \alpha) = FR(3 - \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial M_4(X)}{\partial F} = R(3 - \cos \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi),$$

所以第4段位移为:

$$\begin{aligned} \delta_4 &= \int \frac{M_4(X)}{EI} \cdot \frac{\partial M_4(X)}{\partial F} dx = \\ &\quad \int \frac{M_4(X)}{EI} \cdot \frac{\partial M_4(X)}{\partial F} d(\alpha R) \\ \delta_4 &= \frac{19FR^3 \pi}{2EI}. \end{aligned} \quad (10)$$

第⑤部分:

$$F_N(X) = F, \quad \frac{\partial F_N(X)}{\partial F} = 1, M_5(X) = 4FR,$$

$$\frac{\partial M_5(X)}{\partial F} = 4R, \quad (11)$$

所以

$$\begin{aligned} \delta_5 &= \int_0^L \frac{F_N(X)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(X)}{\partial F} dx + \int_0^L \frac{M(X)}{EI} \cdot \\ &\quad \frac{\partial M(X)}{\partial F} dx = \frac{FL}{EA} + \frac{16FR^2 L}{EI}. \end{aligned} \quad (12)$$

由此,第一节悬臂梁的位移 $\delta_{p1} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$,同样的方法计算剩余 $n-1$ 节折叠悬臂梁的变形位移, n 节折叠悬臂梁位移叠加即为折叠悬臂梁总位移,故:

$$K_x = \frac{1}{\left[\frac{4nL}{EA} + \frac{3n\pi(B+D)^3}{4EI} + \frac{\pi(B+D)^3}{8EI} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (4n-1)^2) + \frac{(B+D)^2 L}{4EI} [2(2^2 + 4^2 + \dots + (4n-2)^2) + (4n)^2] \right]}$$

同理,可推导出S型折叠式悬臂梁 y 向刚度:

$$K_y = \frac{F}{\delta_{\text{total}}} = \frac{3EI}{n[4L^3 + 6(D+B)^2 L + 3\pi(D+B)L^2 + 3\pi(D+B)^3/8]}$$

3.2 垂直方向刚度计算

当折叠悬臂梁受到 z 向力的作用,在 z 向上悬臂梁也有抵抗变形的性能。其 z 向刚度计算分析过程如前所述。假定其一端固定,一端受到垂直纸面的力 F 。当力垂直作用于弹簧的一端时,

力引起的轴向变形很小,忽略此时的轴向变形,只考虑弹簧截面受到弯矩以及扭矩的作用。S型折叠式悬臂梁 x 向刚度计算公式:

$$K_x = \frac{1}{\frac{n}{3EI}(4L^3 + 3\pi RL^2 + 3\pi R^3) + \frac{nR}{GI_p}(2.5\pi R^2 + 8RL + \pi L^2) + \frac{\pi R^3}{2EI}[1 + 3^2 + 5^2 + L + (4n-1)^2] + \frac{\pi R^3}{2GI_p}[1 + 3^2 + 5^2 + L + (4n-3)^2] + \frac{(2R)^2 L}{GI_p}[2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + L + (2n-1)^2) + (2n)^2]}$$

3.3 有限元计算

S型悬臂梁的材料性能及材料参数如表 1。在 ANSYS 中对该悬臂梁建模,令其一端约束,另一端加载 x 向 $50 \mu\text{N}$ 的力,计算结果如图 3 和图 4 所示。由图 3 可知,在 $50 \mu\text{N}$ 力的作用下,悬臂

表 1 S型悬臂梁的材料性能及材料参数

Tab. 1 Material properties and material parameters of folded S-type micro-cantilever

参量	数值
镍的弹性模量/Pa	1.67×10^{11}
镍的泊松比	0.3
镍的密度/ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	7.75
悬臂梁节数 n	18
悬臂梁线宽 $B/\mu\text{m}$	25
悬臂梁间隙 $D/\mu\text{m}$	75
悬臂梁一半长度 $L/\mu\text{m}$	650

梁最大应力发生在固定约束端,最大应力值为 38.5 MPa ,远远小于镍的屈服极限 317 MPa ,说明该悬臂梁的变形在弹性范围内。图 4 表示的是应变云图,悬臂梁自由端 x 方向最大位移为 $0.834 747 \text{ mm}$ 。

