

文章编号 1004-924X(2015)增-0000-08

## 连续镜面可变形镜面形的正交多项式描述

李舒阳<sup>1</sup>, 郝群<sup>2</sup>, 程雪岷<sup>1\*</sup>

(1. 清华大学深圳研究生院, 广东深圳 518055;  
2. 北京理工大学光电学院, 北京 100081)

**摘要:**以压电可变形镜(PDM)和微机械薄膜可变形镜(MMDM)为例,讨论了准确描述连续镜面面形的方法。比较了基于 Zernike 多项式和  $Q$  多项式的面形描述方法在不同参数条件下的准确度,探讨了高阶项对于提升拟合精度的作用。令单个或多个驱动器作用,分别获得了 PDM 和 MMDM 的面形数据各 5 组。然后,以采样点数和多项式阶数为变量,采用 5 种采样点阵的分布形式,分别用 Zernike 多项式和  $Q$  多项式对获得的 10 组面形进行最小二乘拟合。实验结果显示:与其他 4 种均布采样形式相比,边缘聚类采样更有利于提升拟合精度;与 Zernike 多项式拟合相比, $Q$  多项式在超过 40 阶的拟合中残差更小;添加 20 至 80 阶多项式用于拟合时,残差的均方根(RMS)值保持在  $1 \times 10^{-5}$  mm 数量级,而靠近孔径中心的区域的残差明显降低。得到的结论有助于在变形镜应用中选取拟合参数,以便准确描述面形,提高波前控制精度。

**关键词:**光学自由曲面;面形拟合;可变形镜;Zernike 多项式; $Q$  多项式

**中图分类号:**TH703;TP302.7 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20152313.0000

## Description of continuous surface deformable mirrors by using orthogonal polynomials

LI Shu-yang<sup>1</sup>, HAO Qun<sup>2</sup>, CHENG Xue-min<sup>1\*</sup>

(1. Graduate School at Shenzhen, Tsinghua University, Shenzhen 518055, China;  
2. School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)  
\* Corresponding author, E-mail: cheng-xm@mails.tsinghua.edu.cn

**Abstract:** By taking a piezoelectric Deformable Mirror (PDM) and a Micromachined Membrane Deformable Mirror (MMDM) as examples, a method to accurately characterize the surface of continuous surface deformable mirrors was discussed. The description characteristics of Zernike polynomial and  $Q$  polynomial methods using different fitting parameters were compared and the influence of higher polynomial terms on fitting accuracy was researched. By activating one or more actuators, the two groups of five surface data were obtained for PDM and MMDM respectively. Then, the number of sampling points and the number of polynomial orders were taken as variables, the ten surface data were fitted using the least square based on five types of sampling grids; either the Zernike polynomial and  $Q$  polynomial were adopted. The experimental results show that the edge-clustered sampling grid outperforms the four uniform grids in terms of fitting accuracy. The  $Q$ -polynomial fits produce smaller fitting residuals than Zernike fits when the polynomial order goes beyond 40. Moreover, the

收稿日期:2015-06-22;修订日期:2015-07-10.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 61275003, No. 51327005)

RMS (Root-Mean-Square) of fitting residuals stays in the  $1 \times 10^{-5}$  mm order of magnitude when the polynomial order increases from 10 to 80, while the residuals away from the aperture edge decrease significantly. The above results can guide the choice of fitting parameters in deformable mirror applications, describe the surface characteristics of deformable mirrors and improve wavefront control accuracy.

**Key words:** optical freeform surface; surface fitting; deformable mirror; Zernike polynomial; Q-polynomial

## 1 引言

可变形镜通过自身镜面变形来实现改变波前、校正像差的功能,目前广泛应用于自适应光学等领域。其镜面面形通常用 Zernike 多项式描述<sup>[1]</sup>。Zernike 多项式是单位圆内连续区域上的正交基,其低阶项与光学像差存在对应关系。因此,可变形镜面形的低阶 Zernike 模式的准确度可以表征其波前控制能力<sup>[2-3]</sup>。

近年来,可变形镜被用于提升成像系统的像质,例如作为光学稳像和变焦器件<sup>[4-6]</sup>。此类应用中镜面面形描述的准确度要求更高,以往采用低阶 Zernike 多项式的拟合结果往往引入较大的波前像差,导致像质降低。因此,需探讨更准确的面形描述方法。

