

文章编号 1004-924X(2015)08-2250-08

# 模态方法下的悬臂梁/类悬臂梁 弹性构件的动力学建模

薛志鹏<sup>1,2</sup>, 厉明<sup>1</sup>, 贾宏光<sup>1</sup>, 罗泽勇<sup>1</sup>

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学, 北京 100039)

**摘要:**针对扁簧式起落架这一类悬臂梁弹性结构的弹性变形,提出了一种克服传统模态方法计算精度受限的模态旋转方法。首先,基于有限元理论中的小变形运动学分析推导出变形中旋转部分的表述方法。然后,总结了传统线性模态理论,提出了一种将旋转变形引入到模态坐标下动力学方程的方法,从而在结构动力学分析中引入旋转变形的影响,使模态方法适用于旋转变形较大的情况。最后,进行了扁簧式起落架静力学仿真及实验的对比验证。结果显示:在设计载荷 100 kg 范围内,两种模态方法都能保证 5% 以内的计算精度;但在极限载荷 180 kg 情况下,线性模态方法产生了超过 35% 的计算误差,而模态旋转方法仍能够保证 10% 以内的计算精度。仿真过程中两种模态方法的计算步长均为 1 ms。结果表明:与传统的模态方法相比,提出的模态旋转方法在相对旋转变形较大的情况下有更高的计算精度,同时保留了传统模态方法计算效率高的优点。

**关键词:**弹性变形;悬臂梁;弹性构件;模态叠加法;有限元法;扁簧式起落架

中图分类号:V279;V215.3 文献标识码:A doi:10.3788/OPE.20152308.2250

## Modal method based dynamic analysis of cantilever type elastic structures

XUE Zhi-peng<sup>1,2</sup>, LI Ming<sup>1</sup>, JIA Hong-guang<sup>1</sup>, LUO Ze-yong<sup>1</sup>

(1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;*

2. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)*

\* *Corresponding author, E-mail: xuezhipeng1314@126.com*

**Abstract:** For the elastic deformation of cantilever type elastic structures in a flat spring landing gear, a new modal warp method was proposed to improve the calculation precision of the traditional modal method. Firstly, the description of a rotational component in infinitesimal deformation was deduced based on the finite element theory. Then the general modal method was summarized and how to introduce the rotational deformation into the dynamic equation in a modal coordinate was proposed. By which, the rotational deformation was introduced into the analysis of structure dynamics, so that the modal method could simulate the large bending and/or twisting deformation. Finally, the static simu-

收稿日期:2014-09-30;修订日期:2014-11-12.

基金项目:中国科学院知识创新工程国防科技创新基金资助项目(No. YYYJ-1122)

lation and experiments were performed and compared on the flat spring landing gear. The analysis results show that when the load mass is less than 100 kg, the relative errors are below 5% for both the linear modal method and modal warping method. However, when the load reaches to 180 kg (which represents the maximum realistic condition for landing), the error of the modal warp method remains within 10% and the error of linear modal has been more than 35%. Moreover, the time steps of both modal methods are 1 ms. As compared with the traditional method, the modal warping method provides higher calculation and efficiency in the simulation of large rotational deformation.

**Key words:** elastic deformation; cantilever; elastic structure; modal superposition; Finite Element Method(FEM); leaf spring landing gear

## 1 引言

无人机在每个飞行阶段机上各部件都会产生不同程度的变形,如飞行过程中复合材料机翼在空气动力作用下的变形以及滑跑过程中扁簧式起落架的压缩变形等。小型无人机普遍采用的扁簧式起落架与其它支柱式起落架不同<sup>[1]</sup>,其通过空间变形起到缓冲吸能的作用<sup>[2]</sup>。所以,传统的单方向弹簧阻尼模型并不能有效地模拟其性能。与此同时,各学科独立进行飞行器动态特性分析的传统方法已不能满足飞行器自动控制、实时飞行仿真以及性能分析等需求。因此,通过结构动力学分析为飞行力学、空气动力学、气动弹性力学以及现代控制理论等系统提供兼顾计算准确性和效率的弹性变形模型变得更加重要<sup>[3-5]</sup>。

