

文章编号 1004-924X(2015)10-2962-09

## 共面点的摄像机非线性畸变校正

叶 峰\*, 王 敏, 陈剑东, 洪 峥, 赖乙宗  
(华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:**采用传统的 Tsai 两步法进行摄像机标定时, 标定精度会受一阶径向畸变模型的限制。本文提出了一种同时考虑摄像机镜头径向畸变和切向畸变的摄像机模型并研究了模型求解方法来提高畸变校正精度。考虑图像中心区域畸变较小, 故用中心附近点列出线性方程组计算了摄像机的部分参数; 建立了综合畸变模型, 将摄像机参数代入模型计算畸变参数的初始值。由于焦距和平移分量在标定板与相机平面的距离深度变化不够时难以一次性准确标定, 故将其代入综合畸变模型重新计算, 并运用两步迭代法逐步逼近精确解。最后, 对世界坐标系进行空间几何变换、透视变换和成像变换得到的重投影图像的像素坐标与实际测得的像素坐标值进行比较, 得到校正误差。结果表明, 本文的畸变校正方法平均像素误差可以达到 0.114 9 pixel, 优于 Tsai 校正方法的 0.367 0 pixel, 且重复性较好。

**关键词:**摄像机标定; 切向畸变; 非线性畸变; 畸变校正; Tsai 方法; 迭代计算

**中图分类号:** V447.3; TP391.4 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20152310.2962

## Camera nonlinear distortion correction based on coplanar points

YE Feng\*, WANG Min, CHEN Jian-dong, HONG Zheng, LAI Yi-zong

(College of Mechanical & Automotive Engineering, South China University of  
Technology, Guangzhou 510640, China)

\* Corresponding author, E-mail: mefengye@scut.edu.cn

**Abstract:** When traditional Tsai two-stage technique is used to calibrate a camera, its calibration accuracy will be limited by first-order radial distortion model. Therefore, a camera imaging model considering both radial distortion and tangential distortion is proposed, and a new method to solve the model is presented to improve the distortion correction accuracy. As the center of an image has a smaller distortion, the image center points are used to give a linear equation group and to calculate a part of parameters of the camera. Then camera parameters are taken into comprehensive distortion model to derive the initial values of distortion coefficients. As focal length and matrix's translation value can not be calculated directly when the calibration board's depth variation is small, the values have to be retaken to model and to be calculated. Then the converged solution is approached by two-stage iterative computation. Finally, the world coordinate system is converted by space geometric transform, perspective transform and imaging transform to obtain the pixel coordinate of the reprojective image. The calibration error is obtained by calculating the mean difference between re-projection pixel coordinates and actual measured pixel coordinates of each point. Experimental result indicates that the calibration

**收稿日期:** 2015-06-10; **修订日期:** 2015-08-02.

**基金项目:** 广东省省部产学研合作专项资金资助项目 (No. 2012A090300013); 广东省教育部产学研结合项目 (No. 2012B091100139); 广东省科技计划资助项目 (No. 2012B011300045)

method can offer the accuracy of 0.1149 pixel, which is better than Tsai's 0.3670 pixel with well repeatability.

**Key words:** camera calibration; tangential distortion; nonlinear distortion; distortion correction; Tsai two-stage technique; iterative computation

## 1 引言

图像处理在精密、超精密机器视觉领域中的广泛应用对摄像机的标定精度提出了更高的要求。然而,由光学镜头组、CCD(Couple Charged Device)传感器和图像采集电路等引起的图像几何畸变的存在限制了精度的提高,因此,解决摄像机的几何畸变成为高精度机器视觉应用中的关键问题。摄像机标定是通过确定摄像机的内部光学特性参数(包含针孔模型的参数和畸变模型的参数)和其相对标定板在三维世界中的位姿参数(外部参数)来确立物体在三维空间的表示和在计算机帧存空间的表示之间的对应关系的。摄像机标定结果的精度关系到整个机器视觉系统的精度,因此一直受到国内外学者的普遍关注。

目前,摄像机标定方法基本成熟,但各种标定方法的特点不同,它们适用的场合也不尽相同。传统的标定方法一般采用参数化的摄像机模型,参数化标定方法要求解出摄像机的全部内外部参数。Tsai<sup>[1]</sup>根据标定板是否共面,先用直接线性变换法或透视变换法求解出摄像机的大部分外部参数,并得到非线性优化参数的初始值,然后考虑径向畸变的影响,经过优化搜索得到目标函数的最小参数值。Martins<sup>[2]</sup>等提出双平面摄像机模型,通过把模型中的线性参数与非线性参数转换成一些中间参数,求解线性方程即可完成摄像机的标定。张正友等<sup>[3]</sup>采用 2D 靶标完成摄像机的标定,其假定在移动摄像机的过程中,相机的内部参数不变,通过移动摄像机的位置,拍摄多组平面靶标就可以计算摄像机参数。另有很多学者在传统标定方法的基础上或根据应用场合的不同对传统标定方法进行改进,或颠覆传统的参数化建模思想,提出非参数化建模方法。徐杰等<sup>[4]</sup>在 Tsai 两步法的基础上,建立了摄像机外部参数和内部参数的混合计算模型,采用两步迭代方法逐步逼近精确解。苏成志等<sup>[5]</sup>根据摄像机拍摄同一物面图像畸变参数为定值,提出使用有畸变的网格