自由曲面(即非旋转对称曲面<sup>[7]</sup>)的面形描述方法有正交多项式、径向基函数<sup>[7]</sup>(Radial Basis Function, RBF)、样条<sup>[8]</sup>等。Forbes 提出的梯度正交 Q 多项式<sup>[9]</sup>,可降低非球面的加工难度,且在描述解析的自由曲面时,准确度与 Zernike 多项式相当<sup>[10]</sup>。RBF 不存在正交性,因而不限制描述面形的孔径形状,目前主要有 RBF-Direct 和 RBF-QR 两种实现方法。当 RBF 的形状因子  $\varepsilon$  较大时,采用 RBF-Direct 方法通常无数值病态;当  $\varepsilon$  较小时,采用 RBF-QR 方法通常可避免数值溢出<sup>[11]</sup>。

采用正交多项式描述自由曲面时,为提高拟合准确度,可能采用上千项多项式,计算量较大。Kaya 等<sup>[12]</sup>比较了四种采样点阵的分布形式,发现拟合收敛速率与采样相关,且边缘聚类采样可减少边缘振铃现象,从而适用于刻画本质非旋转对称的曲面。本文所讨论的可变形镜孔径为圆形,利用正交多项式讨论可变形镜面形的描述方法和拟合精度是合适的,因此,本文讨论了不同参数条件下 Zernike 多项式和 Q 多项式描述可变形镜面形的准确度。一方面,采样点阵分布形式、采

样点个数及多项式阶数对拟合误差会有不同程度的影响;另一方面,两种正交多项式在相同参数条件下的拟合准确度可能不同。

在光学系统设计阶段,为控制光线追迹的计算量,往往限制采样个数,因此,降低拟合误差最直观的做法是增加多项式阶数。在改变参数实验中,着重探讨高阶项对拟合准确度的影响,最高取前 80 阶多项式用于拟合。

由于连续镜面、分立镜面的面形特点差异较大,其适合的描述方法应分别讨论。本文以压电可变形镜和微机械薄膜可变形镜为例,讨论了连续镜面面形的准确描述。

## 2 自由曲面面形的正交多项式描述

### 2.1 Zernike 多项式描述面形

自由曲面可由 Zernike 多项式的线性组合表示<sup>[10]</sup>:

$$s(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N a_n^0 Z_n^0(u) + \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=0}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Z_n^m(u^2), \quad (1)$$

其中:  $u = \rho/\rho_{\max}$  为归一化的径向坐标,  $\rho_{\max}$  为包络面形所在区域的圆孔径的半径,  $u^m Z_n^m$  表示标准 Born and Wolf Zernike 多项式,  $a_n^0$ ,  $a_n^m$  和  $b_n^m$  为各 Zernike 项的系数。

### 2.2 Q 多项式描述面形

类似地,自由曲面面形的正交 Q 多项式描述为<sup>[10]</sup>:

$$s(\rho, \theta) = \text{bfs} + \frac{1}{\sqrt{1-c^2\rho^2}} u^2 (1-u^2) \sum_{n=0}^N a_n^0 Q_n^0(u^2) + \frac{1}{\sqrt{1-c^2\rho^2}} \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=0}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Q_n^m(u^2), \quad (2)$$

其中: bfs 为该面形的最佳拟合球面,曲率为  $c$ ,定义见文献[13]。 $(1-c^2\rho^2)^{1/2}$  是 bfs 局部法向与包络面形的圆柱轴向的夹角余弦。 $Q_n^0$  为旋转对称

的斜率正交  $Q^{\text{bfs}}$  多项式,  $Q_n^m$  ( $m \neq 0$ ) 为梯度正交  $Q^{\text{con}}$  多项式。式(2)的第二、第三项分别对应面形的旋转对称和旋转非对称部分。

对于 Zernike 多项式拟合, 叠加二次曲面不改变拟合残差; 而对于  $Q$  多项式拟合, 拟合精度与最佳拟合球面的选取有关。整理式(2)可得:

$$s(\rho, \theta) = \text{bfs} + \frac{1}{\sqrt{1-c^2\rho^2}} \left\{ u^2(1-u^2) \sum_{n=0}^N a_n^0 Q_n^0(u^2) + \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=0}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Q_n^m(u^2) \right\}, \quad (3)$$