将弹性构件等效为连续统一集合的有限元方法是建立弹性模型的一种普遍方法,它通过计算单元节点的弹性应变来获得节点的变形量<sup>[6,7]</sup>。Green 应变张量是一种计算精度较高的弹性应变计算方程,其同时包含了应变中的线性项和非线性项,是大变形情况下普遍采用的求解方法。但由于非线性因素影响,其方程解算代价大,计算效率低,使 Green 方法在仿真实验中的应用受到限制。模态方法针对应变张量中的线性部分,它使用缩减后的模态数据来线性表述变形量。由于经模态坐标变换后其构件的振动微分方程组被解耦为单自由度的线性振动微分方程,所以模态方法具有计算效率高,占用 CPU 资源少等优点,目前已被广泛应用于弹性计算以及实时仿真中<sup>[8,9]</sup>。然而,在构件弯曲或扭转变形较大的情况下,模态方法可能会产生相对较大的计算误差,甚至会得到不真实的结果。这是因为模态方法只针对变形

中的线性部分,忽略了旋转变形部分,而旋转变形对于动力学解算的影响会随着弯曲或扭转变形幅度的不断增大而增大,以至于在这些情况下旋转变形的影响不能被忽略。

目前,对于弹性变形建模方法的研究一直围绕着提高模型的计算速度或提高模型的计算精度<sup>[10,11]</sup>上。Shabana<sup>[12]</sup>将小变形情况下的位移梯度分解为应变和旋转两部分,应变部分表征了有限元节点的位移量,旋转部分代表单元的平均旋转量。Bae 等人<sup>[13]</sup>通过考虑刚度矩阵中的非线性因素,提出了改进的模态综合方法,以此来提高模态方法的计算精度。Muller 等人<sup>[10]</sup>根据局部旋转张量来计算节点旋转矩阵,以此来对刚度矩阵进行旋转,获得了快速稳定的线弹性模型,同时也避免了大变形情况下计算失真的缺陷。Ngan 等人<sup>[14]</sup>将刚度旋转方法应用于 6 面体等更为复杂的非线性有限单元模型。

针对扁簧式起落架这一类悬臂梁弹性结构在着陆冲击过程中可能会产生较大的弹性变形,本文提出一种克服传统模态方法计算精度局限性的模态旋转方法。该方法与刚度旋转方法类似,将线弹性理论中忽略的旋转部分加入弹性变形的计算中,与之不同的是刚度旋转是在物理坐标下建立方程,而本方法则是基于模态坐标方程。

## 2 小变形运动学分析

连续介质发生弹性变形时,其体内点与点之间的相对位置会发生变化,导致整个连续介质的体积或形状发生变化。这种变化可利用两种构形上对应点的距离变化求得。

### 2.1 变形运动分解

定义点  $P_0$  为未变形状态下变形体上任一

点,其坐标向量为  $\boldsymbol{x}$ 。变形后,变形体形状域由  $B_0$  变为  $B$ , 点  $P_0$  经过位移向量  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$  移动到点  $P$ ,如图 1 所示。

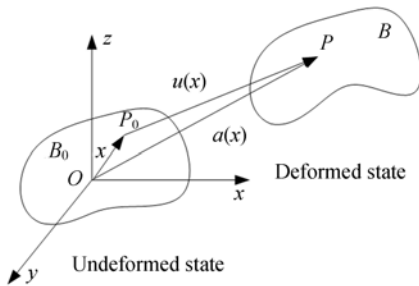


图 1 小变形运动分析

Fig. 1 Kinematics of infinitesimal deformation

由图 1 可知,变形后点  $P$  的坐标向量  $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$  为:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \quad (1)$$

