

文章编号 1004-924X(2016)01-0119-07

抗拉柔性铰链的理论建模及有限元分析

曹 毅^{1,2,3,4*}, 刘 凯¹, 单春成¹, 王 强¹

(1. 江南大学 机械工程学院, 江苏 无锡 214122;

2. 上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240;

3. 上海交通大学 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240;

4. 哈尔滨工业大学 机器人技术与系统国家重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要:为了在保持转动刚度变化不大的情况下,使得 LET (Lamina Emergent Torsion) 柔性铰链能够适用于存在轴向载荷的场合,即拥有较大的轴向刚度,本文对 LET 的结构进行了适当改进,设计了一种新型柔性铰链——抗拉 LET 柔性铰链。基于抗拉 LEMs (Lamina Emergent Mechanisms) 柔性铰链结构,将整个抗拉 LET 柔性铰链等效为弹簧刚度模型,并对该弹簧刚度模型进行理论建模,得到封闭解。之后采用 ANSYS 软件,建立其有限元模型,分析其在转动载荷和轴向载荷两种不同场合下的形变,并同之前的理论模型进行比较。结果表明,采用弹簧刚度模型得到的等效刚度解与仿真分析结果较为一致,抗拉 LET 柔性铰链的弯曲刚度仅是传统 LET 柔性铰链的 1.12 倍,而拉伸刚度却是它的 76.43 倍。在弯曲刚度没有大幅变化情况下,抗拉 LET 柔性铰链的抗拉刚度明显增大,抗拉能力大大提高,表明抗拉 LET 柔性铰链的结构设计符合预期要求。

关键词:抗拉柔性铰链; LEMs; LET; 弹簧刚度模型; 有限元分析

中图分类号: TH132 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20162401.0119

Theory modeling and finite element analysis of tensile flexure hinge

CAO Yi^{1,2,3,4*}, LIU Kai¹, SHAN Chun-cheng¹, WANG Qiang¹

(1. School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai 200240, China;

3. Key Laboratory of System Control and Information Processing, Shanghai 200240, China;

3. State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin 150080, China)

* Corresponding author, E-mail: caoyi@jiangnan.edu.cn

Abstract: To increase the axial stiffness of a Lamina Emergent Torsion (LET) under the condition of invariable rotational stiffness, a new tensile flexure hinge was designed by improving traditional LET structures. Base on the structure of Lamina Emergent Mechanisms (LEM), the whole LET structure

收稿日期: 2015-06-20; **修订日期:** 2015-07-25.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50905075); 机械系统与振动国家重点实验室开放课题资助项目 (No. MSV-201407); 系统控制与信息处理教育部重点实验室开放基金资助项目 (No. scip-201506); 机器人技术与系统国家重点实验室开放基金资助项目 (No. SKLRS-2016-KF-06); 江苏省普通高校学术学位研究生科研创新计划资助项目 (No. KYLX-1115)

was equal to a spring stiffness model. By modeling the spring stiffness model in theory, the closed-form solution was obtained. Then, a Finite Element Analysis (FEA) model was set up by the ANSYS to analyze the deformations under the rotating load and axial load and to compare with the previous theoretical model. Results show that the equivalent stiffness solution based on spring stiffness model is consistent with that of the simulation analysis, in which the bending tensile stiffness of the tensile LET is only 1.2 times that of the LET, but tensile stiffness is 76.43 times that of the LET. It indicates that the bending stiffness does not increase obviously, but the tensile stiffness of the tensile LET has significantly increased effectively and the tensile capacity of the LET is improved greatly. The design of the tensile LET meets expectation.

Key words: tensile flexure hinge; Lamina Emergent Mechanism(LEM); Lamina Emergent Torsion(LET); spring stiffness model; Finite Element Analysis(FEA)

1 引言

Lamina Emergent Mechanisms (LEMs) 是近几年由美国学者 Larry L. Howell 提出的一种从平面材料中制造,并且能够浮出制造平面的新型柔顺机构^[1]。LEMs 在拥有其他柔顺机构优点的同时还具有以下:可用简单的拓扑结构实现精密复杂的机械任务;能采用成本较低的加工工艺;LEMs 的平面特性使其在储藏和运输成本方面具有优势。

