

文章编号 1004-924X(2016)增-0535-08

面向大口径光栅拼接的 5TSP-PPS 并联机构位置正解分析

吴石磊, 邵忠喜, 张文辉, 富宏亚*

(哈尔滨工业大学 机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 为了满足大口径光栅拼接装置大负载、高精度、高稳定性的要求, 提出了一种 5TSP-PPS 并联机构, 并采用螺旋理论分析了该机构实现空间二维移动和三维转动(2T3R)的机构学原理。以机构的 TS 杆长为约束条件, 基于矢量法建立约束方程, 推导位置正、反解的非线性方程组。为提高位置正解的计算效率, 将简化 Newton 法应用到位置正解分析。数值算例表明: 与 Newton 相比, 简化 Newton 法能提高位置正解的计算效率。位置正解计算结果与给定位姿的姿态误差小于 $8.5 \times 10^{-9} \mu\text{rad}$, 位置误差小于 $8 \times 10^{-10} \mu\text{m}$, 验证了 5TSP-PPS 并联机构位置正解分析的正确性。本研究为新型大口径光栅拼接装置的标定、误差分析以及位置闭环的实时控制等进一步研究奠定了基础。

关键词: 光栅拼接; 并联机构; 螺旋理论; 位置正解分析; 简化 Newton 法

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20162413.0535

Forward displacement analysis for 5TSP-PPS parallel mechanism of large aperture grating tiling

WU Shi-lei, SHAO Zhong-xi, ZHANG Wei-Hui, FU Hong-ya*

(School of Mechanical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

* Corresponding author, E-mail: hongyafu@hit.edu.cn

Abstract: To meet requirement of heavy load, high precision and high stability of heavy caliber grating tiling device, 5TSP-PPS parallel mechanism is put forward, and screw theory is adopted to analyze mechanism theory of the mechanism to realize two-dimension movement and three-dimension movement (2T3R) of space. Take TS rod length as constraint condition and establish constraint equation on the basis of vector method and deduct nonlinear equation system of forward position and inverse position. To improve computational efficiency of forward position, apply simplified Newton method to forward position analysis. Numerical example shows that: compared with Newton, simplified Newton method can improve computational efficiency of forward position. Attitude error between computational result of forward position and given pose is lower than $8.5 \times 10^{-9} \mu\text{rad}$ and location error is lower than $8 \times 10^{-10} \mu\text{m}$, which verifies correctness of forward position analysis of 5TSP-PPS parallel

收稿日期: 2016-04-07; **修订日期:** 2016-05-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 51475114); 黑龙江省自然科学基金资助项目(No. E201424); 2013 年度高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(No. 20132302120041); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(HIT. NSRIF. 2013051)

mechanism. The research lays a foundation for further study of calibration of new heavy caliber grating tiling device, error analysis and real-time control of closed position loop.

Key words: grating tiling; parallel mechanism; screw theory; forward position analysis; simplified Newton method

1 引言

大口径光栅是获得高能量、高强度超短激光脉冲的重要部件。由于大口径光栅制作难度大,光栅拼接成为获得大口径光栅的有效途径^[1-2]。光栅拼接要求拼接机构能够实现 5-DOF 纳米级的调整精度,并具有较高的稳定性。并联机构具有刚度大、承载能力强、响应速度快、精度高等优点,被广泛应用于大口径光栅拼接装置中^[3-4]。

并联机构位置正、反解是机构学分析的最基本任务,也是机构的速度与加速度求解、受力分析、工作空间分析、动力学分析及机构综合的基础。机构的输入参数求解动平台的位姿是机构的位置正解;机构的动平台位姿求解输入参数是机构的位置反解。由于结构的原因,并联机构的正解较复杂而反解相对容易^[5]。位置正解的本质是求解多元非线性超越方程组,可以用解析法和数值法求解此方程组。解析法主要采用消元法^[6]、Groebner 基法^[7-8]等数学方法消去未知数,得到单参数的多项式后再求解。解析法能求出全部解,但是求解过程复杂,没有通用性,实时性差。数值法又可以分为优化方法和迭代搜索法。优化方法是将非线性方程组的求解转化为优化问题,主要有神经网络^[9]、遗传算法^[10]和粒子群算法^[11]等。优化算法可以求得全部位置解,但是算法复杂,计算效率低。迭代搜索法分为信赖域法^[12]、Newton 法^[13]和拟 Newton 法^[14]等。迭代搜索法算法简单,计算效率高,适用于实时性要求强的场合。大口径光栅拼接装置的标定、误差分析以及位置闭环的实时控制对实时性要求高,因此要提高其位置正解的计算效率。

