

文章编号 1004-924X(2015)11-3192-08

基于正交距离回归齿面的齿轮误差评定

林虎^{1*}, 石照耀², 薛梓¹, 杨国梁¹

(1. 中国计量科学研究院, 北京 100029;
2. 北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘要: 为了通过测量齿面拓扑轮廓来获取特征线误差, 提出了一种基于正交距离回归齿面的误差计算方法。该方法涉及的实际齿面与理论齿面匹配算法、拓扑轮廓误差的计算与分解及齿面特征线误差的评定算法进行了研究。首先, 通过坐标测量方法获取的齿面拓扑数据, 建立包含回归齿面参数的非线性方程。然后, 求解非线性方程得到回归齿面参数的最优近似解, 从而得到与实际齿面匹配的理论齿面, 拓扑测量点相对理论齿面的正交距离即为齿面拓扑误差。最后, 基于齿轮误差多自由度理论, 对实际齿面进行局部自由度及全局自由度回归, 进一步分解出齿面的齿廓误差和螺旋线误差。以一标准圆柱直齿轮的齿面拓扑测量点数据为例进行了误差计算, 结果显示: 计算的结果与直接进行特征线测量的结果差值小于 $0.5 \mu\text{m}$, 表明提出的基于正交距离回归齿面进行齿轮误差评定的方法是有效的, 可以应用于坐标类仪器检测齿轮误差。

关键词: 齿轮测量; 正交距离回归; 齿轮误差评定; 坐标测量法

中图分类号: TH721; TG86 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20152311.3192

Evaluation of gear errors based on orthogonal distance regression gear profile

LIN Hu^{1*}, SHI Zhao-yao², XUE Zi¹, YANG Guo-liang¹

(1. National Institute of Metrology, Beijing 100029, China;
2. College of Mechanical Engineering and Applied Electronic Technology,
Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

* Corresponding author, E-mail: linhu@nim.ac.cn

Abstract: To obtain the error of gear characterized curves from gear topographic inspection, a method of gear profile orthogonal distance regression was proposed. Some algorithms involved in the method were researched, such as the matching of a real gear profile with a theoretical gear profile, the calculation and decomposition of topographic error and the evaluation of profile character line error. Firstly, topographic points were obtained by coordinate measurement, and the nonlinear equation including parameters of theoretic profile was established. Then, the nonlinear equation was solved to get the optimal parameters of the regression gear profile and to obtain the theoretical gear profile matching with the real gear profile. Here, the orthogonal distances from measuring points to the theoretical gear surface were calculated as the topographic errors. Finally, based on the multi-degrees

收稿日期: 2015-04-14; 修订日期: 2015-06-10.

基金项目: 质检公益性行业科研专项资助项目 (No. 201210001)

of freedom theory for gear deviation, the gear profile error and the helix error were evaluated by local degree regression and holistic degree regression. The coordinate measuring points on a cylindrical gear were used as an example for error calculation. The results are well consistent with the characterized curves measurement using a coordinate measuring machine, and the difference is within $0.5 \mu\text{m}$. These results show that the proposed gear profile orthogonal distance regression is reasonable and effective, and it can be applied to the gear inspection using coordinate measuring machines.

Key words: gear metrology; orthogonal distance regression; evaluation of gear error; coordinate measurement method

1 引 言

齿面精度直接影响齿轮的传动精度,准确地测量和评定齿轮的齿面误差是控制齿轮质量的重要前提^[1]。齿轮齿面是复杂空间螺旋面,以齿廓、螺旋线和齿距测量为基础的分析式测量是目前控制齿轮误差的主要手段,其可以分为电子展成法和坐标测量法^[2-3]。电子展成法是依靠伺服展成系统形成标准的特征线,该标准特征线与实际特征线的偏差值即为所测特征线偏差。从原理上来说,电子展成法测量的是实际特征线展开的长度,这种方法属于比较测量,目前企业广泛使用的齿轮中心的测量方法即是电子展成法。坐标测量法则属于模型化测量,其实质是将被测零件作为一个纯几何体,将组成齿轮的空间曲面用三维空间点的坐标来描述,实际曲面上点的坐标和理论坐标的偏差即为齿面误差。基于坐标测量法的测量仪器众多,包括三坐标测量机、关节臂测量机、激光跟踪仪等。这类通用型仪器柔性强,可配备多种接触式和非接触式测头,测量软件功能全面,可胜任绝大部分复杂几何形状或自由曲面的测量任务。与电子展成法相比,坐标测量技术无需对工件进行精密调整和定位,高度的灵活性及通用性使得基于坐标测量法的测量仪器在齿轮测量领域的应用越来越广泛^[4]。