Wilding 将球面机构和 LEMs 简洁紧凑的特性相结合,获得了 21 种球面 LEMs 四杆机构^[2]。Gollnick 通过观察已经存在于自然界的多层组织或结构,提出了多层 LEMs (MLEMs) 概念^[3]。Parise 将 LEMs 的概念应用于弹簧中,设计了一种邻平面直线运动弹簧^[4]。楚红岩采用刚体替代法的思想,设计了一种多层 LEMs(MLEM)s^[5]。王涛针对已有的 LEMs 四杆机构,研究了其各特征参数对 LEMs 四杆机构性能的影响^[6]。邱丽芳设计并优化了一种双稳态高平行度微夹持 LEMs 机构^[7]。

由于 LEMs 属于分布式全柔性机构,需要在设计之初就将运动副嵌入初始平面中,因此设计适用于 LEMs 的运动副就成为重要的研究内容之一。Jacobsen 等人设计了一种目前较常用的转动副 LET (Lamina Emergent Torsion)^[8]。Ferrell 研究了适用于由平面金属薄板转动副设计的 3 条准则,设计了两种新型运动副(RUFF 和 TUFF)^[9]。周慧将 LET 中间的矩形替换为环形,得到了一种不同的柔性铰链^[10]。韦志鸿基于

VC++ 设计了一套 LET 参数化分析系统,实现了 LET 的参数化设计^[11]。

为提高 LEMs 的抗拉强度,设计了抗拉 LET。建立有限元模型,并同之前的理论模型进行比较,结果表明抗拉 LET 的抗拉刚度明显增大,有效提高了抗拉能力,其结构设计符合预期要求。

2 抗拉 LET 等效弹簧刚度模型

如图 1 所示,抗拉 LET 主要由两部分组成,扭转片段和拉伸片段,以及一些连接片段。该抗拉 LET 的工作情况主要分为两种:(1)当抗拉 LET 两端承受弯矩时,扭转片段主要承受扭矩,可将该扭转片段等效为受扭矩作用的矩形截面梁,而拉伸片段则主要承受弯矩,可将其等效为一端受压力作用的悬臂梁;(2)当抗拉 LET 两端承受拉力时,扭转片段主要承受弯矩,可将其等效为一端受压力作用的悬臂梁,而拉伸片段主要承受拉力,可将该片段等效为受拉力作用的矩形截面梁。

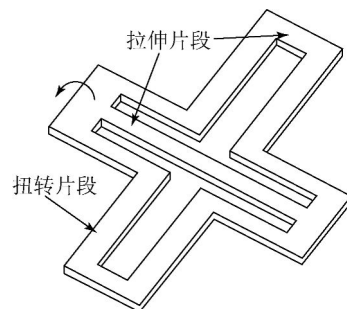


图 1 抗拉 LET 柔性铰链

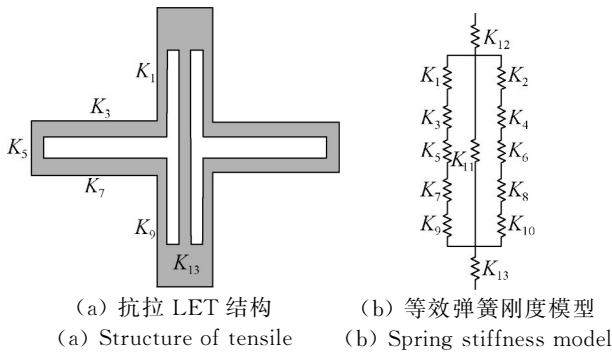
Fig. 1 Tensile LET flexure hinge

2.1 载荷为弯矩时的等效刚度模型

抗拉 LEMs 柔性铰链结构及相对应的等效弹簧刚度模型如图 2 所示,当其载荷为弯矩时,其力-形变关系由其等效刚度 $k_{\text{eq},\text{bend}}$ 确定,而 $k_{\text{eq},\text{bend}}$ 取决于柔性铰链的具体结构:

$$T = k_{\text{eq},\text{bend}} \theta, \quad (1)$$

其中: T 为作用于铰链上的总弯矩; $k_{\text{eq},\text{bend}}$ 为铰链的等效刚度; θ 为铰链的转动角度 (rad)。



(a) 抗拉 LET 结构 (b) 等效弹簧刚度模型
(a) Structure of tensile (b) Spring stiffness model

图 2 抗拉 LET 结构及其等效弹簧刚度模型

Fig. 2 Tensile LET structure and its spring stiffness model

为了得到等效刚度 $k_{\text{eq},\text{bend}}$, 将柔性铰链等效为如图 2(b) 所示的弹簧组合模型, 其中, k_1, k_3, k_5, k_7, k_9 为串联组合, $k_2, k_4, k_6, k_8, k_{10}$ 为串联组合, 之后将上述两组串联组合与 k_{11} 并联, 再在两端串联 k_{12} 和 k_{13} , 建立等效刚度。

$$k_{\text{eq},\text{bend}} = \frac{(2k_{\text{sum}} + k_{B1})k_{B3}}{2 \times (2k_{\text{sum}} + k_{B1}) + k_{B3}}, \quad (2)$$

其中: $k_{\text{sum}} = \frac{k_{B1} k_{B2} k_T}{2k_{B2} k_T + 2k_{B1} k_{B2} + k_{B1} k_T}$; k_{B_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 为弯曲部分等效弹簧刚度; k_T 为扭转部分等效弹簧刚度。

弯曲部分形变可视为悬臂梁自由端受力矩作用的最大挠度, 因此, 其等效弹簧刚度 k_{B_i} 为:

$$k_{B_i} = \frac{EI_{B_i}}{L_{B_i}}, \quad (3)$$

其中: E 为弹性模量; I_{B_i} 为弯曲部分的惯性矩; L_{B_i} 为弯曲部分的长度。

对于扭转部分等效弹簧刚度, 有^[8]:

$$k_T = \frac{K_i G}{L_i}, \quad (4)$$

其中: L_i 为扭转部分的长度; G 为剪切模量; K_i 为扭转部分截面形状相关参数。

关于 K_i , 由于 Chen 和 Howell^[12] 提出的近

似方程精度较高且不受宽厚比变化的影响, 因此采用其近似方程:

$$k_i = \frac{t\omega^3}{3.5 + 3.5\omega^2/t^2}, \quad (5)$$

其中: ω 为扭转部分宽度; t 为扭转部分厚度。

2.2 载荷为拉力时的等效刚度模型

抗拉 LET 受拉力作用时, 其拉力 P 与总位移 d 的关系为:

$$P = K_{\text{eq},\text{pull}} d. \quad (6)$$

同样采用等效刚度模型:

$$k_{\text{eq},\text{pull}} = \frac{(k_{G1} + k_{P1})k_{P2}}{2(k_{G1} + k_{P1}) + k_{P2}}, \quad (7)$$

式中: k_{P_i} ($i = 1, 2$) 为拉伸部分等效弹簧刚度; k_{G1} 为扭转部分等效弹簧刚度。

其值分别为:

$$k_{G1} = \frac{4K_\theta EI}{\gamma L^3}, \quad (8)$$

$$k_{P_i} = \frac{EA}{L}, \quad (9)$$

式中: E 为弹性模量; A 为梁的截面面积; L 为梁的长度。

3 传统 LET 等效弹簧刚度模型

3.1 载荷为弯矩时的等效刚度模型

由于等效扭转刚度的值往往远大于等效弯曲刚度, 因此载荷为弯矩时的等效刚度模型为:

$$K_{\text{eq},a} = K_T, \quad (10)$$

其中: 等效扭转刚度 K_T 为:

$$K_T = \frac{K_i G}{L_i}, \quad (11)$$

式中: G 为材料剪切模量; K_i 为与扭转部分截面形状相关系数; L_i 为扭转部分的长度。其中: K_i 可用式(5)计算得到。

3.2 载荷为拉力时的等效刚度模型

当 LET 两端受拉力作用时, 由于连接部分的刚度远大于扭转部分, 其等效刚度简化为固定-导向梁伪刚体模型的刚度, 因此有:

$$K_{\text{eq},b} = \frac{4K_\theta EI}{\gamma L^3}, \quad (12)$$

式中: γ 以及 K_θ 通常采用近似值为 $\gamma = 0.85$, $K_\theta = 2.65$; E 为弹性模量; I 为梁的惯性矩; L 为固定-导向梁的长度。