板图像作为校正基准,来完成待测物体上任意两点的实际线性测度,该方法可以计算复杂的摄像机参数。胡浩等<sup>[6]</sup>先采用理想透视模型标定摄像机参数,再用样条曲面函数拟合图像重投影误差的方法建立畸变校正场,用于校正成像畸变复杂的显微光学系统。兰海滨等<sup>[7]</sup>用 SAS 算法提取出棋盘格的高精度角点后,建立多项式变换模型,再结合双线性插值技术得到畸变图像与标准棋盘格的对应关系,并完成校正。根据从不同视角上采集到的图像中同名像点共面的理论,张征宇等<sup>[8]</sup>提出一种摄像机非线性畸变自校正的方法,其无需使用标定板即可完成畸变校正。王飞等<sup>[9]</sup>在红外激光的光斑参数测量中,直接用实验方法测量焦平面阵列的实际响应曲线,再用多项式拟合得到焦平面阵列的非线性校正曲线。朱伟东等<sup>[10]</sup>从圆孔标定板由于透视畸变产生的不对称投影中提取出蕴含的信息,计算出了投影变换矩阵,进而获得相机内参数。

为了提高校正精度,本文在建立畸变模型时,考虑了镜头的径向畸变和切向畸变。首先根据图像中间区域畸变较小的性质,计算出摄像机针孔模型的参数。再通过引入全局视图,计算畸变参数的初值。考虑当光轴与物面的垂直度较高时,针孔模型的镜头焦距  $f$  和平移矩阵的  $T_x$  分量相关性较大<sup>[11]</sup>,难以一次准确标定,本文将畸变参数初值代入模型,并假定其他对计算精度影响不大的参数为定值,仅将  $f$  和  $T_x$  作为变量,采用两步迭代方法逐步逼近畸变参数的精确解。该方法只需求解线性方程,无需对畸变参数进行非线性优化,且在两步迭代过程中,只将焦距  $f$  和平移矩阵的  $T_x$  分量作为单步迭代变量,故降低了计算方法的空间复杂度。

## 2 摄像机模型

### 2.1 标定中的几种坐标系

像素坐标系:计算机中存储的图像信号是离散的数字信号,以像素为单位。对图像采样时,若

每行为  $M$  个像素, 每列为  $N$  个像素, 则图像由一个  $M \times N$  的矩阵组成, 矩阵中每个元素的值就是该像素点的灰度。在像素坐标系中, 用  $(u, v)$  表示每个像素点的位置。

图像坐标系: 像素坐标系中的  $(u, v)$  仅表示计算机图像中的像素点在二维矩阵中的位置, 因此, 它在物理世界中没有实际意义。然而, 通过图像上像素点横向和纵向间的距离参数可以建立以物理单位 (mm) 表示的图像坐标系。

摄像机坐标系: 摄像机坐标系的原点为光心,  $x$  轴和  $y$  轴分别与图像坐标系的横纵轴平行,  $z$  轴为摄像机光轴, 与图像平面垂直。摄像机坐标系可以通过世界坐标系的旋转和平移变换得到。

世界坐标系: 在环境中选择一个任意的坐标系来表示摄像机的位置, 称为世界坐标系。通常建立的世界坐标系要便于表示待标定物。

## 2.2 针孔摄像机模型

在理想的摄像机模型中, 透镜是理想的小孔。光照射到物体上, 物体反射的光经过小孔成直线传播投影到成像平面上。这种不存在透镜畸变的模型称为针孔摄像机模型。理想的针孔透视变换模型如图 1 所示。

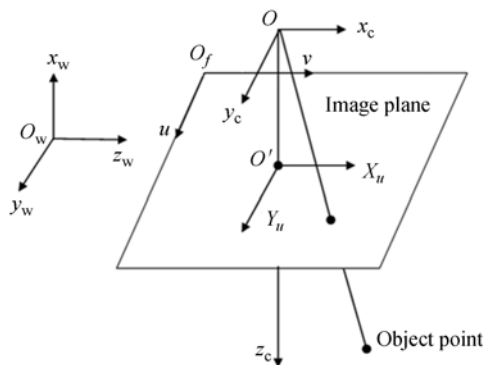


图 1 理想针孔模型

Fig. 1 Ideal model of pin-hole camera

图 1 中, 设在世界坐标系中某点的坐标为  $(x_w, y_w, z_w)$ , 该点经过旋转平移变换后在摄像机坐标系中的坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ 。摄像机坐标系的原点为摄像机的光学中心 (图中  $O$  点),  $z_c$  轴与摄像机光轴重合。图像坐标系的原点为摄像机光轴与图像平面的交点, 且坐标平面平行于摄像机坐标系平面。三维世界中的物体成像过程用数学语言描述就是几个坐标系的变换过程, 主要包括: 从