本文提出一种新型 5TSP-PPS 并联机构,由动光栅、定平台及 6 条支链(5 条 TSP、1 条 PPS 支链)组成。首先运用螺旋理论分析 5TSP-PPS 并联机构的自由度,然后以杆长为约束条件建立位置分析的约束方程,推导位置正、反解的表

式,最后对比分析 Newton 法、简化 Newton 法的计算效率,验证了 5TSP-PPS 并联位置正解分析的正确性。

2 机构模型与自由度分析

2.1 机构模型

并联机构模型如图 1 所示,5TSP-PPS 并联机构的定平台通过 5 条 TSP 主动支链和 1 条 PPS 被动支链与动光栅相连。TSP 主动支链中的移动副 P 由压电陶瓷和柔性铰链组成,固定在动光栅上;移动副 P 和定平台之间通过柔性连接轴连接,柔性连接轴可以简化成一端为球面副 S 和另一端为万向副 T 的连杆。PPS 被动支链采用钢球及平面直线导轨组合结构进行支撑、导向和定位。分支 1、2、3 中的 P 副垂直于动平台且运动轴线相互平行,分支 4、5 中的 P 副垂直于分支 1、2、3 中 P 副且运动轴线相互平行。分支 6 中的第一个 P 副的轴线与分支 4、5 中 P 副轴线平行,第二个 P 副的轴线与分支 1、2、3 中 P 副且运动轴线平行。

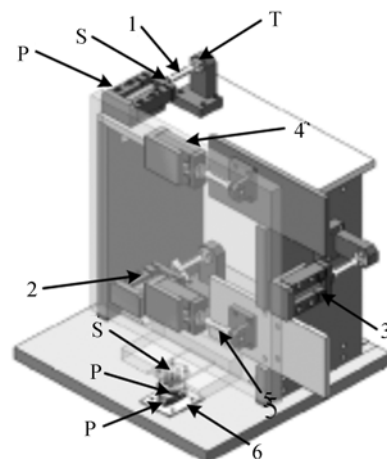


图 1 5PTS-PPS 并联机构模型

Fig. 1 Model of 5PTS-PPS parallel mechanism

建立定坐标系 Σ 和动坐标系 Ω , 如图 2 所

示。动坐标系 Σ 建立在动平台上: $O'X'Y'Z'$, O' 建立在动平台下方支撑钢球的中心, Z' 轴垂直于动光栅, X' 轴与分支 4、5 中 P 副轴线平行, Y' 轴按右手螺旋法确定。定坐标系 Ω 建立在定光栅上: $OXYZ$, 初始位姿时, 5 个 P 副具有相同的长度, 此时定坐标系 Ω 与动坐标系 Σ 重合。在主动支链上建立坐标系 $\Sigma_i: O_iX_iY_iZ_i$, O_i 建立 T 副中心, X_i, Y_i, Z_i 轴分别于 X, Y, Z 轴平行, 被动支链建立坐标系 $\Omega_i: O_1x_1y_1z_1$ 与 $OXYZ$ 重合。TS 杆长记为 $l_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$; 5 个主动支链移动副的移动距离分别记为 $d_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$; 被动支链 2 个移动副的移动距离分别记为 p_x, p_z ; 被动支链 S 副到 P 副的距离记为 p_y 。

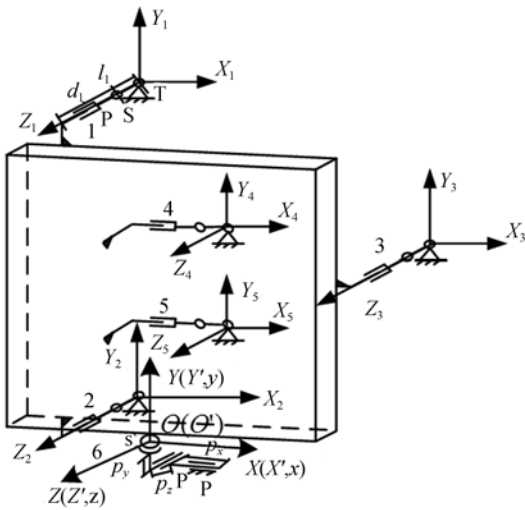


图 2 5PTS-PPS 并联机构简图

Fig. 2 Structural sketch of 5PTS-PPS parallel mechanism

2.2 自由度分析

如图 2 所示, 初始位姿时 5 条主动支链 P 副具有相同的长度, 5 条主动支链运动副在支链系 $\Sigma_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 中的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \$_{i1} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \$_{i2} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \$_{i3} = (1, 0, 0; 0, l_i, 0) \\ \$_{i4} = (0, 1, 0; l_i, 0, 0) \\ \$_{i5} = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \$_{i6} = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