4 两种柔性铰链的分析实例

以某种工程塑料为例,说明两种铰链在不同载荷下的等效刚度。材料弹性模量为 2 200 MPa,泊松比为 0.34,厚度为 0.8 mm。其中,传统 LET 结构中各尺寸名称及数值如图 3 及表 1 所示。

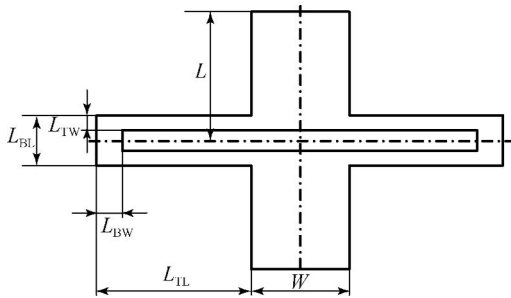


图 3 传统 LET 尺寸命名

Fig. 3 Traditional LET size naming

表 1 传统 LET 各尺寸

Tab. 1 Traditional LET size values (mm)

变量	L	W	L _{BL}	L _{BW}	L _{TW}	L _{TL}	t
值	25	19	10	5	3	30	0.8

根据剪切模量公式 $G = E/2(1 + \nu)$, 剪切模量 $G = 820.9 \text{ MPa}$, 根据式(10), 计算得到 $K_{eq. a} = 11.657 \text{ N} \cdot \text{mm}/\text{rad}$, 当在铰链两端施加弯矩 $T = 1 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 时, 可以得到其输出转角 $\theta = 8.58 \times 10^{-2} \text{ rad}$ 。

当载荷为拉力时, 可根据式(12)计算, 计算得到 $K_{eq. b} = 1.829 \text{ N}/\text{mm}$, 当两端拉力 $F = 1 \text{ N}$ 时, 可以得到其位移 $d = 0.547 \text{ mm}$ 。

为了与传统 LET 柔性铰链进行更好的对比, 将抗拉 LET 柔性铰链的外形尺寸设计为与传统 LET 相同, 抗拉 LET 柔性铰链的各尺寸命名及尺寸值如图 4 和表 2 所示。

抗拉 LET 柔性铰链的材料弹性模量同样为 2 200 MPa, 泊松比为 0.34, 剪切模量 $G = 820.9 \text{ MPa}$ 。当铰链两端承受弯矩时, 计算得到载荷为弯矩时的总刚度 $K_{eq. bend} = 13.00 \text{ N} \cdot \text{mm}/\text{rad}$ 。当在铰链两端施加弯矩 $T = 1 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 时, 可以得到其输出转角 $\theta = 7.69 \times 10^{-2} \text{ rad}$ 。

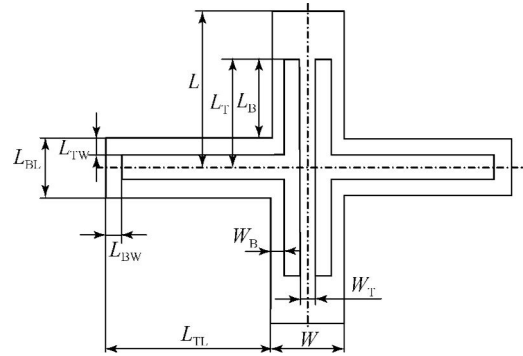


图 4 抗拉 LET 尺寸命名

Fig. 4 Tensile LET size naming

表 2 抗拉 LET 各尺寸值

Tab. 2 Tensile LET size values (mm)

变量	值	变量	值
L	25	W _T	3
W	19	L _T	18
L _{BL}	10	L _B	15
L _{BW}	5	W _B	3
L _{TW}	3	t	0.8
L _{TL}	30		

当铰链两端载荷为拉力时, 根据式(6)计算得到载荷为拉力时抗拉 LET 柔性铰链的等效刚度 $K_{eq. pull} = 139.8 \text{ N}/\text{mm}$ 。当两端拉力 $F = 1 \text{ N}$ 时, 可以得到其位移 $d = 7.15 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