世界坐标系到摄像机坐标系的旋转和平移变换; 从摄像机坐标系到图像坐标系的透视变换和从图像坐标系到计算机帧存图像像素坐标系的成像变换<sup>[12]</sup>。

摄像机坐标系与世界坐标系的运动转换关系表示如式 (1):

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} + \mathbf{T}, \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix}$  表示旋转变换,  $\mathbf{T} = (T_x$

$T_y \quad T_z)^T$  表示平移变换。

定义  $O'X_uY_u$  平面为成像平面, 则摄像机坐标系中的空间点与成像平面间透视对应成比例, 设空间点在成像平面上的坐标为  $(X_u, Y_u)$ , 则有:

$$X_u = f \frac{x_c}{z_c}, \quad Y_u = f \frac{y_c}{z_c}, \quad (2)$$

式中:  $f$  为焦距, 结构上描述为摄像机的光心到 CCD 成像平面的距离。

由图像坐标系与像素坐标系的对应关系可得:

$$\begin{cases} u = N_x \cdot X_d + u_0 \\ v = N_y \cdot Y_d + v_0 \end{cases}, \quad (3)$$

式中:  $N_x, N_y$  分别表示图像平面上横向、纵向每单位长度的像素数 (pixel/mm), 由相机生产厂商给出, 一般认为, CCD 相机的横纵向的单位长度像素数相等。  $(u_0, v_0)$  是像素坐标系的中心, 一般认为是图像坐标系的原点在像素坐标系中的投影点对应的像素坐标。 Tsai 指出<sup>[1]</sup>, 若  $u_0, v_0$  的变化在 10 pixel 以内, 则系统的标定精度相差不大。本文采用相机分辨率的一半作为图像中心而不做过多标定。

## 2.3 实际摄像机模型

相机拍摄物体成像时, 由透镜的固有结构造成的摄像机镜头的畸变无法避免。光线通过透镜折射成像的过程中, 物体的反射光通过透镜, 在相机的感光部件中形成缩小的倒像。光线在光心位置成直线传播, 而在光线与光心的光轴线距离较远的位置, 透镜造成的折射效果明显, 这就造成了镜头畸变<sup>[13]</sup>。理想的镜头畸变是由透镜结构的固有失真造成的, 实际上, 镜头加工质量和精度不同, 镜头畸变也不同。这表现为厂商提供的镜头

并非是理想平滑的透镜模型,且在镜头安装过程中,由于人为操作的影响,相机的安装位置也不可能完全理想,这些都使得镜头的畸变更加随机。综上所述,线性摄像机模型不能精确描述成像几何关系,考虑畸变的非线性摄像机模型可用式(4)描述:

$$\begin{cases} X_u = X_d + \delta_x(X_d, Y_d) \\ Y_u = Y_d + \delta_y(X_d, Y_d) \end{cases}, \quad (4)$$

其中: $(X_u, Y_u)$ 为由小孔线性模型计算得到的图像坐标理想值。 $(X_d, Y_d)$ 是实际的图像坐标。 $\delta_x, \delta_y$ 分别是在横向和纵向上的非线性畸变值,它与点在图像中的位置有关。通常,畸变包括径向畸变、偏心畸变和薄透镜畸变。

在考虑畸变的摄像机模型中,实际图像坐标 $(X_d, Y_d)$ 的表示如式(5),与式(3)相比,该式在 $X_d$ 中引入一个 $s_x$ 参数,用以表示图像的纵横比有畸变。

$$\begin{cases} X_d = s_x^{-1} dx(u - u_0) \\ Y_d = dy(v - v_0) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \delta_{xd} = p_1 \cdot (2r^2 + Y_d^2) + 2p_2 \cdot X_d \cdot Y_d + O[(X_d, Y_d)^4] \\ \delta_{yd} = p_2 \cdot (X_d^2 + 2r^2) + 2p_1 \cdot X_d \cdot Y_d + O[(X_d, Y_d)^4] \end{cases}, \quad (7)$$

其中, $p_1, p_2$ 为偏心畸变系数。

薄透镜畸变是由镜头的设计、制造、装配误差和 CCD 感光元件阵列制造误差引起的图像变形。同样,薄透镜畸变也包含径向畸变和切向畸变两个分量。薄透镜畸变表示如式(8):

$$\begin{cases} \delta_{xd} = s_1 \cdot (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^3] \\ \delta_{yd} = s_2 \cdot (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^3] \end{cases}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \delta_x(X_d, Y_d) = X_d \cdot (k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1 \cdot (2r^2 + Y_d^2) + 2p_2 X_d Y_d \\ \delta_y(X_d, Y_d) = Y_d \cdot (k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1 \cdot (X_d^2 + 2r^2) + 2p_2 X_d Y_d \end{cases} \quad (9)$$

### 3 畸变校正算法

两步法是近年来比较热门的摄像机标定算法,而两步法中以 Roger Tsai 的标定算法最为典型。Tsai 给出了基于共面标定点和非共面点的摄像机参数求解方法,其标定过程是基于径向排列约束(Radial Alignment Constraint, RAC)来实现的,因此有时简称为 RAC 两步法。该方法的第一步是利用中间变量将标定方程转化为线性方程,并用最小二乘法解超定线性方程,得到摄像机的一部分外部参数;第二步求解内部参数,先假设摄像机无透镜畸变,由一个超定线性方程解出焦