式中 6 个螺旋线性无关、无反螺旋, 所以主动支链具有 6 个自由度。

当 5 个 P 副具有不同的长度时设 S 副中心点在支链坐标系 Σ_i 中的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , P 副运动轴线的方向向量为 (m, l, n) , 则 5 条主动支链运动副在支链系 $\Sigma_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 中的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \$_{i1} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \$_{i2} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \$_{i3} = (1, 0, 0; 0, z_i, -y_i) \\ \$_{i4} = (0, 1, 0; -z_i, 0, x_i) \\ \$_{i5} = (0, 0, 1; y_i, -x_i, 0) \\ \$_{i6} = (0, 0, 0; m, l, n) \end{cases} \quad (2)$$

假定式(2)中 6 个螺旋线性相关, 则有:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & n \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

计算得 $mx_i + ly_i + nz_i = 0$, 即向量 (m, l, n) 与 (x_i, y_i, z_i) 垂直, 因为柔性连接轴只能发生微小的转动, 式(3)不成立, 因此 6 个螺旋线性无关。

被动支链运动副在支链系 Ω_i 中的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \$_{61} = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \\ \$_{62} = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \\ \$_{63} = (1, 0, 0; 0, p_z, p_y) \\ \$_{64} = (0, 1, 0; -p_z, 0, p_x) \\ \$_{65} = (0, 0, 1; p_y, -p_x, 0) \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)求反螺旋, 可得被动支链的约束螺旋为:

$$\$_{61}^r = (0, 1, 0; -p_z, 0, p_x). \quad (5)$$

对于约束螺旋 $\$_{61}^r$, 它表示通过球铰中心点并平行于 y 轴的一个力线矢。它约束了动光栅在平面内的沿 y 轴的 1 个移动自由度, 故该机构具有 2 移动自由度和 3 转动自由度。

3 5TSP-PPS 并联机构位置正、反解分析

3.1 位置正解

当 5 个驱动 P 副的输入位移 $p_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 变化时, 动光栅的位姿将发生变化。该机构的正解是给定驱动 P 副的输入位移, 确定动光栅

的位姿。如图 3 所示是 5TSP-PPS 并联机构从位姿 1 运动到位姿 2 的单条运动链矢量链示意图, A_i 是对应驱动 P 副的安装位置。根据图 3 可求得单条运动链矢量链方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i \mathbf{S}_i &= (\mathbf{O}\mathbf{O}' + \mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{S}_i) - \mathbf{O}\mathbf{T}_i \\ &= \mathbf{O}'\mathbf{S}_i - (\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}') \end{aligned} \quad (6)$$

式中: ${}^o\mathbf{O}'$ 表示点 O' 在动坐标系中的坐标。

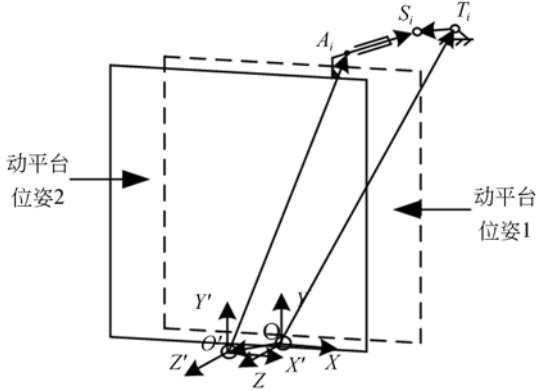


图 3 运动链矢量示意图

Fig. 3 Vector sketch of kinematic chain

5TSP-PPS 并联机构具有 R_x 、 R_y 、 R_z 、 P_x 和 P_z 五自由度, 动坐标系相对于固定坐标系的综合变换矩阵 ${}^o\mathbf{T} = \text{Trans}(p_x, 0, p_z) \text{Rot}(x, R_x) \text{Rot}(y, R_y) \text{Rot}(z, R_z)$, 其旋转变换矩阵 ${}^o\mathbf{T}_r = \text{Rot}(x, R_x) \text{Rot}(y, R_y) \text{Rot}(z, R_z)$ 。式(6)中 $\mathbf{O}'\mathbf{S}_i = {}^o\mathbf{T}_r \cdot {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i$, $\mathbf{O}\mathbf{O}' = [p_x \ 0 \ p_z \ 0]^T$, 将 $\mathbf{O}'\mathbf{S}_i$ 、 $\mathbf{O}\mathbf{O}'$ 代入式(6)得:

$$\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i = {}^o\mathbf{T}_r \cdot {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i - (\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}'), \quad (7)$$

对式(7)中 $\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i$ 求模并平方后展开得:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i|^2 &= {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r \cdot \\ &{}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i - 2({}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r^T \cdot (\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}') - \\ &(\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}')^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r \cdot {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i + \\ &(\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}')^T \cdot (\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}') \end{aligned} \quad (8)$$

由于对向量进行旋转变换时向量的方向改变, 模不变, 对于式(8)中第一项 ${}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r \cdot {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i = |{}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i|^2$ 。又由于 $\mathbf{A}_{4 \times 1}^T \cdot \mathbf{B}_{4 \times 4} \cdot \mathbf{C}_{4 \times 1} = \mathbf{C}_{4 \times 1}^T \cdot \mathbf{B}_{4 \times 4}^T \cdot \mathbf{A}_{4 \times 1}$, 故第二项和第三项相等。因此, 单条运动链的约束方程化简为:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}')^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r \cdot {}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i - \\ |\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}'|^2 + |\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i|^2 - |{}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i|^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

设 PTS 运动链上主动副 P 的运动轴线的方

向量为 $\mathbf{j}_i = (j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}, 0)$, 其输出位移为 p_i 。则根据式(9), 动光栅运动过程中单条运动链的约束方程为:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}')^T \cdot {}^o\mathbf{T}_r \cdot ({}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i + p_i \cdot \mathbf{j}_i) - \\ |\mathbf{O}\mathbf{T}_i - \mathbf{O}\mathbf{O}'|^2 + |\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i|^2 - \\ |{}^o\mathbf{O}'\mathbf{S}_i + p_i \cdot \mathbf{j}_i|^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

令 $f_i(R_x, R_y, R_z, p_x, p_y) = 0$, 则 5PTSP-PPS 并联机构的约束方程组为:

$$\begin{cases} f_1(R_x, R_y, R_z, p_x, p_z) = 0 \\ f_2(R_x, R_y, R_z, p_x, p_z) = 0 \\ f_3(R_x, R_y, R_z, p_x, p_z) = 0 \\ f_4(R_x, R_y, R_z, p_x, p_z) = 0 \\ f_5(R_x, R_y, R_z, p_x, p_z) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

5TSP-PPS 并联机构的数值正解是一个含有三角函数的非线性超越方程组, 其最高次为 4 次。并联机构的位置正解 R_x 、 R_y 、 R_z 、 P_x 、 P_z 需联立 5 个非线性超越方程求取。

3.2 位置反解

位置反解是已知动光栅的位姿, 求机构 5 个驱动 P 副的输入位移 $p_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。如图 4 所示, 5TSP-PPS 并联机构从位姿 1 运动到位姿 2。运动链上的万向副 $T(t_{ix}, t_{iy}, t_{iz})$ 位置固定, 在主动副 P 的运动轴线上除点 S_i 外任选一点 $Q_i(q_{ix}, q_{iy}, q_{iz})$, 点 Q_i 相对于动光栅的位置固定, 随着动光栅运动到 $Q_i'(q'_{ix}, q'_{iy}, q'_{iz})$ 点, 点 Q_i' 的坐标 $[q'_{ix}, q'_{iy}, q'_{iz}, 1]^T = {}^o\mathbf{T} [q_{ix}, q_{iy}, q_{iz}, 1]^T$ 。设 $\mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i$ 的方向向量为 $\mathbf{j}_i = (j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}, 0)$, $\mathbf{Q}_i' \mathbf{S}_i'$ 的方向向量为 $\mathbf{j}_i' = (j'_{ix}, j'_{iy}, j'_{iz}, 0)$, $[j'_{ix}, j'_{iy}, j'_{iz}, 0]^T = {}^o\mathbf{T}_r [j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}, 0]^T$ 。