目前,应用坐标法对齿轮齿面测量可划分为三种模式:模式一首先测量出齿轮上的局部特征线(齿廓线、螺旋线),再通过评定被测特征线来反映齿面质量;模式二通过测量分布在齿面上的一系列点,获取被测齿面的拓扑误差,进一步从拓扑误差分解出局部特征线误差,从而评定齿面质量;模式三通过测量分布在齿面上的一系列点,提取出齿面原始形状信息,来重构真实齿面,从而进一步分析评估齿面质量。

模式一普遍应用于高精度的三坐标测量机,它要求仪器能对模型目标点进行精确的瞄准定位测量,且要求齿面加工质量一致。由于理论坐标点已知,故可以通过实际坐标点直接计算出误差,大部分三坐标测量机配套的齿轮测量模块都是基于该模式。模式二和模式三不是利用所谓的理论坐标点进行计算,而是基于实际测量的齿面点数据,按照一定的约束条件拟合出一个齿面,再进一步评定误差。后两种模式对目标点的瞄准定位要求不高,测量灵活性更大,且误差的评定是基于对齿面的拓扑误差进行的,对于齿面加工质量不一致的齿轮,结果更具有代表性,这两种模式也是目前研究的热点^[5-9],如德国 LOTZE 等提出了齿轮误差三维测量技术,它通过拟合理论齿面进行误差评定;GAO 等对齿面进行三维拟合,拟合计算过程着重考虑坐标系统的转换误差;孙殿柱对包含加工误差的真实齿面进行自由曲面拟合并进行误差计算。模式二和模式三涉及的关键技术包括测点数量及分布、滤波、曲面重构、测头半径补偿、误差分解与评定等等^[10-12]。

本文主要针对模式二中基于实际齿面点数据进行的理想齿面拟合及特征线误差评定方法展开研究。通过利用齿面的拓扑测量点进行齿面正交距离回归,基于回归齿面,计算出齿面三维拓扑误差及齿面的回归系数,从而实现局部特征线误差的评定。

2 渐开螺旋曲面的数学表征

曲面一般有参数、隐式、显式等 3 种数学表征方式,齿轮齿面是复杂的渐开螺旋曲面,如图 1 所示,常用参数方程表征,其表征方程可以有多种,基于运动学理论可以赋予齿面运动自由度。为表征齿面形状及相对于基准轴线的 3 个自由度,可以用参数 $(\alpha_i, z_i; \Phi_{i0}, r_b, \beta_b)$ 表征齿面方程

如下：

$$P(\alpha_i, z_i; \varphi_b, r_b, \beta_b) = \begin{pmatrix} r_i \cos(\varphi_b + z_i \tan \beta_b / r_b + j \cdot \text{inv} \alpha_i) \\ r_i \sin(\varphi_b + z_i \tan \beta_b / r_b + j \cdot \text{inv} \alpha_i) \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中： $r_i = \frac{r_b}{\cos \alpha_i}$, $j = \begin{cases} -1, & \text{左齿面} \\ 1, & \text{右齿面} \end{cases}$, $\text{inv} \alpha_i = \tan \alpha_i - \alpha_i$, α_i 为齿面任意点对应的压力角, z_i 为任意点对应的 Z 坐标, r_b 为基圆半径, β_b 为基圆螺旋角。

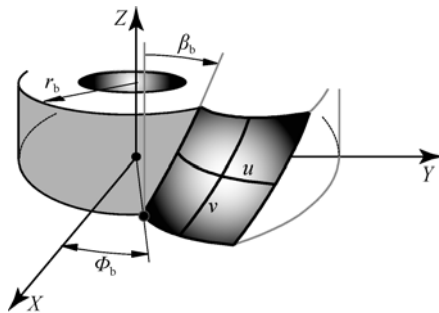


图 1 渐开螺旋面
Fig. 1 Involute helical profile

3 测量点误差的度量方式

对于一个曲面进行测量,可以将实际曲面测量点相对理论齿面的误差值用点到面的代数距离或点到面的几何距离来进行度量^[13-14]。

如图 2 所示,对于曲面 $F(\mathbf{a}; \mathbf{w}) = 0$,其测量点集为 w_i ,则测量点集到曲面的代数距离定义为 $F(\mathbf{a}; w_i)$,代数距离通常没有实际的物理意义,但对于特殊的例子,如平面,其物理意义可以理解为测量点集在 Z 轴方向到平面的距离。