两边对坐标  $\boldsymbol{x}$  求导,得到:

$$d\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}, \quad (2)$$

其中:  $\nabla$  是带有矢性微分性质的哈密顿算子:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}. \quad (3)$$

位移  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$  是一阶张量(矢量),坐标  $\boldsymbol{x}$  也是一阶张量,因此位移梯度  $\nabla \boldsymbol{u}$  是二阶张量。 $\nabla \boldsymbol{u}$  的分量形式为:

$$\epsilon'_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (4)$$

其中:当下标相同时,如线应变  $\epsilon'_{11}, \epsilon'_{22}, \epsilon'_{33}$  代表某方向的相对伸长(缩短)量。下标不同时,如角应变  $\epsilon'_{12}, \epsilon'_{13}, \epsilon'_{21}, \epsilon'_{23}, \epsilon'_{31}, \epsilon'_{32}$  代表产生的转角。一般情况下,角应变  $\epsilon_{ij} \neq \epsilon_{ji}$ , 因此上述的位移梯度张量  $\nabla \boldsymbol{u}$  并不是对称张量。可以按照二阶张量的分解性质,将上述位移梯度张量分解成对称项和反对称项两部分之和,则位移分量为:

$$\nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (5)$$

其中:  $\boldsymbol{\epsilon}$  为对称张量,  $\boldsymbol{\omega}$  为反对称张量,具体表达式为:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中:  $2\epsilon_{ij} = 2\epsilon_{ji} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}$ ,  $2\omega_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ji} = -2\omega_{ji}$ 。 $\boldsymbol{\epsilon}$  代表应变张量,  $\boldsymbol{\omega}$  代表旋转张量。

## 2.2 旋转向量

根据旋度的定义,节点的旋转向量能够表示为:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{u}, \quad (8)$$

从而旋转张量  $\boldsymbol{\omega}$  可以表示为如下形式:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^T) = \frac{1}{2} (\nabla \times \boldsymbol{u}) \times = \boldsymbol{\omega} \times, \quad (9)$$

其中:  $\boldsymbol{\omega} \times$  表示向量  $\boldsymbol{\omega}$  的反对称矩阵。

将式(5)和(9)代入(2),得到:

$$d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon} d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{x}, \quad (10)$$

变形体上任一点  $P$  的位移可分解为三部分:刚体的平动位移  $d\boldsymbol{x}$ , 变形引起的位移  $\boldsymbol{\epsilon} d\boldsymbol{x}$  以及变形引起的转动  $\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{x}$ 。其中,转动的角度为转动向量  $\boldsymbol{\omega}$  的模  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ , 转动方向为  $\boldsymbol{\omega} / \|\boldsymbol{\omega}\|$ 。

## 3 模态方法理论

### 3.1 线性模态方法

模态分析技术从 20 世纪 60 年代后期发展至今已趋于成熟,在文献[15]中有详细论述。对于任意连续构件经过有限元离散后,得到系统的二阶微分方程为:

$$\boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \quad (11)$$

其中:  $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$  分别为系统的质量, 阻尼和刚度矩阵,  $\boldsymbol{u}$  是  $n$  维节点的位移向量,  $\boldsymbol{f}$  为节点外力向量。一般情况下,矩阵  $\boldsymbol{M}$  和  $\boldsymbol{K}$  不是对角矩阵,所以式(11)是耦合的微分方程组。进一步对式(11)进行模态坐标变换:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}(t), \quad (12)$$

其中:  $\boldsymbol{\eta}(t)$  为模态坐标,  $\boldsymbol{\Phi}$  表示模态矩阵,在该矩阵中第  $i$  列  $\boldsymbol{\Phi}_i$  代表了  $i$  阶模态的振型。

将模态坐标系代入振动微分方程,并左乘  $\boldsymbol{\Phi}^T$  得到:

$$\boldsymbol{M}_q \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{C}_q \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{K}_q \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{Q}, \quad (13)$$