设 $\mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i$ 的杆长为 d_0 , $\mathbf{Q}_i' \mathbf{S}_i'$ 的杆长为 d_i , 则主动副 P 的输出位移为:

$$p_i = d_i - d_0. \quad (12)$$

由于在动光栅运动过程中, 连杆 TS 的长度不变, 即 $|\mathbf{TS}| = |\mathbf{T}_i \mathbf{S}_i| = |\mathbf{T}_i' \mathbf{S}_i'|$, 有:

$$\begin{aligned} |\mathbf{TS}|^2 &= (q'_{ix} + d_i \cdot j'_{ix} - t_{ix})^2 + \\ &(q'_{iy} + d_i \cdot j'_{iy} - t_{iy})^2 + (q'_{iz} + d_i \cdot j'_{iz} - t_{iz})^2, \end{aligned} \quad (13)$$

求解式(13)得:

$$d_i = \frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2}. \quad (14)$$

式中: $a_i = j_{ix}^2 + j_{iy}^2 + j_{iz}^2 = 1$

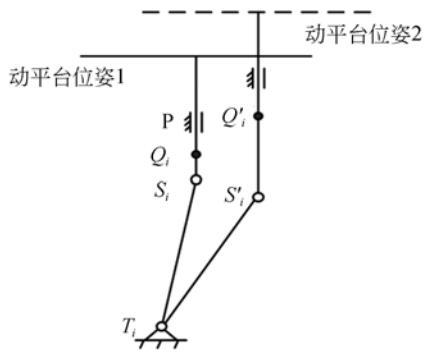


图 4 机构位置反解

Fig. 4 Forward position of mechanism

$$b_i = 2(q'_{ix} - t_{iz})j'_{ix} + 2(q'_{ix} - t_{iz})j'_{iy} + 2(q'_{ix} - t_{iz})j'_{iz} \quad c_i = (q'_{ix} - t_{ix})^2 + (q'_{ix} - t_{ix})^2 + (q'_{ix} - t_{ix})^2 - |TS|^2$$

d_i 取较小值 $d_i = \frac{-b_i - \sqrt{b_i^2 - 4c_i}}{2}$, 带入式

(12) 得主动副 P 的输出位移为:

$$p_i = \frac{-b_i - \sqrt{b_i^2 - 4c_i}}{2} - d_0. \quad (15)$$

4 位置正解的数值求解法

4.1 Newton 法

Newton 法是求解非线性方程组最基本的方法,目前使用的很多有效迭代法都是以 Newton 法为基础,并由它演变得到。

对于非线性方程组 $F(X)=0$ 在 X_k 处按照多元函数的泰勒展开,并取线性项得到:

$$F(X) + F'(X)^{-1} F(X) = 0, \quad (16)$$

这样便得到 Newton 法的迭代公式:

$$X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (17)$$

式中: $J = F'(X)$, J 为并联机构的 Jacobian 矩阵。

4.2 简化 Newton 法

Newton 法每步迭代需要计算 n 个函数及 n^2 个偏导数值,并求一次矩阵的逆,计算量大。为了减少牛顿迭代法的计算量可以把牛顿迭代法中的 Jacobian 矩阵换为常矩阵^[15],这就是简化 Newton 法。

简化 Newton 法迭代公式为:

$$X_{k+1} = X_k - J(X_0)^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (18)$$

简化 Newton 法求位置正解的流程如图 5 所示。首先通过位置反解根据给定位姿求出机构 5 个驱动 P 副的输入位移,再以驱动 P 副的输入位移作为输入量带入正解,然后采用简化 Newton 法求解机构位置正解的非线性超越方程组,最后求出的位姿正解与给定位姿误差。简化 Newton 法在迭代搜索过程中只需要计算一次 Jacobian 矩阵,避免了大量的矩阵运算,提高了计算效率。