径向畸变主要是由镜头固有曲面特性引起的,它关于镜头的主光轴对称,在图像上表现为实际像点相对理想像点沿着法向方向发生移动。图像点沿着靠近图像中心的方向移动,称为桶形畸变;沿着偏离图像中心的方向移动,称为枕形畸变。径向畸变是镜头畸变的主要成分,径向畸变表示为:

$$\begin{cases} \delta_{xr} = X_d \cdot (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) + O[(X_d, Y_d)^9] \\ \delta_{yr} = Y_d \cdot (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) + O[(X_d, Y_d)^9] \end{cases}, \quad (6)$$

其中, $r^2 = X_d^2 + Y_d^2, k_1, k_2$ 是径向畸变系数。根据有关研究,低次项的畸变系数可校正 90% 以上的径向畸变量<sup>[14]</sup>,论文只考虑前两阶的径向畸变。

偏心畸变是由光学镜头组的光轴不完全共线引起,这种偏心特性不仅包含径向畸变,还包含切向畸变。切向畸变表现为理想点沿着切线方向发生变化。偏心畸变表示为式(7):

实际拍摄的图像是以上 3 种畸变的叠加。与径向畸变和偏心畸变相比,薄透镜畸变较小,因此,本文的畸变模型不考虑薄透镜畸变。同时,若在镜头畸变模型中考虑多参数高阶分量,会使计算复杂度增大,甚至导致解不稳定,且在提高模型精度上的优势并不明显<sup>[15]</sup>。因此,本文建立 3 参数的一阶径向畸变加一阶切向畸变模型如下。

距  $f$  和平移矩阵的  $T_z$  分量的初始值,然后再考虑有径向畸变的透镜模型,利用非线性优化的方法求解径向畸变系数  $k$ 、有效焦距  $f$  以及平移分量  $T_z$ 。

传统的 Tsai 方法计算量适中,精度较高,平均精度可达 1/4000,深度方向精度可达 1/8000<sup>[16]</sup>,但是其存在以下不足:一是 Tsai 两步法的前提是假设图像只有径向畸变,难以满足更高精度的要求;二是用平面标定板进行标定时,无法求解出图像纵横比  $s_x$ ,使得用 2D 平面板进行标定时参数求解受到限制;三是 Tsai 两步法需要进行非线性搜索,对初值和噪声敏感,难以保证收敛到全局最优解,且在引入畸变参数过多时会导

致解的不稳定。基于以上限制,本文在 Tsai 两步法的基础上对其进行改进。

第一步:由图像中心附近点确定外部参数。

将式(1)中世界坐标系与摄像机坐标系的转换关系重写为式(10)所示:

$$\begin{cases} x_c = r_1 x_w + r_2 y_w + r_3 z_w + T_x \\ y_c = r_4 x_w + r_5 y_w + r_6 z_w + T_y, \\ z_c = r_7 x_w + r_8 y_w + r_9 z_w + T_z \end{cases} \quad (10)$$

由摄像机成像的原理可知图像中心区域的畸变量不大,因此可以假定中心区域的实际图像坐标满足径向约束条件,且标定板为 2D 平面,则  $z_w = 0$ ,故可得:

$$\frac{x_c}{y_c} = \frac{X_d}{Y_d} = \frac{r_1 x_w + r_2 y_w + T_x}{r_4 x_w + r_5 y_w + T_y}, \quad (11)$$

式中:  $X_d, Y_d$  表示中心区域各个点的实际图像坐标,可根据式(5)计算,等式右边和  $[x_{wi} Y_{di} \quad y_{wi} Y_{di} \quad Y_{di} \quad -x_{wi} X_{di} \quad -y_{wi} X_{di}]$  为已知项,  $[T_y^{-1} r_1 \quad T_y^{-1} r_2 \quad T_y^{-1} T_x \quad T_y^{-1} r_4 \quad T_y^{-1} r_5]^T$  中的元素为待求项,选取的中心区域点的个数只要大于 5 个,则转化为超定方程组的求解问题。旋转矩阵  $\mathbf{R}$  是正交矩阵,根据正交矩阵的性质推导可得:

$$\sqrt{(r_1 - r_5)^2 + (r_2 + r_4)^2} + \sqrt{(r_1 + r_5)^2 + (r_2 - r_4)^2} = 2. \quad (15)$$

根据式(14)和式(15)的计算结果可以求出  $T_y$ ,进而求出  $r_1, r_2, T_x, r_4, r_5$ ,正负号的判断方法可参见文献[1],在此不再赘述。然后根据  $\mathbf{R}$  的正交性,可以求出  $r_3, r_6$ ,最后将  $\mathbf{R}$  矩阵的前两行叉乘计算得到  $r_7, r_8, r_9$ 。