其中:

$$\boldsymbol{M}_q = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{K}_q = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\omega_i^2), \quad (15)$$

$$\boldsymbol{C}_q = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\Phi}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{f}. \quad (17)$$

阻尼矩阵通常采用比例阻尼  $\boldsymbol{C}_q = \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\omega}$  或者 Rayleigh 阻尼  $\boldsymbol{C}_q = (\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega})$  近似。经模态坐标

变换后式(13)中  $\mathbf{M}_q, \mathbf{C}_q, \mathbf{K}_q$  均为对角矩阵,使得系统由多自由度耦合方程组变成单自由度方程组,每一个解耦后的方程都代表系统某一振动模式下的运动,能够独立求解出对应模式下的模态坐标,再通过模态线性叠加得到物理坐标下的位移量。

### 3.2 模态缩减

构件经模态分析后会得到与系统自由度数目相同的固有频率和振型。工程上通过模态截断来简化模型,进一步提高模型的计算效率。式(11)的计算精度主要取决于所使用的频率范围,而模型包含的模态阶数越多所需的计算量越大,模型中包含的固有频率越高,所能够设置的仿真步长就越小,这些都不利于提高模型仿真速度。所以,应在保证精度的条件下尽可能地对模型进行缩减。通过对构件柔性模型进行频率响应分析,根据外力输入与变形量输出之间的幅值响应  $y(s)/u(s)$  来确定在指定系统输入条件下,各阶模态对于目标节点位移响应的贡献程度,并根据响应幅值大小进行模态截断。

## 4 模态旋转

### 4.1 旋转量求解方法

#### 4.1.1 单元旋转向量

由文献[6]可知,对于四面体、六面体等单元

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中:  $N_i$  表示单元  $e$  中节点  $i$  的插值函数。

为了得到四面体单元的插值函数,引入体积坐标公式。如图 2 所示,四面体中任一点  $P$  与其余 4 个节点相连构造出 4 个子四面体。以原三角形面的角码来命名此 4 个子四面体的体积,分别为  $V_{p123}, V_{p124}, V_{p134}, V_{p234}$ ,原四面体单元  $e$  的体积为  $V_{1234}$ 。则  $P$  点在四面体中的相对位置可由子体积与总体积之比来确定:

$$L_1 = \frac{V_{p234}}{V_{1234}}, L_2 = \frac{V_{p134}}{V_{1234}}, L_3 = \frac{V_{p124}}{V_{1234}}, L_4 = \frac{V_{p123}}{V_{1234}}. \quad (23)$$

根据体积坐标与直角坐标的转换关系,以及体积坐标的特点可得:

其单元内任意一点的位移可以通过单元节点的位移线性插值得到:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}_e(x) \mathbf{u}_e, \quad (18)$$

代入式(8)有:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \times) \mathbf{N}_e(x) \mathbf{u}_e = \mathbf{W}_e \mathbf{u}_e, \quad (19)$$

其中:  $\mathbf{N}_e(x)$  为单元的线性位移插值函数,  $\mathbf{u}_e$  为节点位移且  $\mathbf{u}_e = [\mathbf{u}_{e,1}^T | \dots | \mathbf{u}_{e,k}^T]$ ,  $k$  为单元节点个数。  $N_e(x)$  是坐标  $x$  的线性函数,所以,  $\mathbf{W}_e$  是常值矩阵。所以,包含所有单元  $\mathbf{W}_e$  矩阵的  $\mathbf{W}$  矩阵可在前处理阶段中计算得到,由上式及式(5)有

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{W} \mathbf{u}(t) = \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{q}(t). \quad (20)$$

可在模态坐标下计算得到旋转向量,因此  $\boldsymbol{\Psi}$  也称为模态旋转矩阵。与此同时矩阵  $\mathbf{W}$  和  $\boldsymbol{\Phi}$  均可在前处理阶段得到,从而模态旋转矩阵也可在前处理阶段获得,减少了程序循环过程中的计算量。旋转向量  $\boldsymbol{\omega}(t)$  表征的是单元平均旋转量,可以通过对共用一个节点的所有单元的旋转向量进一步求平均值得到该节点的旋转向量。