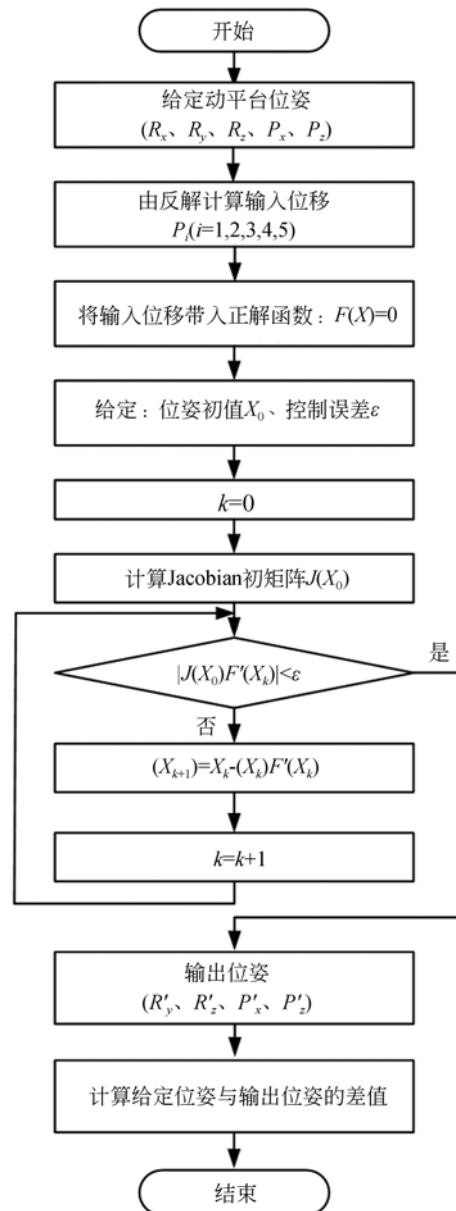


图 5 简化 Newton 法流程图

Fig. 5 Flow chart of simplified Newton method

5 位置正解数值验证

大口径光栅拼接装置要求动光栅姿态 R_x 、 R_y 、 R_z 的调整为 $-10 \sim 10 \mu\text{rad}$ ，位置 P_x 、 P_z 的调整 $-10 \sim 10 \mu\text{m}$ ； R_x 、 R_y 、 R_z 调整精度为 $\pm 0.2 \mu\text{rad}$ ， P_x 、 P_z 调整精度为 $\pm 0.01 \mu\text{m}$ 。

为验证简化 Newton 法的高效性，利用 Matlab 编程，分别采用 Newton 法和简化 Newton 法计算 5TPS-PPS 并联机构的位置正解。表 1 为 5TPS-PPS 并联机构给定的 6 组位姿。Newton 法和简化 Newton 法的计算效率如表 2 所示。两种方法的控制精度 $\epsilon = 10^{-9}$ ，迭代初值 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

表 1 5TPS-PPS 并联机构给定位姿参数

Tab. 1 Pose parameters of 5PTS-PPS parallel mechanism

序号	$R_x/\mu\text{rad}$	$R_y/\mu\text{rad}$	$R_z/\mu\text{rad}$	$P_x/\mu\text{m}$	$P_z/\mu\text{m}$
1	-10	-10	-10	-10	-10
2	-5	-7	-8	-6	-9
3	-2	-10	-2	7	3
4	4	-7	-6	5	2
5	6	1	4	6	7
6	10	10	10	10	10