第二步:计算  $f$  和  $T_z$  的初始值。

再次用图像的中心区域的点进行计算,将式(1)、式(2)移项整理可得:

$$\begin{cases} f \frac{x_c}{z_c} = X_u = f_x(X_d, Y_d) = X_d \cdot sx + X_d \cdot (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) + p_1 \cdot 2 \cdot X_d \cdot Y_d + p_2 \cdot (2 \cdot r^2 + Y_d^2) \\ f \frac{y_c}{z_c} = X_u = f_y(X_d, Y_d) = Y_d + Y_d \cdot (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) + p_1 \cdot (X_d^2 + 2 \cdot r^2) + p_2 \cdot 2 \cdot X_d \cdot Y_d \end{cases}, \quad (17)$$

上式中,  $(x_c, y_c, z_c)$  可由式(1)计算得到,其中  $\mathbf{R}, \mathbf{T}$  和  $f$  已在前两步中解出。将式(17)写成

将式(11)移项整理,可得

$$x_w Y_d r_1 + y_w Y_d r_2 + Y_d T_x - x_w X_d r_4 - y_w X_d r_5 - X_d T_y = 0, \quad (12)$$

式(12)是含有 6 个未知数的齐次方程组。求解出该方程组的一个解,再乘以一个系数,就可以得到该方程的通解。但由于这个齐次方程存在病态问题,直接用最小二乘法会导致结果不准确,甚至出错,所以应先将数据规范化<sup>[17]</sup>,将方程的各项同时除以  $T_y$ ,化为非齐次方程,如式(13)所示:

$$x_w Y_d \frac{r_1}{T_y} + y_w Y_d \frac{r_2}{T_y} + Y_d \frac{T_x}{T_y} - x_w X_d \frac{r_4}{T_y} - y_w X_d \frac{r_5}{T_y} = X_d, \quad (13)$$

将式(13)表示成矢量形式:

$$[x_{wi} Y_{di} \quad y_{wi} Y_{di} \quad Y_{di} \quad -x_{wi} X_{di} \quad -y_{wi} X_{di}] \cdot \begin{bmatrix} T_y^{-1} r_1 \\ T_y^{-1} r_2 \\ T_y^{-1} T_x \\ T_y^{-1} r_4 \\ T_y^{-1} r_5 \end{bmatrix} = X_{di}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} f \cdot (r_1 x_w + r_2 y_w + T_x) - T_z \cdot X_d = (r_7 x_w + r_8 y_w) \cdot X_d \\ f \cdot (r_4 x_w + r_5 y_w + T_y) - T_z \cdot Y_d = (r_7 x_w + r_8 y_w) \cdot Y_d \end{cases}, \quad (16)$$

上式是关于  $f$  和  $T_z$  的超定方程组,每个点对应一个这样的方程组,即若中心区域有  $n$  个点,则对应  $2n$  个方程,用最小二乘法求解。

至此,已求解出摄像机的全部外部参数,即旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平移矩阵  $\mathbf{T}$ ,并根据图像中心区域得到了初始焦距。图像中心区域畸变量较小,可以认为计算出的外部参数是准确的,但由式(16)计算焦距  $f$  和  $T_z$  时,由于目标点深度范围变化不大,物体点在图像中的位置由  $f/T_z$  决定,难以标定出单独的  $f$  和  $T_z$ ,也就是说,  $f$  和  $T_z$  还有待进一步计算。

第三步:用  $\mathbf{R}, \mathbf{T}, f$  计算畸变参数。

由式(2)和(4)-(7)的畸变公式可得:

关于畸变参数  $sx, k_1, k_2, p_1, p_2$  的线性方程组的形式如下:

$$\begin{cases} X_{di} \cdot sx + X_{di} \cdot r^2 \cdot k_1 + X_{di} \cdot r^4 \cdot k_2 + 2 \cdot X_{di} \cdot Y_{di} \cdot p_1 + (2 \cdot r^2 + Y_{di}^2) \cdot p_2 = f \frac{x_{di}}{z_{di}} \\ Y_{di} \cdot r^2 \cdot k_1 + Y_{di} \cdot r^4 \cdot k_2 + (X_{di}^2 + 2 \cdot r^2) \cdot p_1 + 2 \cdot X_{di} \cdot Y_{di} \cdot p_2 = f \frac{x_{di}}{z_{di}} - Y_{di} \end{cases} \quad (18)$$

同样的,对于图像上的每个点都可以写出形如式(18)的方程组。上式共 5 个未知数,只要点的个数大于或等于 3 个即可求解。在图像四周,点的畸变量较大,这里引入图像的全局视图进行求解,再次用最小二乘法解超定方程组。

$$\begin{cases} f_x(X_d, Y_d) = sx \cdot X_d + X_d \cdot (k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1 \cdot (2r^2 + Y_d^2) + 2p_2 X_d Y_d \\ f_y(X_d, Y_d) = Y_d + Y_d \cdot (k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1 \cdot (X_d^2 + 2r^2) + 2p_2 X_d Y_d \end{cases} \quad (19)$$

第五步:迭代计算。

重新将  $f, T_z$  代入第三步,计算畸变系数。比较前后两次计算的各畸变参数,重复第三、四步,直到畸变系数的变化率小于一个很小的正数  $\epsilon$ 。