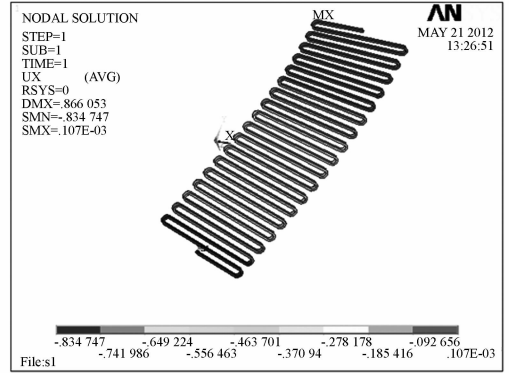


图 4 S型悬臂梁 x 向应变云图

Fig. 4 Strain cloud of folded S-type micro-cantilever in x direction

分别对其它 2 个方向进行相同的有限元计算,并把有限元计算结果和理论计算结果作对比,结果如表 2 所示。

表 2 有限元计算值和理论计算值对比结果

Tab. 2 Comparison of finite element values and calculate values

	K_x	K_y	K_z
有限元计算值/ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	0.059 9	1.466 4	0.067 8
理论计算值/ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	0.060 3	1.482 6	0.065 8
相对误差	0.67%	1.09%	2.95%

4 实验验证

图 5 是 S型折叠悬臂梁的电子显微镜照片,为了方便安装和测量,悬臂梁上下 2 端加工出和

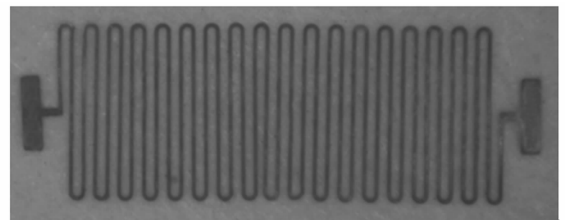


图 5 S型悬臂梁电子显微镜照片

Fig. 5 Electron microscope photo of folded S-type micro-cantilever

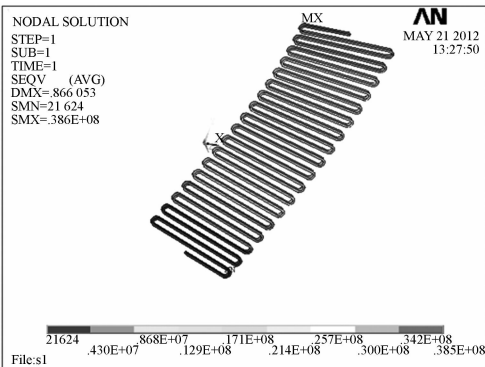


图 3 S型悬臂梁 x 向应力云图

Fig. 3 Stress cloud of folded S-type micro-cantilever in x direction

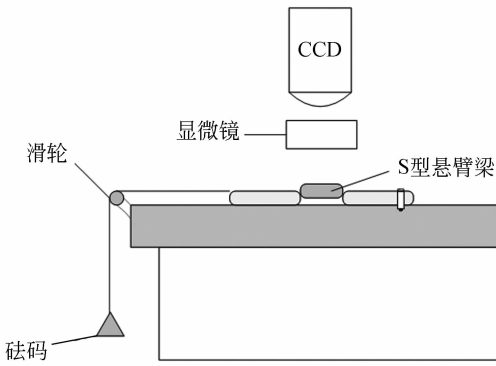
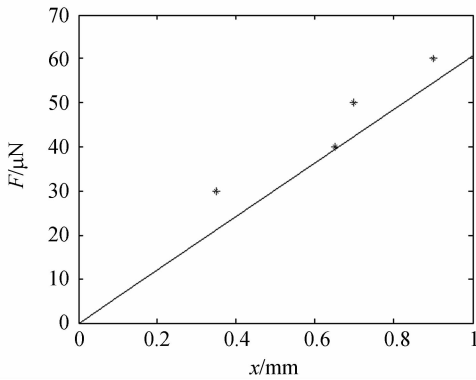


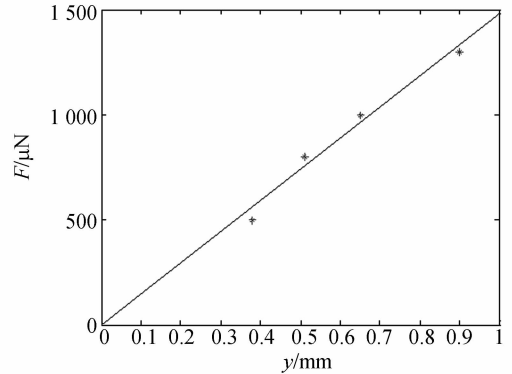
图 6 S型悬臂梁刚度测试系统

Fig. 6 Stiffness test system of folded S-type micro-cantilever

图 7 S型悬臂梁 x 向刚度实验值Fig. 7 Experimental results of stiffness for S-type micro-cantilever in x direction

基板 T 型凹槽配合的 T 型突起。悬臂梁尺寸见表 1。本文设计并制作了一种微悬臂梁弹性性能测试系统。图 6 是测试系统的示意图,由 CCD、显微镜、滑轮、砝码及工作台组成。CCD 和显微镜构成检测机构,用来测量 S 型悬臂梁的变形;滑轮是换向机构,把砝码垂直方向的重力转化为对悬臂梁的水平方向的拉力。悬臂梁一端约束,另