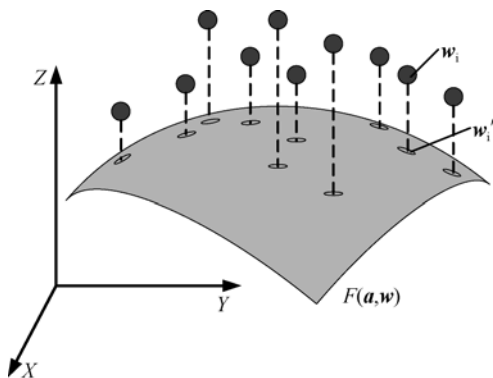


图 2 点到曲面的代数距离
Fig. 2 Algebraic distance from point to surface

几何距离也可称为正交距离,如图 3 所示,对于曲面 $F(\mathbf{a}; \mathbf{w}) = 0$,给定点集 w_i ,如果 $F(\mathbf{a}; w_i) \neq 0$,那么在曲面上存在正交投影点集 w'_i ,定义 $\|w_i - w'_i\|$ 为点集 w_i 到曲面 $F(\mathbf{a}; \mathbf{w}) = 0$ 的几何距离。

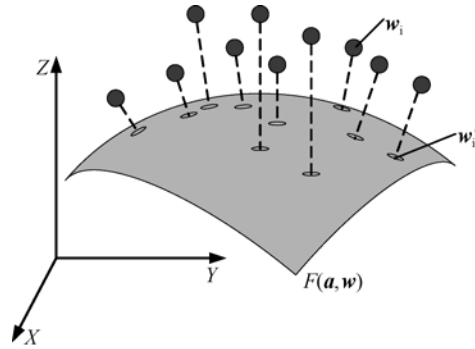


图 3 点到曲面的几何距离
Fig. 3 Geometric distance from point to surface

对于齿轮而言,点到齿面的代数距离没有实际的物理意义,不便于误差的理解。而点到齿面的几何距离是点相对齿面的正交投影距离,也是点到齿面的最近距离。齿面的几何距离定义是非常重要的,根据渐开螺旋齿面的空间几何原理^[15]可知,齿面的垂直线与齿轮基圆柱相切,而齿轮误差是渐开线的垂直线,也与基圆相切,因此只要把齿面几何距离向端面投影即可得到齿轮误差。

4 实际齿面与理论齿面的最优匹配算法

由于加工误差的存在,实际齿面的拓扑轮廓与理论齿面存在差异。实际齿面的系列测量点到理论齿面的几何距离即为测量点对应的拓扑轮廓误差值。要计算测量点对应的几何距离,需要先获取实际齿面对应的理论齿面,这涉及到实际齿面与理论齿面的匹配,即测量点集与理论齿面的匹配,这实际上是一种受约束的拟合,目的是要利用测量点集拟合出一张形状与设计齿面完全相同的齿面,只不过存在所谓的自由度运动误差,其可以通过拟合后的理论齿面的自由度参数表征。测量点集与理论齿面的匹配需有一个匹配准则,因此,本文建立了一个目标函数,匹配的结果就是使目标函数最小。

选择不同的目标函数就会形成不同的齿面拓扑轮廓误差评定方法,常用的评定方法有:

(1)最小二乘方法或高斯方法。这是目前应用最广泛、也是齿轮相关标准中推荐的方法^[16-17],该方法需要满足的条件是测量点集到齿面的正交距离平方和最小:

$$\sum_{i=1}^n \| \mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i \|^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

需要注意的是,在整个匹配过程中始终要满足正交距离这个约束关系。例如对于图 3 所示的测量点,当曲面运动时,对应的最近匹配点也在曲面上运动,测量点对应的最近匹配点始终是唯一的,始终需要满足测量点与最近匹配点之间的最短距离约束。

(2)最小区域方法。该方法是形状误差相关标准推荐的方法,但由于求解过程复杂,还未应用于齿轮误差评定中,其需要满足的条件是:

$$\max(\| \mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i \|) \rightarrow \min. \quad (3)$$

以正交距离为误差度量,实际齿面与理论齿面的最优匹配算法也可称为齿面正交距离回归算法 (Gear Profile Orthogonal Distance Regression, GPODR)。对于实际齿面,通过测量点集进行最优匹配所确定的理论齿面即为最小二乘齿面或正交回归齿面。