其中, 大括号内的部分为所描述的面形相对于 bfs 在 bfs 局部法向上的偏离值<sup>[14]</sup>。因此, 准确计算 bfs 的曲率  $c$  是用  $Q$  多项式准确描述面形的前提, 计算方法见文献[10]。

### 2.3 正交多项式的递推计算

正交多项式的显式计算存在数值病态, 计算高阶项时尤甚<sup>[15]</sup>, 会导致较大的拟合误差。为此, 本文采用递推关系计算各项 Zernike 多项式<sup>[16-18]</sup> 和  $Q$ <sup>[13-14]</sup> 多项式, 以避免病态问题。

## 3 面形拟合实验

### 3.1 获取可变形镜面形

实验采用荷兰 Flexible Optical BV (OKO Technologies) 公司的 37 通道压电可变形镜 (PDM30-37) 和 37 通道微机械薄膜可变形镜 (MMDM15-37)。其中, PDM 直径为 30 mm, 由压电柱状驱动器控制相连的薄片镜面移动, 镜面边缘不固定; MMDM 直径为 15 mm, 由静电驱动器改变薄膜镜面的面形, 镜面边缘固定。PDM 和 MMDM 的 37 个驱动器具有相同的几何分布, 如图 1 所示。

实验形成 PDM 的 5 个面 (p01-p05) 和 MMDM 的 5 个面 (m01-m05)。PDM 的 1~37 通道控制信号和 MMDM 的 1~19 通道控制信号见表 1。控制信号为 -1~1。为使 MMDM 的边缘找平, 20~37 通道保持不变: 通道 22, 28~30, 36 和 37 的控制信号为 -0.7, 通道 20, 21, 23~27, 31~35 的驱动信号为 -1。

表 1 PDM 及 MMDM 面形的控制信号

Tab. 1 Control signals for PDM and MMDM surfaces

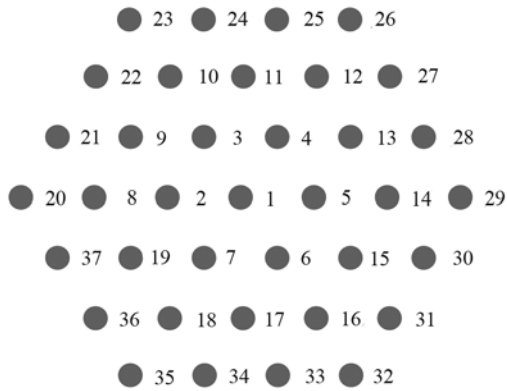


图 1 PDM、MMDM 驱动器的几何分布

Fig. 1 Actuator geometry of PDM and MMDM

PDM	MMDM	Control signals (PDM channels 1~37, MMDM channels 1~19)
p01	m01	all channels are set to -0.5
p02	m02	all channels are set to 0.5
p03	m03	1st channel is set to 1, while the others are -1
p04	m04	3rd channel is 1, while the others are -1
p05	m05	19th channel is 1, while the others are -1

用 Zygo 干涉仪获取 75% 口径内的面形数据。PDM 各面的数据点个数约为 156 500~158 500, MMDM 各面的数据点个数约为 57 000~57 700。数据点呈矩形点阵分布, 各点坐标归一化至单位圆。

### 3.2 面形拟合方法设计

拟合采用的多项式项数记作  $N$ , 最高阶数记作 OrderT, 采样点个数  $M$  通常可取  $M \approx 1.5N^{[12]}$ 。

拟合实验中比较了 5 种采样点分布形式: 矩形点阵 (记为 Rect), 六边形点阵 (Hex), 采用 Halton 序列的伪随机点阵 (Rand), 阿基米德螺旋线点阵 (Spir) 和边缘聚类点阵 (EC)。其中, Hex, Rand 和 EC 点阵的分布方式见文献 [12]。图 2 为 p01 面的 5 种采样结果, 采样点数为 392~397。

鉴于 Zygo 干涉仪获取的面形数据分布在矩形点阵上, 若实验定义的采样点位置与任一数据点位置不重合, 则采样点处没有数据。为此, 采用“四点取平均”法估计采样点处的面形矢高: 若采样点位于 4 个相邻数据点组成的矩形中, 则取 4 个数据点处的数据平均值作为采样点处的数