5 ANSYS 建模分析

5.1 传统 LET 柔性铰链有限元分析

为了验证传统 LET 分别在拉伸载荷和弯矩载荷情况下理论计算的正确性, 建立其 ANSYS 模型, 进行有限元仿真。有限元模型如 5 所示。

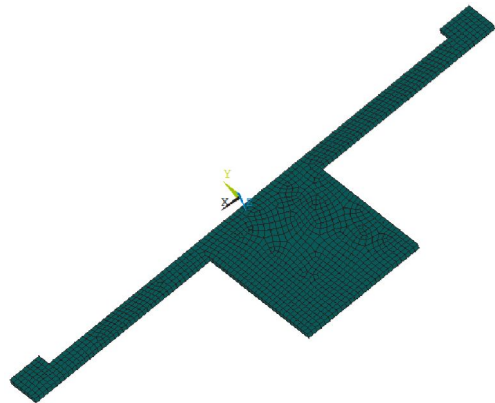


图 5 传统 LET 有限元模型

Fig. 5 Traditional LET finite element model

5.1.1 当载荷为弯矩时有限元分析结果

当在图 5 所示的模型一端添加固定位移载荷,另一端载荷为弯矩 $T=1 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 时,选定不同的弯矩值,可以得到如表 3 所示的理论计算值以及有限元分析结果。

为了更加直观地表示有限元计算值和理论计算值之间的关系,参照表 3,采用 MATLAB 软件,绘制如图 6 所示的转矩与转角之间的关系图。

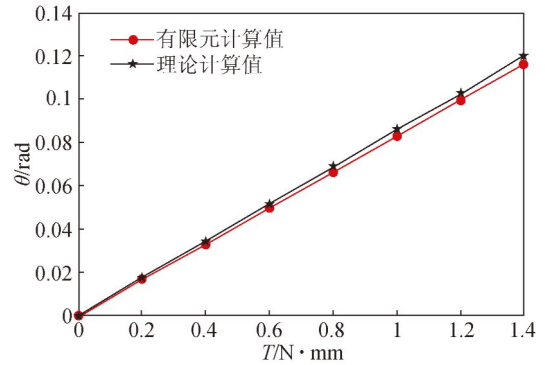


图 6 载荷为弯矩时传统 LET 理论计算值与有限元计算值
Fig. 6 Calculated values of theory and the finite element of traditional LET under moment

表 3 不同弯矩值时传统 LET 的理论计算值与有限元分析结果

Tab. 3 Values of theoretical calculation and the results of finite element analysis of traditional LET at different moments

转矩 $T/(\text{N} \cdot \text{mm})$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
有限元计算值 θ'/rad	0.016 7	0.033 2	0.049 9	0.066 5	0.083 2	0.099 8	0.116 4
理论计算值 θ/rad	0.017 2	0.034 3	0.051 5	0.068 6	0.085 6	0.102 9	0.120 1

5.1.2 当载荷为拉力时有限元分析结果

当在图 5 所示的模型一端添加固定位移载荷,另一端载荷为拉力 $F=1 \text{ N}$ 时,选定不同的拉

力值,可以得到如表 4 所示的理论计算值和有限元分析结果。

表 4 不同拉力值时传统 LET 的理论计算值与有限元分析结果

Tab. 4 Values of theoretical calculation and the results of finite element analysis of traditional LET at different pull

拉力 F/N	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
有限元计算值 d'/mm	0.105 9	0.211 9	0.317 8	0.423 8	0.530 2	0.635 6	0.741 6
理论计算值 d/mm	0.109 3	0.218 7	0.328 0	0.437 4	0.546 7	0.656 1	0.765 4

绘制如图 7 所示的拉力与位移之间关系图。

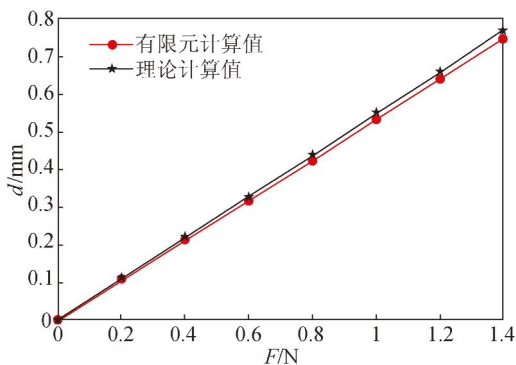


图 7 载荷为拉力时传统 LET 理论计算值与有限元计算值

Fig. 7 Calculated values of theory and the finite element of traditional LET under pull

