

梳齿结构与振动梁复合的硅微谐振式加速度计非线性振动特性

刘梦霞, 赵前程, 崔健

引用本文:

刘梦霞, 赵前程, 崔健. 梳齿结构与振动梁复合的硅微谐振式加速度计非线性振动特性[J]. *光学精密工程*, 2020, 28(5): 1066–1074.

LIU Meng-xia, ZHAO Qian-cheng, CUI Jian. Nonlinear characteristics of silicon resonant accelerometer with vibrating beam integrated with comb fingers structure[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2020, 28(5): 1066–1074.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3788/OPE.20202805.1066>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

常温下硅微谐振加速度计零偏稳定性的提高

Improvement of bias stability of micromechanical silicon resonant accelerometer at room temperature
光学精密工程. 2016, 24(5): 1050–1056 <https://doi.org/10.3788/OPE.20162405.1050>

小型化硅微谐振式加速度计的实现与性能测试

Implementation and measurement of a miniaturized silicon resonant accelerometer
光学精密工程. 2016, 24(8): 1927–1933 <https://doi.org/10.3788/OPE.20162408.1927>

高量程加速度计动态线性校准系统

Dynamic linearity calibration system for accelerometers with high measurement range
光学精密工程. 2016, 24(2): 381–389 <https://doi.org/10.3788/OPE.20162402.0381>

低预紧扭矩螺栓连接悬臂梁的2倍谐振响应

Second super-harmonic resonance response of cantilever beam with bolt joint under low pretension
光学精密工程. 2016, 24(11): 2769–2776 <https://doi.org/10.3788/OPE.20162411.2769>

巨型科学可控反射镜缩比模型系统抖动检测

Jitter measurement of giant steerable science mirror prototype
光学精密工程. 2018, 26(6): 1392–1397 <https://doi.org/10.3788/OPE.20182606.1392>

文章编号 1004-924X(2020)05-1066-09

梳齿结构与振动梁复合的 硅微谐振式加速度计非线性振动特性

刘梦霞, 赵前程, 崔 健*

(北京大学 微电子研究所 微米/纳米加工技术国家级重点实验室, 北京 100871)

摘要: 硅微谐振式加速度计的非线性振动可以导致振动幅度噪声耦合到频率输出进而恶化器件的噪声性能, 因此有必要对谐振式加速度计的非线性振动特性进行评估及优化, 拓展线性振动范围。本文针对所设计的基于梳齿结构与振动梁复合的硅微谐振式加速度计进行了仿真与实验分析。首先对加速度计结构使用 COMSOL 仿真软件进行了非线性仿真分析, 该方法通过在谐振梁的振动方向上施加一个静力, 得到力与位移之间的关系, 计算出非线性三次项系数 $k_{3,\text{eff}}$ 和线性系数 k_{eff} 的比值约为 $2.13 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。然后, 对双端固定支音叉 (DETF) 进行扫频测试, 得出 DETF 的非线性振动频响曲线。根据 Duffing 方程对实验数据进行拟合, 得出器件两个 DETF 的非线性三次项系数 $k_{3,\text{eff}}$ 和线性系数 k_{eff} 的比值分别为 $2.24 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 和 $2.19 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。仿真值与测试值的误差分别为 5.2% 和 2.8%。实验结果与仿真值吻合得较好, 印证了仿真方法的有效性和测试数据的可靠性。最后, 对所设计的谐振加速度计进行非线性分析, 当振幅小于 35.4 nm 时, DETF 工作在线性区, 可为后续谐振式加计的控制电路设计提供参考。

关键词: 硅微谐振式加速度计; 非线性振动; 复合结构; 仿真分析

中图分类号: TH824.4 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20202805.1066

Nonlinear characteristics of silicon resonant accelerometer with vibrating beam integrated with comb fingers structure

LIU Meng-xia, ZHAO Qian-cheng, CUI Jian*

(National Key Laboratory of Science and Technology on Micro/Nano Fabrication,
Institute of Microelectronics, Peking University, Beijing 100871, China)