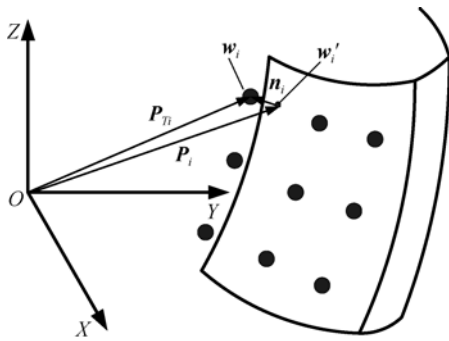


图 4 齿面正交距离回归原理
Fig. 4 Principle of GPODR method

如图 4 所示,在齿轮坐标系 OXYZ 中,实际齿面的测量点集为 \mathbf{w}_i ,对应的矢量集为 \mathbf{P}_{Ti} , \mathbf{w}_i 在正交回归齿面上的最近匹配点为 \mathbf{w}'_i , \mathbf{w}'_i 对应的矢量集为 \mathbf{P}_i , \mathbf{n}_i 为与 \mathbf{w}_i 对应的正交距离单位矢量。令正交距离 $\| \mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i \| = f_i$,则由矢量关系可以得到:

$$\mathbf{P}_{Ti} - \mathbf{P}_i = \mathbf{n}_i \cdot f_i \quad (4)$$

$$\Rightarrow f_i = \mathbf{n}_i^T \cdot (\mathbf{P}_{Ti} - \mathbf{P}_i). \quad (5)$$

基于小偏差假设^[18],对应每个测量点有:

$$\begin{cases} f_1 = \mathbf{n}_1^T \cdot (\mathbf{P}_{T1} - \mathbf{P}_1) \approx 0 \\ f_2 = \mathbf{n}_2^T \cdot (\mathbf{P}_{T2} - \mathbf{P}_2) \approx 0 \\ \dots \\ f_n = \mathbf{n}_n^T \cdot (\mathbf{P}_{Tn} - \mathbf{P}_n) \approx 0 \end{cases} \quad (6)$$

上式为非线性超定方程组,需要先简化为线性方程组,然后再求解,本文利用牛顿迭代法进行求解^[19]。假设存在 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$,满足:

$$\mathbf{F}^* (\alpha_i, z_i; \varphi_b^*, r_b^*, \beta_b^*) = \mathbf{n}_i^{*T} \cdot (\mathbf{P}_{Ti} - \mathbf{P}_i^*) = 0, \quad (7)$$

则称 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$ 是非线性方程组式 (6) 的最优解。

假设 $(\Phi_b^k, r_b^k, \beta_b^k)$ 是 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$ 的第 k 次近似解,将 $\mathbf{F}^* (\alpha_i, z_i; \varphi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$ 在 $(\Phi_b^k, r_b^k, \beta_b^k)$ 处 Taylor 展开,得:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* (\alpha_i, z_i; \varphi_b^*, r_b^*, \beta_b^*) = & \mathbf{n}_i^{(k)T} \cdot (\mathbf{P}_{Ti} - \mathbf{P}_i^{(k)}) - \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \varphi_b} \Delta \varphi_b - \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial r_b} \Delta r_b - \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \beta_b} \Delta \beta_b = \\ & \mathbf{n}_i^{(k)T} \cdot (\mathbf{P}_{Ti} - \mathbf{P}_i^{(k)}) - \mathbf{n}_i^{(k)T} \cdot \mathbf{J}^{(k)} (\varphi_b, r_b, \beta_b) \begin{bmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{bmatrix} = \\ & \mathbf{F}_i^k (\alpha_i, z_i; \varphi_b^k, r_b^k, \beta_b^k) - \mathbf{n}_i^{(k)T} \cdot \mathbf{J}^{(k)} (\varphi_b, r_b, \beta_b) \begin{bmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{J}^{(k)} (\varphi_b, r_b, \beta_b)$ 为关于 (Φ_b, r_b, β_b) 的 Jacobian 矩阵:

$$\mathbf{J}^{(k)} (\varphi_b, r_b, \beta_b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \varphi_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial r_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \beta_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_{ix}}{\partial \varphi_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{ix}}{\partial r_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{ix}}{\partial \beta_b} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_{iy}}{\partial \varphi_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{iy}}{\partial r_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{iy}}{\partial \beta_b} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_{iz}}{\partial \varphi_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{iz}}{\partial r_b} & \frac{\partial \mathbf{P}_{iz}}{\partial \beta_b} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_i^{(k)T} \cdot \mathbf{J}^{(k)}(\varphi_b, r_b, \beta_b) = \left[-r_b^k \cos \beta_b^k \quad \cos \beta_b^k \tan \alpha_i + \frac{z_i}{r_b^k} \sin \beta_b^k \quad -\frac{z_i}{\cos \beta_b^k} \right]. \quad (10)$$