5.2 抗拉 LET 柔性铰链有限元分析

5.2.1 当载荷为弯矩时有限元分析结果

当在图 8 所示模型一端添加固定位移载荷,另一端载荷为弯矩 $T=1 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 时,选定不同的弯矩值,得到如表 5 所示的理论计算值和有限元分析结果。

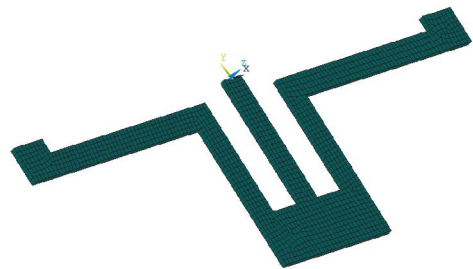


图 8 抗拉 LET 有限元模型

Fig. 8 Tensile LET finite element model

表 5 不同弯矩值时抗拉 LET 的理论计算值与有限元分析结果

Tab. 5 Values of theoretical calculation and the results of finite element analysis of tensile LET at different moments

转矩 $T/(N \cdot mm)$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
有限元计算值 $\theta' (\times 10^{-2} \text{ rad})$	1.46	2.92	4.37	5.83	7.29	8.75	10.21
理论计算值 $\theta (\times 10^{-2} \text{ rad})$	1.54	3.08	4.62	6.15	7.69	9.23	10.77

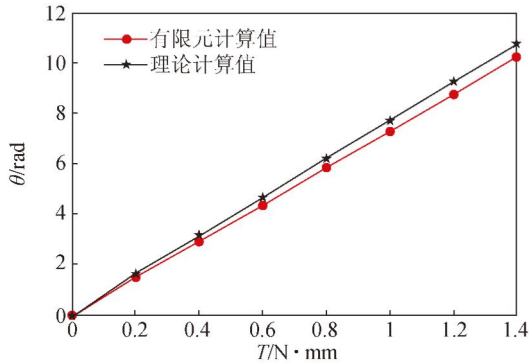


图 9 载荷为转矩时抗拉 LET 理论计算值与有限元计算值
Fig. 9 Calculated values of theory and the finite element of Tensile LET under moment

根据表 5 绘制如图 9 所示的拉力与位移之间关系图。

5.2.2 当载荷为拉力时有限元分析结果

当在图 8 所示的模型一端添加固定位移载荷,另一端载荷为拉力 $F=1 \text{ N}$ 时,选定不同的拉力值,得到如表 6 的理论计算值以及有限元分析结果。

根据表 6 绘制如图 10 所示的拉力与位移之间关系图。

表 6 不同拉力值时抗拉 LET 的理论计算值与有限元分析结果

Tab. 6 Values of theoretical calculation and the results of finite element analysis of tensile LET at different pull

拉力 F/N	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
有限元计算值 $d' (\times 10^{-3} \text{ mm})$	1.58	3.17	4.75	6.34	7.92	9.50	11.09
理论计算值 $d (\times 10^{-3} \text{ mm})$	1.43	2.86	4.29	5.72	7.15	8.58	10.01

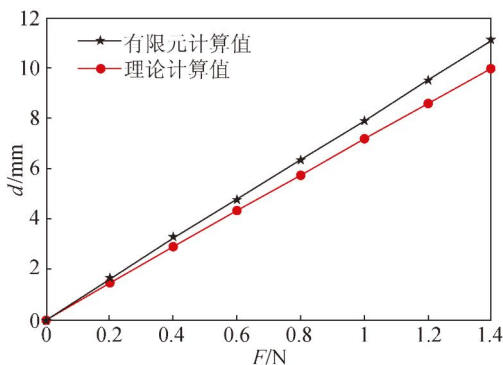


图 10 载荷为拉力时抗拉 LET 理论计算值与有限元计算值
Fig. 10 Calculated values of theory and the finite element of Tensile LET under pull