#### 4.1.2 建立 $\mathbf{W}$ 矩阵

由式(20)可知:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \times) \mathbf{N}(x), \quad (21)$$

以四面体单元为例,单元  $e$  的 4 个节点位移为  $\mathbf{u}_e = [\mathbf{u}_{e,1}^T | \mathbf{u}_{e,2}^T | \mathbf{u}_{e,3}^T | \mathbf{u}_{e,4}^T]$ ,其中  $i$  节点的位移为  $\mathbf{u}_{e,i}^T = [x_i, y_i, z_i]^T$ ,四面体单元的形函数  $\mathbf{N}_e(x)$  为:

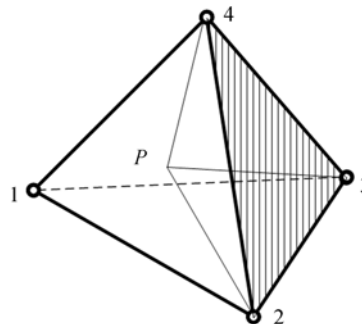


图 2 四面体单元  
Fig. 2 Tetrahedral element

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

可知,体积坐标与三角形单元的插值函数完全相同,表明位移插值函数可以用体积坐标表示  $N_i = L_i$ 。代入式(24)得到节点  $i$  的  $W_i$  矩阵

$$W_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_1 \\ L_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

组装单元  $e$  各节点的  $W_i$  矩阵得到该单元的  $W$  矩阵为:

$$W_e = [W_1, W_2, W_3, W_4] \quad (26)$$

#### 4.2 考虑旋转变形的模态坐标方程

为了进一步在弹性变形方程的解算中引入旋转变形的影响,建立了一个局部坐标系用于测量

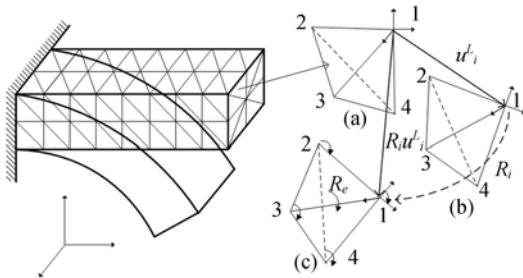


图 3 单元旋转变形示意图

Fig. 3 Rotation of element deformation

节点相对于全局坐标系的旋转量。如图 3 所示,全局坐标系下的节点位移向量  $u$  可以通过计算局部坐标系下的位移向量  $u^l$ ,再经过旋转得到。定义  $R(t)$  为局部坐标系相对全局坐标系的旋转矩阵,则位移向量  $u$  可表示为:

$$u(t) = R(t) u^l(t) = R(t) \Phi \eta^l(t) \quad (27)$$

其中:  $u^l$  为局部坐标系下的节点位移向量,即  $u^l$  为节点的相对伸长/压缩位移,  $\eta^l(t)$  为与其对应的局部模态坐标。

在刚度旋转方法<sup>[10]</sup>中,弹性力的计算是基于节点的伸长/压缩位移,再将得到的弹性力使用节点旋转矩阵旋转回全局坐标系,从而将旋转因素影响引入动力学方程。与之类似,将局部坐标系

作为非旋转系统,首先使用  $R^{-1}$  将全局坐标系下的式(13)旋转至局部坐标系计算位移向量。然后再将局部位移量通过旋转矩阵  $R$  旋转回全局坐标系。在此过程中,由于局部坐标系和全局坐标系在未变形状态下相互重合,所以在局部坐标系中质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵保持不变,而外力则变为  $R^{-1} f$ ,根据旋转矩阵的性质:

$$R^T = R^{-1} \quad (28)$$

考虑旋转变形的模态坐标方程为:

$$M_q \ddot{\eta} + C_q \dot{\eta}^l + K_q \eta^l = \Phi^T R^T f \quad (29)$$

其中:旋转矩阵的构造基于 Rodrigues 公式为:

$$R = [I + \tilde{v} \sin \theta + 2 \tilde{v} \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \tilde{v}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}]. \quad (30)$$