因此,非线性方程组(6)可以简化为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^{(k)T} \cdot (\mathbf{P}_{T1} - \mathbf{P}_1^{(k)}) \\ \mathbf{n}_2^{(k)T} \cdot (\mathbf{P}_{T2} - \mathbf{P}_2^{(k)}) \\ \dots \\ \mathbf{n}_n^{(k)T} \cdot (\mathbf{P}_{Tn} - \mathbf{P}_n^{(k)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_b^k \cos \beta_b^k & \cos \beta_b^k \tan \alpha_1 + \frac{z_1}{r_b^k} \sin \beta_b^k & -\frac{z_1}{\cos \beta_b^k} \\ -r_b^k \cos \beta_b^k & \cos \beta_b^k \tan \alpha_2 + \frac{z_2}{r_b^k} \sin \beta_b^k & -\frac{z_2}{\cos \beta_b^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -r_b^k \cos \beta_b^k & \cos \beta_b^k \tan \alpha_n + \frac{z_n}{r_b^k} \sin \beta_b^k & -\frac{z_n}{\cos \beta_b^k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} \approx 0. \quad (11)$$

进一步简化为:

$$\mathbf{A}^k \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \mathbf{F}^k. \quad (12)$$

式(12)是关于 $(\Delta \varphi_b, \Delta r_b, \Delta \beta_b)$ 的线性超定方程组,不存在通常意义下的解,但是可以考虑更为广泛意义上的解,即最小二乘解,给出目标函数:

$$\mathbf{F}^{*T}(\alpha_i, z_i; \varphi_b^*, r_b^*, \beta_b^*) \mathbf{F}^*(\alpha_i, z_i; \varphi_b^*, r_b^*, \beta_b^*) \rightarrow \min$$

$$(13) \quad \text{令:}$$

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{A}^k =$$

$$\begin{pmatrix} nr_b^{k2} \cos^2 \beta_b^k & -r_b^k \cos^2 \beta_b^k \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i - \sin \beta_b^k \cos \beta_b^k \sum_{i=1}^n z_i & r_b^k \sum_{i=1}^n z_i \\ -r_b^k \cos^2 \beta_b^k \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i - \sin \beta_b^k \cos \beta_b^k \sum_{i=1}^n z_i & \sum_{i=1}^n \left(\cos \beta_b^k \tan \alpha_i + \frac{z_i}{r_b^k} \sin \beta_b^k \right)^2 & -\sum_{i=1}^n z_i^2 \tan \alpha_i - \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 \tan \beta_b^k}{r_b^k} \\ r_b^k \sum_{i=1}^n z_i & -\sum_{i=1}^n z_i^2 \tan \alpha_i - \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 \tan \beta_b^k}{r_b^k} & \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{\cos^2 \beta_b^k} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

令:

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} -r_b^k \cos \beta_b^k \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^k(\alpha_i, z_i; \varphi_b^k, r_b^k, \beta_b^k) \\ \cos \beta_b^k \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \mathbf{F}_i^k(\alpha_i, z_i; \varphi_b^k, r_b^k, \beta_b^k) + \frac{\sin \beta_b^k}{r_b^k} \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{F}_i^k(\alpha_i, z_i; \varphi_b^k, r_b^k, \beta_b^k) \\ -\frac{\sum_{i=1}^n z_i \mathbf{F}_i^k(\alpha_i, z_i; \varphi_b^k, r_b^k, \beta_b^k)}{\cos \beta_b^k} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$\mathbf{N}^k = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{A}^k$ 为对称正定矩阵,根据对称正定矩阵的 Cholesky 分解方法知,存在唯一的非奇异下三角矩阵 \mathbf{L}^k ,使得:

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{A}^k = \mathbf{L}^k \mathbf{L}^{kT}. \quad (18)$$

式(15)可以化简为:

$$\mathbf{L}^k \mathbf{L}^{kT} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{F}^k, \quad (19)$$

$$\mathbf{L}^k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{F}^k \mathbf{L}^{kT} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

式(14)是关于齿面正交距离的最小二乘评定的目标函数,下面用矩阵分解法进一步分析.