倍,而拉伸刚度却是传统 LET 的 76.43 倍。

表 7 两组理论分析实例结果对比

Tab. 7 Comparison of two groups of theoretical analysis

	抗拉 LET	传统 LET	比值
$K_{\text{eq. bend}}/(N \cdot \text{mm}/\text{rad})$	13	11.657	1.12
$K_{\text{eq. pull}}/(N \cdot \text{mm}^{-1})$	139.8	1.829	76.43

6 结 论

将上述两组理论分析实例结果汇总为表 7,通过对比发现,在外形尺寸相同,仅是内部尺寸不同的情况下,通过改变柔性铰链的内部结构,抗拉 LET 柔性铰链的弯曲刚度仅是传统 LET 的 1.12

本文对 LET 的结构进行了改进,并采用 ANSYS 软件建立其有限元模型,分析其在转动载荷和轴向载荷两种不同场合下的形变。结果表明,抗拉 LET 柔性铰链的弯曲刚度仅是传统 LET 的 1.12 倍,而拉伸刚度为其 76.43 倍。抗

拉 LET 的抗拉刚度明显增大,其结构设计符合预期要求。

参考文献:

- [1] JACOBSEN J O, WINDER B G, HOWELL L L. Lamina emergent mechanisms and their basic elements [J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2010, 2(1): 1-9.
- [2] WILDING S E, HOWELL L L, MAGLEBY S P. Spherical lamina emergent mechanisms [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 49: 187-197.
- [3] GOLLNICK P S, MAGLEBY S P, HOWELL L L. An introduction to multilayer lamina emergent mechanisms [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2011, 133(8): 081006-1.
- [4] PARISE J J, HOWELL L L, MAGLEBY S P. Ortho-Planar linear-motion spring [J]. *Mechanism and Machine Theory*. 2001, 36(12): 1281-1299.
- [5] 楚红岩. 多层 LEMs 机构设计与分析[D]. 北京:北京科技大学,2012.
CHU H Y. *Design and Analysis of Multi-layered Lamina Emergent Mechanisms* [D]. Beijing: University of Science & Technology Beijing, 2012. (in Chinese)
- [6] 王涛. LEMs 四杆机构的分析及其特性参数的研究 [D]. 北京:北京科技大学,2012.
WANG T. *Analysis of Four-bar Mechanism and Research of Characteristics Parameters of LEMs* [D]. Beijing: University of Science & Technology Beijing, 2012. (in Chinese)
- [7] 邱丽芳,胡锋,邹静. 基于伪刚体因子的 LEMs 设计 [J]. *农业机械学报*,2015,46(2): 365-371.
QIU L F, HU F, ZOU J. Design of LEMs based on pseudo-rigid factor [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2015, 46(2): 365-371. (in Chinese)
- [8] JACOBSEN J O, CHEN G, HOWELL L L, et al.. Lamina emergent torsional (LET) joint [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2009, 44(11):2098-2109.
- [9] FERRELL D B, ISAAC Y F, MAGLEBY S P et al.. Development of criteria for Lamina emergent mechanism flexures with specific application to metals [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2011, 133(3): 031009-1.
- [10] 周慧. LEMs 柔性铰链的分析与研究[D]. 北京:北京科技大学,2012.
ZHOU H. *Analysis and Research of Lamina Emergent Mechanisms Joint* [D]. Beijing: University of Science & Technology Beijing, 2012. (in Chinese)
- [11] 韦志鸿. LET 柔性铰链的参数化设计及分析[D]. 北京:北京科技大学,2012.
WEI ZH H. *Parameter Design and Analysis of LET Flexure Hinge* [D]. Beijing: University of Science & Technology Beijing, 2012. (in Chinese)
- [12] CHEN G, HOWELL L L. Two general solutions of torsional compliance for variable rectangular cross-section hinges in compliant mechanisms [J]. *Precision Engineering*, 2009, 33(3):268-274.

作者简介:



曹毅(1974—),男,安徽安庆人,博士,副教授,硕士生导师,2002年于安徽理工大学获得硕士学位,2005年于燕山大学获得博士学位,主要从事机器人技术,柔顺机构等方面的研究。
E-mail:caoyi@jiangnan.edu.cn



刘凯(1991—),男,浙江舟山人,硕士研究生,主要从事柔顺机构及其驱动等方面的研究。E-mail: kailiu91@foxmail.com