## 4 实验及分析

### 4.1 实验结果

实验拍摄的圆点阵列靶标如图 2 所示,采用的相机分辨率为  $1\,280 \times 1\,024$ ,单位长度像素数为  $N_x = 1/0.003\,6$  (pixel/mm),  $N_y = 1/0.003\,6$  (pixel/mm),图像中心  $(u_0, v_0)$  设置为  $(640, 512)$ 。镜头采用焦距为 12 mm 的定焦镜头,选择圆孔的中心为标定板特征,标定板的圆心间距为 5 mm,制造精度为  $1\ \mu\text{m}$ 。利用本文的方法,经迭代 831 次后,各个畸变参数的变化率收敛。Tsai 两步法和本文方法的标定结果见表 1。

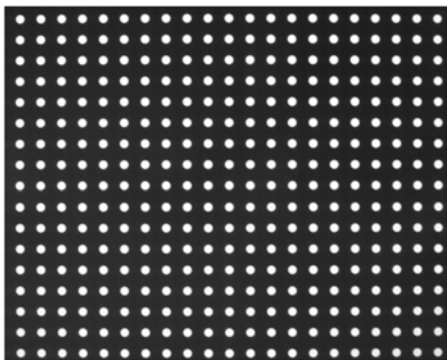


图 2 平面标定模板

Fig. 2 Planar calibration board

由表 1 可知,本文将焦距  $f$  和平移矩阵的  $T_z$  分量作为两步迭代法的单步迭代变量,计算出的

第四步:将畸变系数代入第二步,重新计算  $f$  和  $T_z$ 。

考虑有畸变的摄像机镜头,用  $f_x(X_d, Y_d)$  和  $f_y(X_d, Y_d)$  分别替换第二步中的  $X_d$  和  $Y_d$ ,计算带畸变整定的  $f$  和  $T_z$ ,其中:

镜头焦距为 11.671 4 mm,在标定板与相机平面接近平行时,焦距  $f$  与平移矩阵的  $T_z$  分量存在较强的相关性,Tsai 两步法难以分离标定,只能较准确地计算出二者的比值,Tsai 两步法计算出的镜头焦距为 26.293 3 mm,而本文方法则可实现  $f$  和  $T_z$  的分离标定。

表 1 摄像机标定结果

Tab. 1 Results of camera calibration

参数	本文方法	Tsai 两步法
$R$	$\begin{bmatrix} -1.000\,0 & 0.001\,9 & 0.001\,1 \\ 0.001\,9 & 0.999\,9 & 0.013\,8 \\ -0.001\,0 & 0.013\,8 & -0.999\,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000\,0 & 0.001\,8 & 0.002\,3 \\ 0.001\,9 & 0.999\,8 & 0.019\,6 \\ -0.002\,3 & 0.019\,6 & -0.999\,8 \end{bmatrix}$
$T$	$\begin{bmatrix} 47.001\,7 \\ -51.991\,9 \\ 52.924\,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 47.003\,7 \\ -51.985\,2 \\ 119.808\,1 \end{bmatrix}$
$f$	11.671 4	26.293 3
$sx$	0.999 9	1.000 0
$k_1$	0.001 1	0.001 0
$k_2$	$-4.1516 \times 10^{-6}$	
$p_1$	$-3.3144 \times 10^{-4}$	
$p_2$	$1.9837 \times 10^{-5}$	

### 4.2 校正效果比较

为了获得比较直观的畸变校正效果,将图像上每个圆心的横向和纵向间距作为校正的评价参数。由于所采用的是二维标定板,因此在理想的图像中,标定板的相邻圆心之间的距离应是均匀变化的。将各个圆心在世界坐标系中的横纵坐标作为  $X, Y$  轴,分别将横向和纵向相邻圆心的距离作为  $Z$  轴,画出原始图像以及校正后图像的横纵向圆心距,如图 3 所示。

图 3 中,原始图像 4 个角处的横纵向间距明

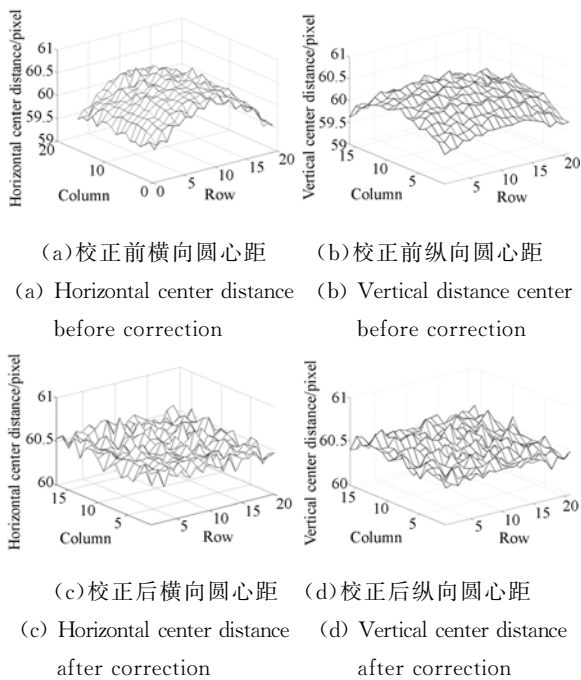


图 3 校正前后的横纵向圆心距比较

Fig. 3 Comparison of vertical and horizontal center distances before and after corrections