将式(12)两边各乘以 \mathbf{A}^{kT} ,得到:

$$\mathbf{A}^{kT} \mathbf{A}^k \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{kT} \mathbf{F}^k. \quad (15)$$

上式为三角形方程组,置精度要求 ϵ , 如果满足:

$$|\Delta r_b| + r_b |\Delta \varphi_b| + b |\Delta \beta_b| < \epsilon, \quad (21)$$

则停止迭代(上式中 b 为齿宽), 由于:

$$\begin{pmatrix} \varphi_b^* - \varphi_b^k \\ r_b^* - r_b^k \\ \beta_b^* - \beta_b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_b^* \\ r_b^* \\ \beta_b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_b^k + \Delta \varphi_b \\ r_b^k + \Delta r_b \\ \beta_b^k + \Delta \beta_b \end{pmatrix}. \quad (23)$$

这样就可以获取非线性方程组(6)的最优解 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$ 。

否则,令:

$$\begin{pmatrix} \varphi_b^{k+1} \\ r_b^{k+1} \\ \beta_b^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_b^k + \mu_k \Delta \varphi_b \\ r_b^k + \mu_k \Delta r_b \\ \beta_b^k + \mu_k \Delta \beta_b \end{pmatrix}. \quad (24)$$

为了防止系数矩阵奇异或者病态,加入阻尼因子 μ_k , 其一般取一个很小的正数。重复迭代过程式(8)至式(24), 直至满足要求。

非线性方程组(6)的最优解 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$ 即是正交回归齿面的 3 个关键自由度参数, 这样就可以计算每个测量点对应的拓扑轮廓误差, 并进一步分解出局部特征线误差。

5 齿面拓扑误差分解

基于齿轮误差多自由度理论从齿面拓扑轮廓误差分解出局部特征线误差^[20]。根据该理论知, 齿廓总偏差或螺旋线总偏差对应局部自由度回归, 求解正交回归系数 Φ_b^* , 则式(15)可以等效为:

$$\begin{pmatrix} n_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_b \\ \Delta r_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

在端截面上计算测量点到正交回归齿面的法向距离 f_{ia} ($i=1 \cdots n$), 则端面齿廓总偏差的计算公式见式(26), 齿面齿廓的总偏差为多个端面齿廓总偏差的最大值。

$$F_\alpha = [\max(f_{ia}) - \min(f_{ia})] / \cos \beta_b. \quad (26)$$

在径向截面上计算点到正交回归齿面的法向距离 $f_{i\beta}$ ($i=1 \cdots n$), 则径向截面螺旋线总偏差的计算公式见式(27), 齿面的螺旋线总偏差为多个径向截面螺旋线总偏差的最大值。

$$F_\beta = [\max(f_{i\beta}) - \min(f_{i\beta})] / \cos \beta_b. \quad (27)$$

齿廓形状和倾斜偏差对应全局自由度回归, 求解正交回归系数为 $(\Phi_b^*, r_b^*, \beta_b^*)$, 在端截面上计算每个测量点到正交回归齿面的法向距离 f_{ia} ($i=1 \cdots n$), 并计算齿廓的展开长度 L_α , 则端面齿廓形状偏差的计算公式见式(28), 齿面的形状偏差为多个端面形状偏差的最大值, 齿面倾斜偏差的计算公式见式(29)。

$$f_{ia} = [\max(f_{ia}) - \min(f_{ia})] / \cos \beta_b, \quad (28)$$

$$f_{H\alpha} = (r_b^* - r_b) \cdot \frac{L_\alpha}{r_b}. \quad (29)$$

在径向截面上计算每个测量点到正交回归齿面的法向距离 $f_{i\beta}$ ($i=1 \cdots n$), 并计算螺旋线的展开长度 L_β , 则径向截面螺旋线形状偏差的计算公式见式(30)。齿面的形状偏差为多个截面螺旋线形状偏差的最大值, 齿面螺旋线倾斜偏差的计算公式见式(31)。

$$f_{i\beta} = [\max(f_{i\beta}) - \min(f_{i\beta})] / \cos \beta_b, \quad (30)$$

$$f_{H\beta} = L_\beta (\tan \beta_b^* - \tan \beta_b). \quad (31)$$

6 实验验证

为了验证基于正交距离回归齿面的误差评定方法的有效性, 可以采用模式一和模式二分别对同一齿面进行误差评定, 此时要求齿面加工一致性较好, 这样基于局部特征线的评定结果和基于齿面拓扑评定结果才有可能一致。