一自由端分别加载平面 x 、 y 方向的拉力,通过 CCD 和显微镜,读出变形,再利用 $K=F/\delta$ 计算 S 型悬臂梁的刚度。由于实验器材的欠缺, z 向刚度无法进行实验验证。图 7 中,斜线表示的是悬臂梁 x 向的理论刚度,点表示的是实测值,由图 7 可见,4 组实测值偏离理论曲线,表明理论刚度和实测值有一定差距,实测值均大于理论值,但相差不大。图 8 中, y 向刚度的实测值均匀地分布在理论曲线的 2 侧,且差距很小。

图 8 S型悬臂梁 y 向刚度实验值Fig. 8 Experimental results of stiffness for S-type micro-cantilever in y direction

5 结 论

本文利用能量法,即卡氏定理推导出了 S 型折叠悬臂梁 x 向、 y 向和 z 向的刚度计算公式。应用有限元法对理论公式进行了验证,和有限元法相比,公式计算值的相对误差分别为 0.67%、1.09%和 2.95%,均小于 3%。应用图像测位移法,通过实验对 S 型悬臂梁进行了 x 、 y 向的拉伸实验,实验值和理论值吻合,表明 S 型悬臂梁的计算公式推导合理,为该类型悬臂梁的设计和计算提供了理论依据。

参考文献:

- [1] 温诗铸. 微型机械与纳米机械学研究[J]. 现代科学仪器, 1998, 1(2): 24-27.
WEN SH ZH. Research on micro machine and nano mechanics [J]. *Modern Scientific Instruments*, 1998, 1(2): 24-27. (in Chinese)
- [2] 石然, 袁安萍, 苏岩. 硅微谐振式加速度计的实现及性能测试[J]. 光学精密工程, 2010, 18(12): 2583-

2589.

SHI R, QIU A P, SU Y. Implementation and experiments of micromechanical differential silicon resonant accelerometer [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2010, 18(12): 2583-2589. (in Chinese)

- [3] 陈光焱, 吴嘉丽, 赵龙, 等. 基于阿基米德螺旋线的低 g 值微惯性开关[J]. 光学精密工程, 2009, 17(6): 1257-1261.

CHEN G Y, WU J L, ZHAO L, et al.. Low- g mi-

- cro inertial switch based on Archimedes' spiral [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(6):1257-1261. (in Chinese)
- [4] 伞海生, 宋子军, 王翔, 等. 适用于恶劣环境的 MEMS 压阻式压力传感器 [J]. *光学精密工程*, 2012, 20(3):550-555.
SAN H SH, SONG Z J, WANG X, *et al.*. Piezoresistive pressure sensors for harsh environments [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(3): 550-555. (in Chinese)
- [5] ROBINSON C H. Compiler; US, 6314887B1[P]. 2001-11-13.
- [6] ROBINSON C H. Compiler; US, 006765160[P]. 2001-07-20.
- [7] 李华, 石庚辰. MEMS 平面微弹簧弹性系数的研究 [J]. *探测与控制学报*, 2005, 27(4):42-44.
LI H, SHI G CH. Study on the elastic coefficient of MEMS planar micro-spring [J]. *Journal of Detection & Control*, 2005, 27(4):42-44. (in Chinese)
- [8] 吴志亮, 常娟, 冯鹏洲, 等. 引信用 MEMS 平面微弹簧刚度分析 [J]. *南京理工大学学报(自然科学版)*, 2008, 32(2):140-143.
WU ZH L, CHANG J, FENG P ZH, *et al.*. Elastic coefficient analysis of MEMS planar microspring used in fuse [J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology (Natural Science)*, 2008, 32(2):140-143. (in Chinese)
- [9] DENNIS S. Greywall, Compiler; US, 0033598A1 [P]. 2006-02-16.
- [10] 蔡豪刚, 杨卓青, 丁桂甫, 等. 基于非硅衬底的微机电系统惯性开关的研制 [J]. *机械工程学报*, 2009, 45(3):156-161.
CAI H G, YANG ZH Q, DING G F, *et al.*. Development of a MEMS electrical inertia micro-switch based on non-silicon substrate [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(3):156-161. (in Chinese)

作者简介:



刘双杰(1980—),女,河南周口人,博士研究生,讲师,2007年于南京理工大学获得硕士学位,主要从事 MEMS 惯性器件设计、仿真和加工等方面的研究。
E-mail: shuangjieliu@126.com

导师简介:



郝永平(1960—),男,辽宁沈阳人,博士,教授,博士生导师,2004年于北京理工大学机械工程学院获得博士学位,主要从事信息化应用技术、微系统应用技术等方面研究。E-mail: yphsit@126.com

(版权所有 未经许可 不得转载)