显小于中心区域,图像畸变较大,利用本文方法校正后,图像 4 个角处的圆心间距与中心区域的圆心间距之差趋于相等,校正效果较好。

为了评估摄像机的标定精度,将标定板圆心的世界坐标经过空间几何变换、透视变换以及投影变换得到的图像像素坐标的理论值与实际测得的像素坐标值相比较,并用图像均方根误差作为标定精度的评估函数:

$$f_u = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\sqrt{(u_i - u_i')^2 + (v_i - v_i')^2}], \quad (20)$$

其中:  $u_i$ 、 $v_i$  为实际测量得到的像素坐标,  $u_i'$ 、 $v_i'$  为由世界坐标经过式(1)~(3)及畸变参数校正得到重投影坐标。

改变物距,拍摄 3 幅畸变图像,分别用 Tsai 方法和本文方法对摄像机进行标定,计算图像横纵向和整体的平均像素误差结果如表 2。

由表 2 可知,对不同物距下拍摄的图像进行校正时,Tsai 方法的校正精度均低于本文方法。对 3 幅图像的平均像素误差取平均值,得到本文方法的平均像素误差为 0.114 9 pixel,用 Tsai 方法计算的平均像素误差为 0.367 0 pixel,可见本文方法的计算精度较高。

表 2 两种方法平均像素误差

Tab. 2 Average pixel errors of two methods

		(Pixel)	
平均像素误差		Tsai 方法	本文方法
图 1	横向	0.276 5	0.067 7
	纵向	0.235 1	0.099 3
	整体	0.398 4	0.131 7
图 2	横向	0.166 0	0.045 8
	纵向	0.185 2	0.072 4
	整体	0.274 8	0.092 7
图 3	横向	0.259 0	0.070 1
	纵向	0.287 9	0.086 1
	整体	0.427 8	0.120 4
整体平均像素误差		0.367 0	0.114 9

### 4.3 应用测试

为了检验本文计算的畸变参数在工程应用中的有效性,将表 1 的畸变参数用于校正同一台相机拍摄的其他图像。为了衡量图像畸变校正效果,引入图像圆心距均方差作为衡量指标,包括横向圆心距均方差和纵向圆心距均方差,分别反映图像在横向和纵向上的圆心距均匀程度。

假设图像共有  $M$  行  $N$  列个圆孔,那么每行的圆心距均方差的计算如式(21):

$$std(i) = \sqrt{\frac{\sum_{j=2}^N (d_{ij} - \bar{d}_i)^2}{N-1}}, \quad (21)$$

式中:  $d_{ij}$  表示第  $i$  行第  $j$  列的圆心与第  $i$  行第  $j-1$  列的圆心之间的像素距离,  $\bar{d}_i$  表示第  $i$  行圆心像素距离的平均值,  $std(i)$  表示第  $i$  行圆心像素距离的均方差,  $N$  为图像的宽度。整个图像的横向圆心距均方差为各行圆心像素距离均方差的平均值。

表 3 测试图像像素圆心距均方差比较

Tab. 3 Comparison of mean square errors for center distance on test image (Pixel)

圆心距均方差		原始图像	校正后图像
图 1	横向	0.219 7	0.086 3
	纵向	0.156 8	0.082 4
图 2	横向	0.275 3	0.079 8
	纵向	0.192 4	0.074 7
图 3	横向	0.404 2	0.100 7
	纵向	0.306 5	0.091 8

纵向圆心距均方差的计算方法与横向圆心距均方差的计算方法类似。将表1中的计算结果用于校正同一相机拍摄的3幅图片,检验结果的重复性,得到畸变校正前后的圆心距均方差见表3。

由上表可知,与原始图像相比,校正后的图像圆心距均方差在横向和纵向上均有所减小。这表明校正后的图像圆心距分布更接近理想图像。本文方法计算的畸变参数在应用测试中效果较好。

## 5 结 论

Tsai 两步法是目前应用比较广泛的摄像机

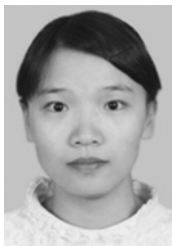
标定方法,但是在切向畸变较大时其校正精度难以满足要求。本文建立了一种基于平面标定板的考虑径向畸变和切向畸变的综合畸变校正模型,校正精度较高,平均像素误差可达0.1149 pixel,明显优于Tsai方法的0.3670 pixel。此外,在标定板深度范围变化不大时,原本的Tsai方法只能计算出 $f/T_z$ 的比值,不能准确分离计算 $f$ 和 $T_z$ ,而本文的方法可以较准确地计算出焦距 $f$ 和平移分量 $T_z$ 。相机的畸变参数为内部参数,可以认为是定值,利用这一性质对本文畸变参数的计算结果进行应用测试,取得了较好的效果。