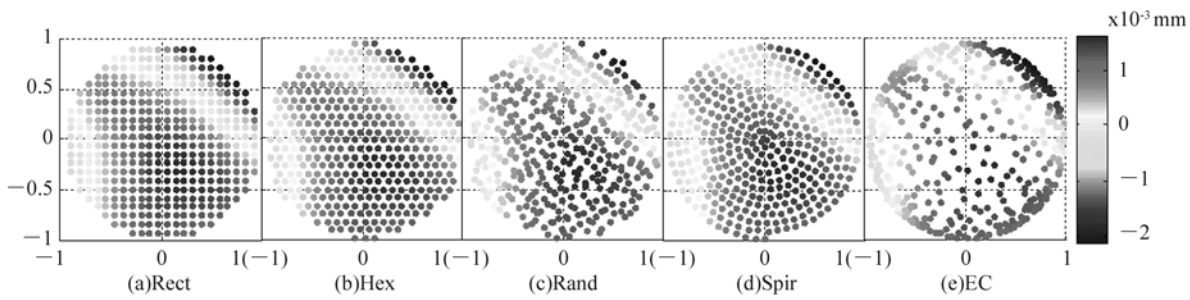


图 2 五种采样点阵示意图

Fig.2 Illustration of sample surface data in five grid types

据;若采样点位于两个相邻数据点的连线上,则取两个数据点处的数据平均值作为采样点处的数据。

用 Zernike 多项式或 Q 多项式对面形数据进行最小二乘拟合,求得多项式线性组合的各项系数,即式(1)和式(2)中的  $a_n^m$  和  $b_n^m$ 。用拟合系数重建面形可得到在数据点处的拟合残差。拟合精度用拟合残差的最大值和 RMS 值表征,分别记为 MaxErr 和 RmsErr。

### 3.3 可变形镜的面形拟合实验

为衡量不同参数条件对 Zernike 多项式和 Q 多项式拟合精度的影响,设计了 3 组拟合实验,见表 2。

## 4 结果与讨论

### 4.1 采样点阵实验

#### 4.1.1 平均拟合残差

采用 5 种采样点阵时,对 10 个面拟合残差的最大值(MaxErr)和 RMS 值(RmsErr)取平均,结果见图 3(彩图见期刊电子版)。蓝色和橙色条形分别表示 Zernike 多项式、Q 多项式拟合时 MaxErr 的平均值;深蓝色和红色点分别表示 Zernike 多项式、Q 多项式拟合时 RmsErr 的平均值。

由图可知,用 Zernike 多项式拟合时,若采用 EC 采样,MaxErr 和 RmsErr 的平均值可取最小。用正交多项式拟合时,EC 采样可使 MaxErr 的平均值最小,Spir 采样和 EC 采样均可使 RmsErr 的平均值最小。

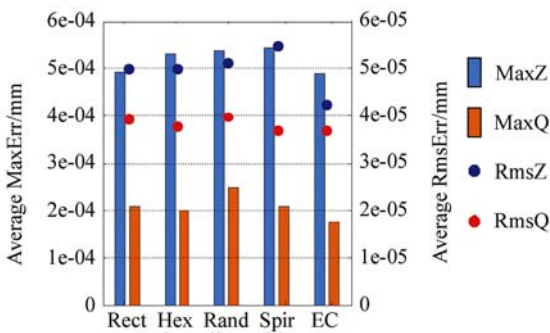


表 2 三组面形拟合实验安排

Tab.2 Arrangement of three surface fitting experiments

Experiment No.	Polynomials (Zernike and Q)		Sampling	
	Order	No. of polynomials (N)	No. of sampling points (M)	Sam
1	70	2554	$M \approx 1.5N$	Rect/H
2	10/70	64/2554	$M \approx 1.5N, 2N$ or $2.5N$	
3	10/20/30/.../80	64/229/494/.../3319	$M \approx 1.5N$	

\* One of the five sampling strategies applied in Experiment One was used. The choice depended on the results of Experiment One.