式中:单位向量  $v = \omega(t) / \|\omega(t)\|$  定义了旋转方向,角度  $\theta = \|\omega(t)\|$  定义了旋转量。

### 5 仿真与实验

使用有限元分析软件 Nastran 对构件进行模态分析,模态频率和振型被保存在 .f06 结果文件中。节点信息和单元信息等被保存在 .bdf 文件中,这些有限元网格数据被用于在 Matlab 中进行图形化显示建模,以及构造扁簧的  $W$  矩阵。使用 ODE 算法求解模态坐标下的微分方程。

扁簧式起落架由碳布、玻璃方格布、玻璃预浸料铺层制造而成。通过有限元模态分析获得的部分模态数据结果如表 1 和图 4 所示。

表 1 起落架固有频率

Tab. 1 Natural frequency of landing gear (rad/s)

Modes	Frequency	Modes	Frequency
1	107	7	1 927
2	322	8	2 945
3	494	9	3 393
4	641	10	3 453
5	1 261	11	3 849
6	1 294		

定义竖直方向为  $Z$  方向,侧向为  $Y$  方向。对扁簧弹性模型在轮胎与扁簧连接处进行竖直输入与竖直输出频响分析,以及竖直输入与侧向输出频响分析,结果如图 5 所示。随着频率的增大,响应幅值减小,但在某些频率共振区域,响应幅值仍

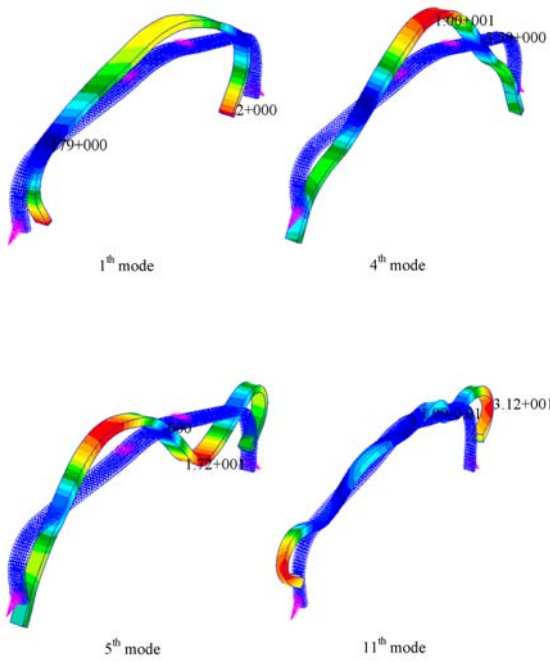


图 4 扁簧模态振型

Fig. 4 Mode shapes of leaf spring

存在区域峰值,如 11 阶模态的响应幅值与 7 阶的响应幅值接近。进行模态截断时,要保留这些区域峰值。与此同时,11 阶的模态响应幅值是 1 阶模态幅值的  $10^{-3}$  倍,远小于 1 阶模态幅值。所以在 11 阶模态处进行频率截断。

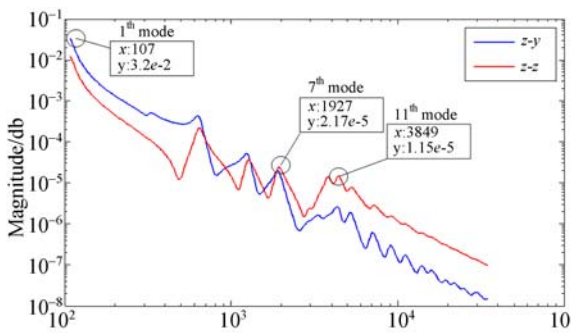


图 5 扁簧频率响应

Fig. 5 Frequency response of leaf spring

扁簧静力学实验如图 6 所示,将扁簧顶端固定,两端逐步加载,记录扁簧端点的竖直位移和侧向位移。首先初始载荷从 20 kg 加载到设计载荷 100 kg,然后继续加载到极限载荷 180 kg。