## 参考文献:

- [1] TSAI R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses [J]. *IEEE Journal of Robotics Automation*, 1987, 3(4): 323-344.
- [2] MARTINS H A, BIRK J R, KELLEY R B. Camera models based on data from two calibration planes [J]. *Computer Graphics and Imaging Processing*, 1981, 17: 173-180.
- [3] ZHANG G J, HE J J, YANG X M. Calibrating camera radial distortion with cross-ratio invariability [J]. *Optics & Laser Technology*, 2003, 35(6): 457-461.
- [4] 徐杰. 机器视觉中摄像机标定 Tsai 两步法的分析与改进[J]. *计算机工程与科学*, 2010, 32(4): 45-48, 58.  
XU J. Analyzing and improving the Tsai camera calibration method in machine vision [J]. *Computer Engineering & Science*, 2010, 32(4): 45-48, 58. (in Chinese)
- [5] 苏成志,王恩国,郝江涛,等. 平面几何测量中的图像畸变校正[J]. *光学精密工程*, 2011, 19(1): 161-167.  
SU CH ZH, WANG E G, HAO J T, *et al.*. Distortion correction for images in planar metrology [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2011, 19(1): 161-167. (in Chinese)
- [6] 胡浩,梁晋,唐正宗,等. 显微立体视觉小尺度测量系统的标定[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(8): 1985-1994.  
HU H, LIANG J, TANG ZH Z, *et al.*. Calibration of stereo microscope measurement systems [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(8): 1985-1994. (in Chinese)
- [7] 兰海滨,王平,龙腾. 图像拼接中相机镜头非线性畸变的校正[J]. *光学精密工程*, 2009, 17(5): 1196-1202.  
LAN H B, WANG P, LONG T. Nonlinear aberration correction of lens in image mosaic [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(5): 1196-1202. (in Chinese)
- [8] 张征宇,黄诗捷,罗川,等. 基于共面条件的摄像机非线性畸变自校正[J]. *光学学报*, 2012, 32(1): 0115002-6.  
ZHANG ZH Y, HUANG SH J, LUO CH, *et al.*. Nonlinear distortion correction of camera based on coplanar condition equations [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(1): 0115002-6. (in Chinese)
- [9] 王飞,戴运峰,冯刚,等. 红外焦平面阵列非线性校正曲线测量方法[J]. *中国光学*, 2014, 7(1): 144-149.  
WANG F, JI Y F, FENG G, *et al.*. Method for measuring nonlinear calibrated curve of infrared focal plane arrays [J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(1): 144-149. (in Chinese)
- [10] 朱伟东,曹良洪,梅标,等. 利用圆心不对称投影精确标定工业相机[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(8): 2267-2273.  
ZHU W D, CAO L H, MEI B, *et al.*. Calibration of industrial cameras using asymmetric circle center projection [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(8): 2267-2273. (in Chinese)
- [11] 解则晓,韩振华,高翔. 光笔式单目视觉测量系统的关键技术[J]. *中国光学*, 2013, 6(5): 780-787.

- XIE Z X, HAN ZH H, GAO X. Key technologies of monocular vision measurement system with light pen[J]. *Chinese Optics*, 2013, 6(5): 780-787. (in Chinese)
- [12] 杨必武, 郭晓松. 摄像机镜头非线性畸变校正方法综述[J]. *中国图象图形学报*, 2005, 10(3): 269-274.
- YANG B W, GUO X S. Overview of nonlinear distortion correction of camera lens[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2005, 10(3): 269-274. (in Chinese)
- [13] 黄湛. 高精度图像尺寸检测镜头畸变校正方法与实现[D]. 广东: 广东工业大学, 2013.
- HUANG ZH. *The method and Realization of lens distortion correction for high-precision image size measurement* [D]. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2013. (in Chinese)
- [14] 张佳成, 范勇, 陈念年. 基于混合模型的 CCD 镜头畸变精校正算法[J]. *计算机工程*, 2010, 36(1): 191-193.
- ZHANG J CH, FAN Y, CHEN N N. High precision correction algorithm for CCD lens distortion based on combined model[J]. *Computer Engineering*, 2010, 36(1): 191-193. (in Chinese)
- [15] 樊巧云, 李小娟, 张广军. 星敏感器镜头畸变模型选择[J]. *红外与激光工程*, 2012, 41(3): 665-670.
- FAN Q Y, LI X J, ZHANG G J. Selection of star sensor lens aberration model[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(3): 665-670. (in Chinese)
- [16] 马颂德. *计算机视觉: 计算理论与算法基础*[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- MA S D. *Computer Vision: Theory and Algorithms*[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)
- [17] HARTLEY R I. In defence of the 8-point algorithm[C]. *Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Computer Vision*, Cambridge, P. R. USA: MIT, 1995: 1064-1070.

## 作者简介:



王敏(1991—), 女, 湖北孝感人, 硕士研究生, 2014 年于武汉理工大学获得学士学位, 主要研究方向为机器视觉。E-mail: wangminxg@163.com

## 导师简介:



叶峰(1972—), 男, 广东高州人, 博士, 副教授, 2003 年于华南理工大学获得博士学位, 主要研究方向为机器视觉及智能控制。E-mail: mefengye@scut.edu.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)