需注意的是,采样方法改变时拟合误差的变化比较有限。5 种采样下,MaxErr 平均值的变化幅度在  $8 \times 10^{-5}$  mm 以内,RmsErr 平均值的变化幅度在  $1.3 \times 10^{-5}$  mm 以内。

#### 4.1.2 面数统计

为比较 5 种采样方法对拟合残差的影响,取最小的面数统计 MaxErr 和 RmsErr 的平均值见图 4。第三、第四列显示:当采用 Zernike 拟合时,10 个面中的 8 个在 EC 采样下取得最小的 RmsErr 平均值,另 2 个面则分别在 Hex、Rect 采样下取得最小值;当采用 Q 多项式拟合时,10 个面中的 6 个在 EC 采样下取得最小的 RmsErr 平均值。

综上,相比于其余 4 种采样方法,EC 采样能够取得较低的拟合残差。因此,实验二、三仅采用 EC 采样。

### 4.2 采样点数实验

多项式阶数分别为 10 和 70 时,对 10 个面拟合残差的最大值(MaxErr)和 RMS 值(RmsErr)取平均,结果分别见图 5 和图 6。

图 5 显示,采用前 10 阶拟合,即多项式项数  $N = 64$  时,若 EC 采样的点数从  $1.5N$  增加至

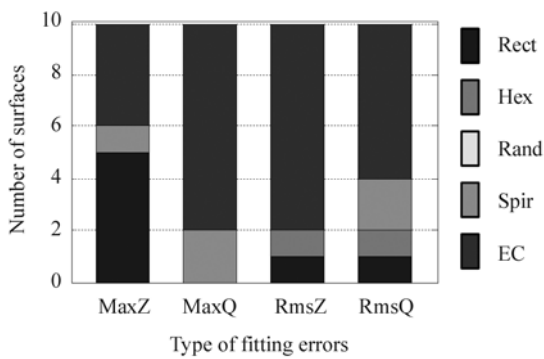


图 4 五种采样下拟合误差取最小的面数统计

Fig. 4 Number of surfaces for which the MaxErrs or RmsErrs reached minimum among five grids

3.5N, 则 10 个面 MaxErr 和 RmsErr 的平均值下降幅度均超过 30%。

图 6 显示, 采用前 70 阶拟合, 即多项式项数  $N=2554$  时, 若 EC 采样的点数从  $1.5N$  增加至  $3.5N$ , 则 MaxErr 的平均值变化幅度在 2% 以内, RmsErr 的平均值下降约  $5 \times 10^{-6}$  mm, 即下降幅度在 16% 以内。

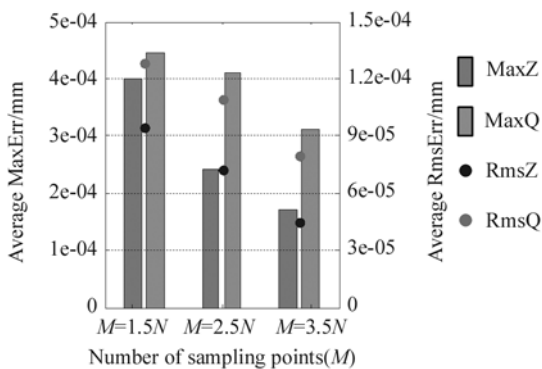


图 5 不同采样点数时前 10 阶多项式的拟合误差

Fig. 5 Errors of fitting using different numbers of sampling points (Order T = 10)

由此可知, 拟合采用的多项式较少时, 增加采样点个数可显著降低拟合残差; 而采用的多项式较多时, 采样点个数增加导致的拟合残差变化很小。

此外, 对比图 5、图 6 可观察到: 多项式阶数增加使 Zernike 拟合 MaxErr 显著增大, 该情况将在实验三中进一步讨论。

### 4.3 多项式阶数实验

#### 4.3.1 平均拟合残差

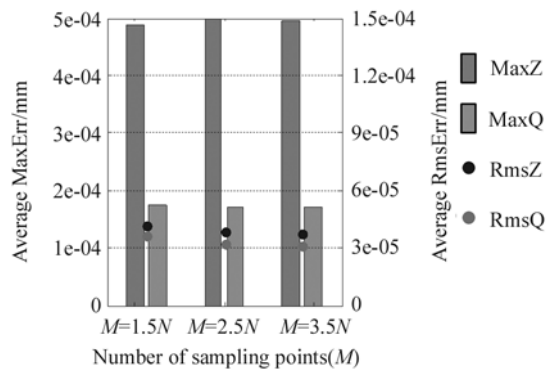


图 6 不同采样点数时前 70 阶多项式的拟合误差

Fig. 6 Errors of fitting using different numbers of sampling points (Order T = 70)