使用前 11 阶模态数据分别基于线性模态方法和模态旋转方法建立了扁簧式起落架的弹性变

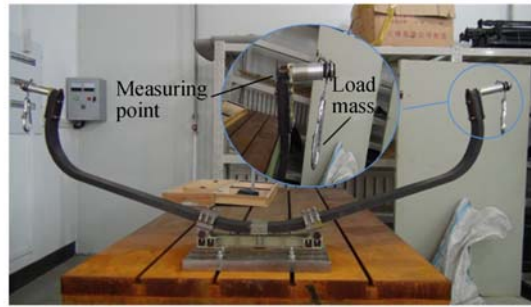


图 6 起落架静力学实验

Fig. 6 Static test of landing gear

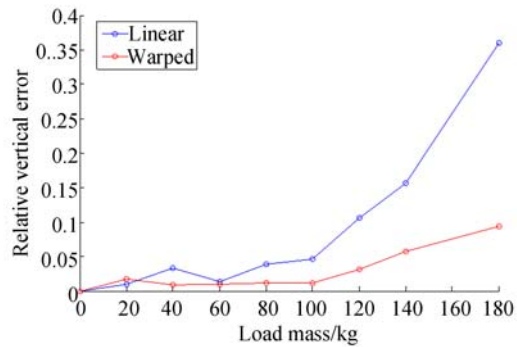
形模型。以左端点为例,其竖直位移的仿真结果与实验记录如表 2 所示。

表 2 起落架端点竖直位移结果

Tab. 2 Vertical displacement of landing gear(mm)

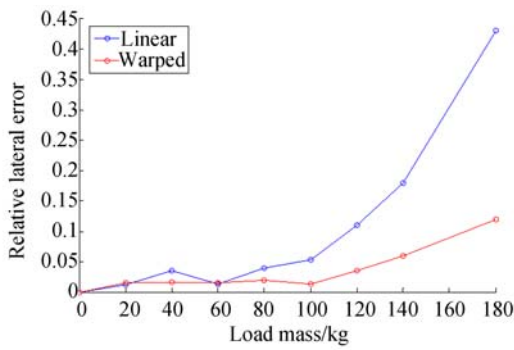
Method	Load mass/kg							
	20	40	60	80	100	120	140	180
Linear	10.16	20.33	30.48	40.64	50.80	60.96	71.13	91.44
Warped	10.08	20.84	30.36	39.60	49.11	56.83	65.00	73.57
Test	10.26	21.02	30.06	39.14	48.56	55.12	61.48	67.24

图 7 所示为两种方法的计算结果相对于实验记录结果在竖直方向和侧向方向上的计算误差。在载荷小于设计载荷 100 kg 时,线性模态和旋转模态方法均能够保持在 5% 以内的计算误差。继续加载线性模态产生了明显的计算误差,而旋转模态方法即使在极限载荷 180 kg 的情况下仍能保证 10% 以内的计算误差。仿真过程中两种方法的仿真步长均设置为 1 ms,说明模态旋转方法保留了线性模态方法计算效率高的优点。