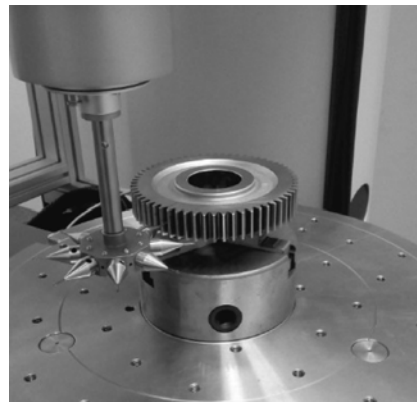


图 5 用三坐标测量机测量齿轮

Fig. 5 Gear measurement with a CMM

如图 5 所示, 在一台高精度三坐标测量机 (PMM-C) 上对一标准圆柱直齿轮开展不同模式下的测量, 齿轮的参数如表 1 所示。

表 1 圆柱齿轮参数

Tab. 1 Basic parameters of cylinder gear

参数	数值
齿数 z	60
法向模数 m_n/mm	2
法向压力角 $\alpha_n/(\circ)$	20
齿宽 b/mm	20
螺旋角 $\beta/(\circ)$	0
基圆半径 r_b/mm	56.382

模式二下的测量只是利用了齿面拓扑测量点的坐标值作为后续误差计算和评定的基础。图 6 为某一齿槽对应左右齿面拓扑测量点的分布图。对于单个齿面,测量点共 100 个,其由 4 段渐开线及 4 段螺旋线组成,每段渐开线测量点数为 9,每段螺旋线测量点数为 16。

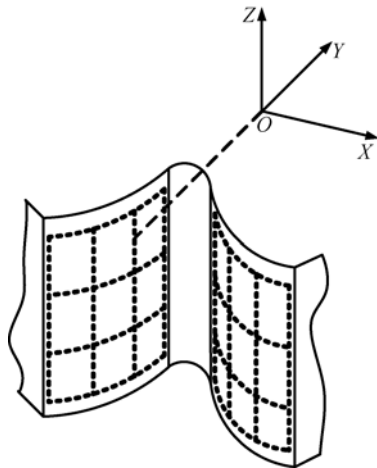


图 6 齿面测量点分布示意图

Fig. 6 Distribution of measurement points on gear profile

利用 GPODR 分别求出左右齿面的正交回归系数 $\Phi_{bL}^* = 270.597^\circ$, $\Phi_{bR}^* = 271.881^\circ$, 并由式(26)、(27)计算出左右齿面的齿廓总偏差或螺旋线总偏差,列于表 2。

利用 GPODR 分别求解左右齿面的正交回归系数 $\Phi_{bL}^* = 270.598^\circ$, $r_{bL}^* = 56.376 \text{ mm}$, $\beta_{bL}^* = 0.0021^\circ$, $\Phi_{bR}^* = 271.881^\circ$, $r_{bR}^* = 56.374 \text{ mm}$, $\beta_{bR}^* =$

参考文献:

- [1] GOCH G. Gear metrology [J]. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2003, 52(2): 659-695.
 [2] 石照耀, 费业泰, 谢华银. 齿轮测量技术 100

0.0008°, 并依据式(28)~(31)计算出齿面齿廓/螺旋线形状偏差及齿廓/螺旋线倾斜偏差列于表 2。

表 2 中左右齿面模式一的结果是由坐标机分别在齿面中间截面对渐开线及分度圆上对螺旋线自动测量并评定的结果,对比模式二的结果可以看到,两者基本一致,差值小于 0.5 μm 。这表明基于正交距离回归齿面进行齿轮误差评定的方法是正确有效的。需要进一步说明的是,上述一致性只针对齿面加工质量一致性较好的标准齿轮,对于齿面质量加工不一致的情况,两种模式测量的结果是不一致的,其中模式一的测量结果只是局部特征线的结果,具有局限性;而模式二的测量结果更能反映整个齿面的真实加工质量。

表 2 齿面误差评定值及名义值

Tab. 2 Evaluated and nominal values of profile error (μm)

偏差项	左齿面		右齿面	
	模式二	模式一	模式二	模式一
F_α	1.41	1.5	1.53	1.5
f_{fa}	1.28	1.3	1.29	0.9
f_{Ha}	-0.63	-0.8	-0.99	-1.2
F_β	0.81	0.8	0.67	0.5
$f_{f\beta}$	0.30	0.3	0.36	0.4
$f_{H\beta}$	0.59	0.6	0.22	0.3

7 结 论

本文通过测量分布在实际齿面上的一系列点,基于齿面正交距离回归算法拟合出与实际齿面匹配的理论齿面,进一步计算测量点对应的拓扑误差,并分解出局部特征线误差,从而评定齿面各项误差值。本文方法对一标准圆柱齿轮的齿面拓扑点数据的计算结果与直接进行特征线测量结果的差值小于 0.5 μm ,说明所提方法是正确有效的。

年——回顾与展望 [J]. *中国工程科学*, 2003, 5(9): 13-17.