多项式阶数取 10 ~ 80 时, 对 10 个面拟合残差的最大值 (MaxErr) 和 RMS 值 (RmsErr) 取平均, 结果见图 7。由图 7 可知, 采用前 10 阶至前 80 阶拟合, 即多项式项数由 64 增加到 3319 时, Q 多项式拟合的 MaxErr 平均值由  $4.45 \times 10^{-4}$  mm 降至  $1.74 \times 10^{-4}$  mm, RmsErr 平均值由  $1.28 \times 10^{-4}$  mm 降至  $3.38 \times 10^{-5}$  mm, 下降幅度均超过 60%, 且在阶数小于 40 时下降较快, 阶数为 40 ~ 80 时趋于稳定; Zernike 拟合的 RmsErr 平均值呈类似的下降趋势, 而 MaxErr 平均值表现为波动增长。

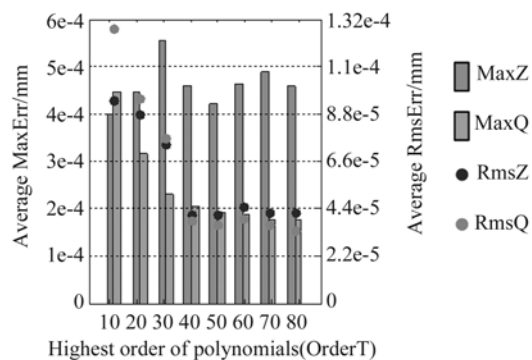


图 7 不同多项式阶数时的拟合误差

Fig. 7 Errors of fitting using different polynomial orders

观察 10 个面的拟合误差在孔径内的分布可知, 多项式阶数增加时, 尽管 Zernike 多项式拟合的 MaxErr 波动增长, 但较大的拟合残差移向边缘, 靠近孔径中心的拟合残差减小, 如图 8 所示的面形 p03 的 10 阶、80 阶 Zernike 多项式拟合残差。

类似地, 多项式阶数超过 40 之后, 尽管 Q 多

项式拟合的 MaxErr 和 RmsErr 平均值变化很小,但较大的拟合残差移向边缘,靠近孔径中心的拟合残差减小。如图 9 所示的面形 p03 的 50 阶、80 阶 Q 多项式拟合残差。

因此,在特定应用中,若孔径边缘处的面形描述误差对系统成像质量的影响较小,而靠近孔径中心处的面形描述误差影响较大时,则应考虑添加高阶项用于拟合。

此外,对比 Zernike、Q 多项式拟合的结果可知,多项式阶数增加时,Q 多项式的拟合残差的下降趋势更稳定,且逐渐低于 Zernike 多项式的拟合残差。因此,采用高阶项拟合时,Q 多项式比 Zernike 多项式更有利于提升拟合精度。

#### 4.3.2 面数统计

为比较 Zernike 和 Q 多项式的拟合残差,MaxErr 和 RmsErr 的平均值取最小的面数统计见图 10。第一列显示,采用前 10 阶拟合时,10 个面中的 6 个采用 Zernike 多项式拟合取得更小的 MaxErr,另 4 个则用 Q 多项式拟合取得更小的 MaxErr;10 个面中的 8 个采用 Zernike 多项式拟

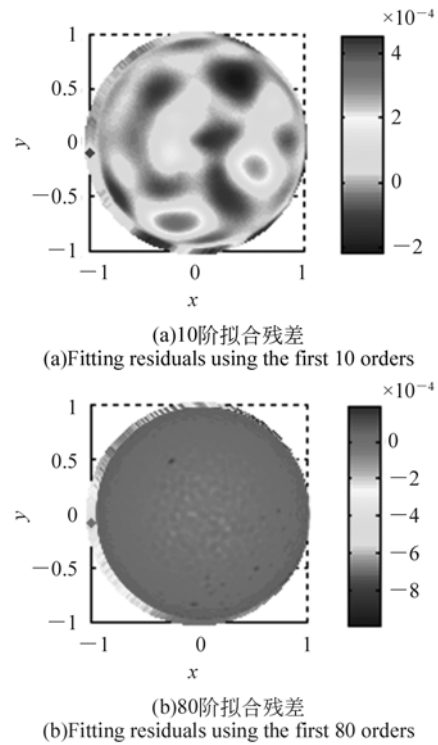


图 8 面 p03 的 10 阶、80 阶 Zernike 拟合残差  
Fig. 8 Zernike fitting residuals of p03 using the first 10 and 80 orders