(a) 竖直位移误差

(a) Vertical error



(b) 侧向位移误差

(b) Lateral error

图 7 扁簧静力学误差分析

Fig. 7 Error analysis of static test

## 6 结 论

本文通过将变形中的旋转部分以节点旋转矩

### 参考文献:

- [1] 吴大方,赵星,贺小帆,等.飞机起落架落震试验中机轮水平冲击载荷测量方法的研究[J].机械强度,2010,32(5):729-734.  
WU D F, ZHAO X, HE X F, *et al.*. Study on measurement method of horizontal impact load in aircraft landing gear drop test [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2010, 32(5): 729-734. (in Chinese)
- [2] 薛志鹏,贾宏光,厉明,等.扁簧式起落架柔性变形的实时状态空间描述[J].光学精密工程,2014,22(5):1233-1250.  
XUE ZH P, JIA H G, LI M, *et al.*. Real time description of flexible deformation for leaf spring landing gear by state space method [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(5): 1233-1250.
- [3] 王忠素,翟岩,梅贵,等.空间光学遥感器反射镜柔性支撑的设计[J].光学精密工程,2010,18(8):1833-1841.  
WANG ZH S, ZHAI Y, MEI G, *et al.*. Design of flexible support structure of reflector in space remote sensor [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2010, 18(8): 1833-1841.
- [4] 刘铸永.刚-柔耦合系统动力学建模理论与仿真技术研究[D].上海:上海交通大学,2008.  
LIU ZH Y. *Study on Modeling Theory and Simulation Technique for Rigid-Flexible Coupling Systems Dynamics* [D]. Shanghai: Graduate University of the Shanghai Jiao Tong University, 2008. (in Chinese)
- [5] 厉明,纪勇,贾宏光,等.基于快速仿真原型的飞行器半物理仿真系统[J].光学精密工程,2008,16(10):1949-1955.  
LI M, JI Y, JIA H G, *et al.*. Hardware-in-closed-loop simulation system for aircraft based on rapid simulation prototype [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(10): 1949-1955. (in Chinese)
- [6] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2011.  
WANG X C. *Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011. (in Chinese)
- [7] ROBERT D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* [M]. New York: John Wiley & Sons, 2007.
- [8] HAUSER K K, SHEN C, O'BRIEN G F. Interactive deformation using modal analysis with constraints [J]. *In Proc. Graphics Interface*, 2003: 247-255.
- [9] 李建微,陈国栋,等.虚拟针灸系统中的人体皮肤变形研究与实现[J].系统仿真学报,2010,22(3):656-659.  
LI J W, CHEN G D, *et al.*. Research and realization on skin deformation for virtual acupuncture system [J]. *Journal of System Simulation*, 2010, 22(3): 656-659.

- 656-659. (in Chinese)
- [10] MÜLLER M, DORSEY J, MCMILLAN L, *et al.*. Stable real-time deformations[J]. *In Proc. Acm Siggraph, Symposium on Computer Animation*, 2002 :49-54.
- [11] BAE D H, LEE C H, BAE D S. Non-linear flexible body analysis for mechanical systems [J]. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2012, 7(26) : 2159-2162.
- [12] SHABANA A A. *Dynamics of Multibody Systems* [M]. UK : Cambridge University Press, 2005.
- [13] BAE D H, LEE C H, BAE D S. Non-linear flexible body analysis for mechanical systems [J]. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2012, 7(26) : 2159-2162.
- [14] NGAN W, JOHN E L. *Efficient deformable body simulation using stiffness-warped nonlinear finite elements* [M]. London: Chapman & HALL/CRC, 2000.
- [15] MICHAEL R H. *Vibration simulation using Matlab and ANSYS* [M]. Chapman & Hall/CRC, 2001.

## 作者简介:



薛志鹏(1988-)男,内蒙古呼伦贝尔人,博士研究生,2010年于武汉理工获得学士学位,主要从事无人机地面精确建模与控制等方面研究。E-mail: xuezhipeengss1314@126.com

## 导师简介:



贾宏光(1971-)男,黑龙江五常人,研究员,博士生导师,1994年于哈尔滨工业大学获得学士学位,1997年于长春光机学院获得硕士学位,2000年于长春光机所获得博士学位,主要从事复合制导及目标识别技术研究。E-mail: jiahg@ciomp.ac.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)