SHI ZH Y, FEI Y T, XIE H K. 100 years of gear measurement technology-review & prospect [J]. *Engineering Science*, 2003, 5(9): 13-17. (in Chinese)

[3] HAERTIG F, LIN H, KNIEL K, et al.. Standard

- conforming involute gear metrology using an articulated arm coordinate measuring system [J]. *Measurement Science & Technology*, 2012, 23(10):1-6.
- [4] 林虎, FRANK H, KARIN K, 等. 基于便携式坐标测量机的大齿轮测量方法 [J]. *光学精密工程*, 2013, 21(7):1763-1770.
LIN H, FRANK H, KARIN K, *et al.*. Measurement of large gears by using portable coordinate measuring machines [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013, 21(7):1763-1770. (in Chinese)
- [5] LOTZE W, HAERTIG F. 3D gear measurement by CMM [C]. *Proceedings of Laser Metrology and Machine Performance*, Birmingham, UK, 2001: 333-344.
- [6] GAO C H, CHENG K, WEBB D. Investigation on sampling size optimization in gear tooth surface measurement using a CMM [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2004, 24(7):599-606.
- [7] PETERS J, GOCH G, GUENTHER A. Helical gear measurement using structured light [C]. *Proceedings of the XVI IMEKO World Congress*, Wien, 2000: 227-230.
- [8] YOHAN K, KAZUYUKI S, SONKO O, *et al.*. Optimized measurement strategy for multiple-orientation technique on coordinate measuring machines [J]. *Measurement Science & Technology*, 2009, 20(10): 1-8.
- [9] 孙殿柱,董学朱. 描述真实齿面数学模型的研究 [J]. *农业机械学报*, 2000, 31(1):79-81.
SUN D ZH, DONG X ZH. Research on the mathematical model describing real gear surface [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2000, 31(1):79-81. (in Chinese)
- [10] BLUNT L, JIANG X, STOUT K J. Developments in 3D surface metrology [J]. *Transactions on Engineering Sciences*, 1999, 23:255-265.
- [11] PFEIFER T, KUROKAWA S, MEYER S. Derivation of parameters of global form deviations for 3-dimensional surfaces in actual manufacturing processes [J]. *Measurement*, 2001, 29(3): 179-200.
- [12] LEOPOLD J, GUENTHER A. Fast 3-D measurement of gear wheels [C]. *Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation*, 2002, 4900: 185-94.
- [13] SUNG J A. Orthogonal distance fitting of implicit curves and surfaces [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(5): 620-638.
- [14] ATIEG A, WATSON G A. A class of methods for fitting a curve or surface to data by minimizing the sum of squares of orthogonal distances [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 158(2): 277-296.
- [15] LITVIN F L, FUENT A. *Gear Geometry and Applied Theory* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004:105-120.
- [16] ISO1328-1:1995, Cylindrical gears-ISO system of accuracy-Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth[S].
- [17] VDI/VDE 2607 Computer-aided evaluation of profile and helix measurements on cylindrical gears with involute profile[S].
- [18] 熊有伦.精密测量中的数学方法 [M]. 北京: 中国计量出版, 1989:24-26.
XIONG Y L. *Mathematical Method of Precision Measuring* [M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 1989:24-26. (in Chinese)
- [19] MADSEN K, NIELSEN H B, TINGLEFF O. Methods for non-linear least squares problems [J]. *Informatics and Mathematical Modelling Technical*, 2004, 17-47.
- [20] 石照耀,林虎. 齿轮误差多自由度理论 [J]. *机械工程学报*, 2014, 50(1):55-60.
SHI ZH Y, LIN H. Multi-degrees of freedom theory for gear deviation [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(1):55-60. (in Chinese)

作者简介:



林 虎(1984—)男,广西玉林人,博士,助理研究员,2013 年于北京工业大学获得博士学位,现在于中国计量科学研究院博士后工作站工作,主要研究方向为齿轮精密测量技术的研究。E-mail: linhu@nim. ac. cn



石照耀(1964—)男,湖南岳阳人,博士,教授,教育部长江学者特聘教授,博士生导师,主要研究方向为齿轮工程及精密测试技术与仪器。E-mail: shizhaoyao@bjut. edu. cn