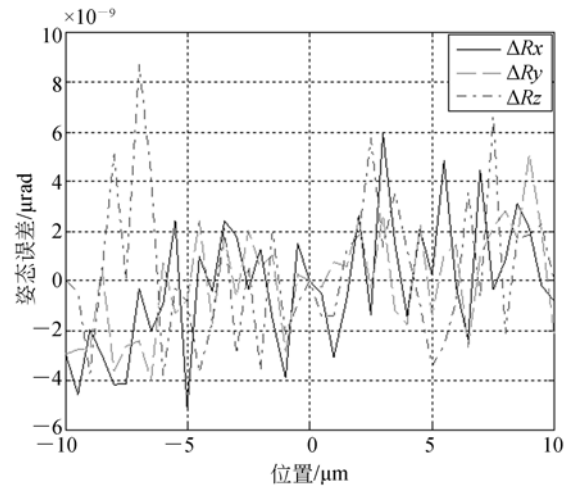
表 2 Newton 法和简化 Newton 法的效率

Tab. 2 Efficiency of Newton method and simplified Newton method

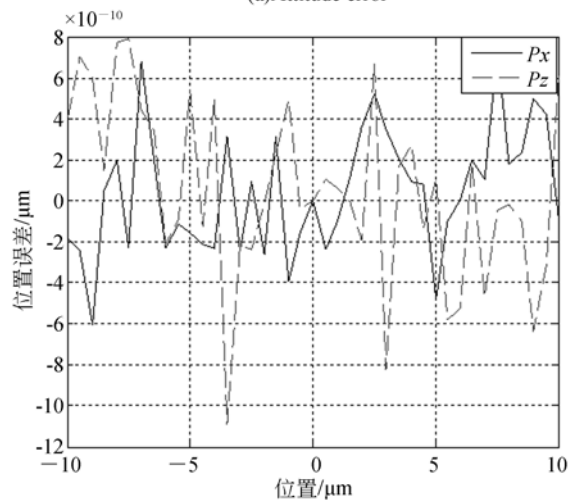
序号	Newton 法		简化 Newton 法	
	迭代次数	时间/ms	迭代次数	时间/ms
1	3	228	4	156
2	3	228	4	156
3	3	228	4	156
4	4	303	4	156
5	4	303	4	156
6	3	228	4	156

从表 2 可以看出，在控制精度 $\epsilon = 10^{-9}$ ，迭代初值为 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 时简化 Newton 法每次正解的迭代次数仅为 4 次，计算时间都在 200 ms 以内。与 Newton 相比简化 Newton 法的迭代次数多，但是简化 Newton 法只计算一次 Jacobian 矩阵，计算时间短。因此简化 Newton 法，计算效率高，求解精度高。

为验证 5TPS-PPS 并联机构位置正解的正确性，选择动光栅姿态 R_x 、 R_y 、 R_z 分别从 $-10 \mu\text{rad}$ 变化到 $10 \mu\text{rad}$ ，位置 P_x 、 P_z 分别从 $-10 \mu\text{m}$ 变化到 $10 \mu\text{m}$ ，采用简化 Newton 法求解 5TPS-PPS 并联机构的位置正解。迭代初值为以 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ，迭代次数为 4 次。输出位姿与给定位姿的误差如图 6 所示。



(a) 姿态误差
(a) Attitude error



(b) 位置误差
(b) Position error

图 6 5TSP-PPS 并联机构位姿正解误差

Fig. 6 Pose error of 5TSP-PPS parallel mechanism

从图 6 可以看出，利用式 (11) 求出动光栅姿态误差于 $10^{-8} \mu\text{rad}$ ，位置误差小于 $10^{-8} \mu\text{m}$ ，因此对 5PTS-PPS 并联机构位置正解分析是正确的。由于光栅的姿态正解最大误差为 $8.5 \times 10^{-9} \mu\text{rad}$ 远小于 R_x 、 R_y 、 R_z 调整精度 $\pm 0.2 \mu\text{rad}$ ，位置正解最大误差为 $8 \times 10^{-10} \mu\text{m}$ 远小于 P_x 、 P_z 调整

精度 $\pm 0.01 \mu\text{m}$, 因此采用简化 Newton 法求解 5TSP-PPS 并联机构的位置正解, 当初值选择为 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 迭代次数为 4 次时可以满足实际工程的精度要求。

6 结 论

本文提出了一种 5PTS-PPS 并联机构, 应用螺旋理论证明该机构具有 5 自由度, 能够实现空间二维移动和三维转动。以机构的杆长为约束条件, 基于矢量法推导了机构位置正解的非线性超

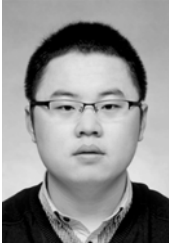
越方程组及反解的解析方程。将简化 Newton 法应用到 5PTS-PPS 并联机构位置正解的求解, 相比于 Newton 法, 简化 Newton 法能提高计算效率。利用简化 Newton 法对机构的位置正解进行了验证: 根据给定位姿求出机构输入, 再以输入作为输入量验证正解。采用简化 Newton 法求解机构位置正解的非线性超越方程组, 求出的位姿正解与给定位姿的姿态误差小于 $8.5 \times 10^{-9} \mu\text{rad}$, 位置误差小于 $8 \times 10^{-10} \mu\text{m}$, 证明正解的分析过程是正确的。

参考文献:

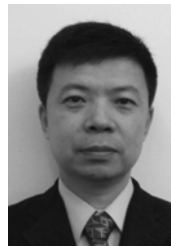
- [1] KESSLER T J, BUNKENBURG J, HUANG H, *et al.*. Demonstration of coherent addition of multiple gratings for high energy chirped-pulse amplified lasers [J]. *Opt. Lett.*, 2004, 29(6): 635-637.
- [2] 赵博, 郝德阜. 用拼接法获取大面积衍射光栅[J]. *光学精密工程*, 2000, 8(5): 503-507.
ZHAO B, HAO D F. Tiling to make large area diffraction grating [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2000, 8(5): 503-507. (in Chinese)
- [3] EZALI Y A, TABATA M K, KIHARA M H, *et al.*. Development of a segmented grating mount system for FI REX-1[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008, 112(3): 032027.
- [4] 邵忠喜, 张庆春, 白清顺, 等. 高精度大口径光栅拼接装置的控制算法[J]. *光学精密工程*, 2009, 17(1): 158-165.
SHAO ZH X, ZHANG Q CH, BAI Q SH, *et al.*. Design method of controlling device for tiling high precision and large aperture grating [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(1): 158-165. (in Chinese)
- [5] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [6] 张英, 廖启征, 魏世民. 一般 6-4 台体型并联机构位置正解分析[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(9): 27-32.
ZHANG Y, LIAO Q ZH, WEI SH M. Forward displacement analysis of a general 6-4 in-parallel platform [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(9): 26-32. (in Chinese)
- [7] 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 基于 Groebner-Sylvester 法的一般 6-6 型台体并联机构位置正解[J]. *西安交通大学学报*, 2008, 42(3): 300-303.
HUANG X G, LIAO Q ZH, WEI SH M, *et al.*. Forward kinematics of general 6-6 Stewart mechanisms based on Grobner-Sylvester approach [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2008, 42(3): 300-303. (in Chinese)
- [8] FAUGERE J C, LAZARD D. Combinatorial classes of parallel manipulators [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, 30(6): 765-776.
- [9] 陈学生, 陈在礼, 孔民秀, 等. 基于神经网络的 6-SPS 并联机器人正运动学精确求解[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2002, 34(1): 120-123.
CHEN X SH, CHEN Z L, KONG M X, *et al.*. An accurate solution for forward kinematics of 6-SPS Stewart platform based on neural network [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2002, 34(1): 120-123. (in Chinese)
- [10] 郑春红, 焦李成. 基于遗传算法的 Stewart 并联机器人位置正解分析[J]. *西安电子科技大学学报*, 2003, 30(2): 165-173.
ZHENG CH H, JIAO L CH. Forward kinematics of a general Stewart parallel manipulator using the genetic algorithm [J]. *Journal of Xidian University*, 2003, 30(2): 165-173. (in Chinese)
- [11] 车林仙, 何兵, 易建, 等. 对称结构 Stewart 机构位置正解的改进粒子群算法[J]. *农业机械学报*, 2008, 39(10): 158-163.
CHEL X, HE B, YI J, *et al.*. Improved particle swarm optimization for forward positional analysis of symmetrical Stewart parallel manipulators [J].

- Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2008, 39(10): 158-163. (in Chinese)
- [12] 卢启鹏,李勇军,彭忠琦,等. 六杆并联机构运动学正解研究及其在同步辐射光束线中的应用[J]. 光学精密工程,2008,10(16):1874-1879.
LU Q P, LI Y J, PENG ZH Q, *et al.*. Forward kinematics of six-bar parallel mechanism and its applications in synchrotron radiation beam-line[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 10(16): 1874-1879. (in Chinese)
- [13] 方喜峰,赵若愚,吴洪涛,等. 6-UPS 交叉杆型并联机床的运动学正解算法[J]. 机械工程学报,2012, 48(13):56-60.
FANGX F, ZHAO R Y, WU H T, *et al.*. Forward kinematics analysis of 6-UPS parallel machine tool with cross rod[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(13): 56-60. (in Chinese)
- [14] 耿明超,赵铁石,王唱,等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报,2015,51(9): 28-35.
GENG M CH, ZHAO T SH, WANG CH, *et al.*. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-newton method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(9): 28-35. (in Chinese)
- [15] 李庆杨,莫孜中,祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
LI Q Y, MO Z ZH, QI L Q. *Numerical Solution of the Nonlinear Equations*[M]. Beijing: Science Press, 1987.

作者简介:



吴石磊(1991—),男,山东临沂人,博士研究生,主要从事数控技术方面研究。
Email: wushilei2009@163.com



富宏亚(1963—),男,黑龙江齐齐哈尔人,教授,博士生导师,主要从事数控技术,计算机在机械制造上的应用技术,现代制造系统的设计、制造及控制技术,复合材料缠绕成型技术和非标数控设备研制,纤维铺放技术等方面的研究工作。Email: hongyafu@hit.edu.cn