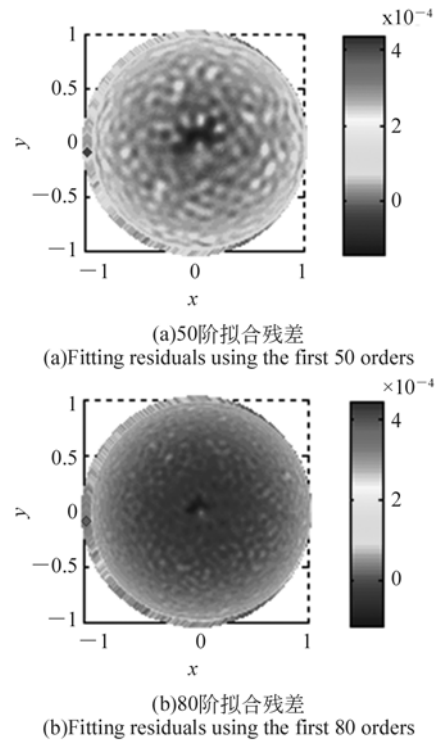


图 9 面 p03 的 50 阶、80 阶 Q 多项式拟合残差  
Fig. 9 Q-polynomial fitting residuals of p03 using the first 50 and 80 orders

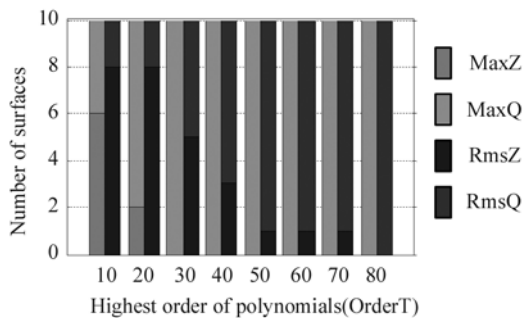


图 10 不同多项式阶数时拟合误差取最小的面数统计  
Fig. 10 Number of surfaces for which MaxErrs or RmsErrs reached minimum using Zernike or Q-polynomial fitting

合取得更小的 RmsErr,另 2 个则用 Q 多项式拟合取得更小的 RmsErr。

对比图 10 各列可知,随着多项式阶数的增加,更多个面的 Q 多项式拟合残差小于 Zernike

多项式拟合。

## 5 结 论

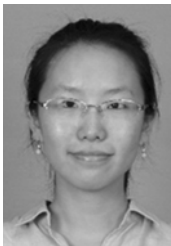
本文比较了不同参数条件下,Zernike 多项式和 Q 多项式描述可变形镜面形的准确度,并探讨了高阶项对于提升拟合精度的作用。通过分析 5 个压电可变形镜面形、5 个微机械薄膜可变形镜面形的拟合结果,可知对于连续镜面可变形镜的面形拟合,相较于四种均布采样,边缘聚类采样更有利于提升拟合精度;相较于 Zernike 多项式,Q 多项式在阶数增加时的拟合残差下降更稳定,且在多项式阶数超过 40 时优势更明显;添加 20 至 80 阶多项式用于拟合时,拟合残差的 RMS 值保持在  $1 \times 10^{-5}$  mm 数量级,但孔径边缘以内的残差明显降低。以上结论能够指导可变形镜应用中控制参数及相应的面形拟合方法的选取,以更准确地描述面形。

## 参考文献:

- [1] 林旭东,刘欣悦,王建立,等. 137 单元变形镜的性能测试及校正能力实验[J]. 光学精密工程,2013,21:267-273.  
LIN X D, LIU X Y, WANG J L, et al.. Performance test and experiment of correction capability of 137-element deformable mirror [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013,21:267-273. (in Chinese)
- [2] 马剑强,刘莹,陈俊杰,等. 200 单元硅基单压电变形镜的设计与测试[J]. 光学精密工程,2014,22:2047-2053.  
MA J Q, LIU Y, CHEN J J, et al.. Design and performance testing of a 200-element silicon unimorph deformable mirror [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014,22:2047-2053. (in Chinese)
- [3] VDOVIN G, SOLOVIEV O, LOKTEV M, et al.. Optimal correction and feedforward control of low-order aberrations with piezoelectric and membrane deformable mirrors [J]. *SPIE*, 2011, 8165: 81650W-81650W-81610.
- [4] HAO Q, CHENG X, DU K. Four-group stabilized zoom lens design of two focal-length-variable elements [J]. *Optics Express*, 2013, 21(6): 7758-7767.
- [5] LIN Y H, LIU Y L, SU G D J. Optical zoom module based on two deformable mirrors for mobile device applications [J]. *Applied Optics*, 2012, 51(11): 1804-1810.
- [6] KAYLOR B M, WILSON C R, GREENFIELD N J, et al.. Miniature non-mechanical zoom camera using deformable MOEMS mirrors [J]. *SPIE*, 2012, 8252: 82520N-82520N-82527.
- [7] KAYA I, ROLLAND J P. A radial basis function method for freeform optics surfaces [C]. *Frontiers in Optics, Optical Society of America*, 2010: FThX1.
- [8] 吴禄慎,高项清,熊辉,等. 改进的非均匀有理 B 样条曲面片拼接算法[J]. 光学精密工程,2013,21:431-436.  
WU L SH, GAO X Q, XIONG H, et al.. Improved curve surface seamless splicing based on NURBS [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013, 21: 431-436. (in Chinese)
- [9] FORBES G. Manufacturability estimates for optical aspheres [J]. *Optics Express*, 2011, 19(10): 9923-9941.
- [10] KAYA I, THOMPSON K P, ROLLAND J P. Comparative assessment of freeform polynomials as optical surface descriptions [J]. *Optics Express*, 2012, 20(20): 22683-22691.
- [11] KAYA I, ROLLAND J P. Hybrid RBF and local  $\phi$ -

- polynomial freeform surfaces [J]. *Advanced Optical Technologies*, 2013, 2(1): 81-88.
- [12] KAYA I, THOMPSON K P, ROLLAND J P. Edge clustered fitting grids for  $\varphi$ -polynomial characterization of freeform optical surfaces [J]. *Optics Express*, 2011, 19(27): 26962-26974.
- [13] FORBES G. Robust, efficient computational methods for axially symmetric optical aspheres [J]. *Optics Express*, 2010, 18(19): 19700-19712.
- [14] FORBES G. Characterizing the shape of freeform optics [J]. *Optics Express*, 2012, 20(3): 2483-2499.
- [15] FORBES G. Robust and fast computation for the polynomials of optics [J]. *Optics Express*, 2010, 18(13): 13851-13862.
- [16] KAYA I, ROLLAND J. Acceleration of computation of  $\varphi$ -polynomials [J]. *Optics Express*, 2013, 21(23): 29065-29072.
- [17] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [M]. 9th ed.. Mineola: Courier Dover Publications, 1972.
- [18] SZEGÖ G. *Orthogonal Polynomials* [M]. 4th ed.. New York: American Mathematical Society, 1975.

## 作者简介:



李舒阳(1991-),女,河南洛阳人,硕士研究生,2013年于北京科技大学获得学士学位,主要从事非球面技术的研究。E-mail: lsy13@mails.tsinghua.edu.cn



郝群(1968-),女,山东人,教授,博士生导师,1990年、1993年于北京理工大学分别获得学士、硕士学位,1998年于清华大学获得博士学位,长期从事光学仪器及成像光电系统设计、测试与研制相关的科研和教学工作。E-mail: qhao@bit.edu.cn

## 导师简介:



程雪岷(1976-),女,河北人,副教授,硕士生导师,1994年、2003年于北京理工大学分别获得学士、博士学位,主要从事光学系统设计、非球面面形设计和优化技术的研究。E-mail: cheng-xm@mail.tsinghua.edu.cn