* Corresponding author, E-mail: eric.cuijian@pku.edu.cn

Abstract: The nonlinear vibration of the silicon micro-resonator accelerometer can cause the vibration amplitude noise to couple to the frequency output and deteriorate the noise performance of the device. Therefore, it is necessary to evaluate the nonlinear vibration characteristics of the resonant accelerometer and optimize the design to extend the linear vibration range. In this paper, the simulation and experimental analysis of a Silicon micro-Resonant Accelerometer (SRA) based on comb-tooth structure and vibrating beam were designed. Firstly, the nonlinear simulation analysis was carried out on the accelerometer structure using COMSOL simulation software. By applying a static force in the vibration direction of the resonant beam, the relationship between force and displacement is obtained, and the nonlinear cubic term coefficient $k_{3,\text{eff}}$ was calculated. The ratio of $k_{3,\text{eff}}$ to the linear coefficient k_{eff} is approximately $2.13 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$. Then the Double-End fixed-duty

收稿日期: 2019-12-03; 修订日期: 2020-01-09.

基金项目: 国家重点研发计划资助项目 (No. 2018YFB2002500)

Tuning Fork (DETF) was subjected to frequency sweep test to obtain the nonlinear vibration frequency response curve of DETF. According to the Duffing equation, the experimental data is fitted. The ratio of the nonlinear cubic term coefficient $k_{3,\text{eff}}$ and the linear coefficient k_{eff} of the two DETFs of the device is $2.24 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ and $2.19 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$. The errors between the simulated and tested values for $k_{3,\text{eff}}$ and k_{eff} are 5.2% and 2.8%, respectively. The experimental results agree well with the simulated values, which confirm the validity of the simulation method and the reliability of the test data. The designed resonant accelerometer was analyzed nonlinearly when the amplitude was less than 35.4 nm, DETF works in the linear region, which can provide reference for the design of the control circuit of the subsequent resonant add-on.

Key words: silicon micro-resonant accelerometer; nonlinear vibration; composite structure; simulation analysis

1 引言

谐振式加速度计是高精度加速度计的重要方向之一。基于石英晶体材料的谐振式加速度计以其高稳定性和可靠性等优点在过去的 30 年里取得了巨大的商业成功。随着越来越多的微型化应用需求,石英谐振式传感器在体积缩小方面面临着一定的挑战^[1-2]。硅微谐振加速度计(Silicon Micro-Resonator Accelerometer, SRA)体积小、成本更低且易与专用集成电路(ASIC)进行集成,从而成为高精度加速度计领域的主流方向。SRA 通过检测由施加在谐振梁轴向方向的惯性负载力引起谐振梁的频率变化来检测外部加速度,具有直接数字输出,易于集成到数字系统,信号传输抗干扰性好和成本低等优点^[3]。

随着器件体积的不断缩小,输出信号中的噪声干扰会变得非常大,通常需要增大振动幅度以提高信噪比^[4]。然而,随着振幅变大,谐振梁将进入非线性振动区域,在该区域中振幅和谐振频率产生耦合,导致幅度噪声转换为频率噪声,降低了信噪比和稳定性^[4-7]。通过对谐振梁的非线性振动仿真分析,可以快速获得频率与振幅的关系,有利于 SRA 的优化设计。振动非线性可来源于静电负刚度效应和机械效应^[4-10]。若谐振器的驱动电容为压膜结构,则需要同时考虑静电负刚度效应和机械效应。若驱动电容为滑膜结构,只需要考虑机械刚度带来的非线性效应。

本文针对课题组所设计的基于梳齿结构与振动梁复合的 SRA 进行了仿真与实验分析^[11-12]。通过 COMSOL 仿真软件对谐振器进行模态仿真,得到谐振器的理想工作状态下的谐振频率。

在模态仿真的基础上,改变边界条件对谐振梁进行进一步的非线性仿真分析,从而得出线性系数和非线性三次系数 k_{eff} 和 $k_{3,\text{eff}}$ 的理论值。接着进行非线性实验测试,对设计出来的 SRA 进行了扫频分析,研究其 $A-f$ (振幅与频率关系)效应,同时得出 $k_{3,\text{eff}}$ 和 k_{eff} 的比值关系。仿真结果与实验结果吻合得较好,印证了仿真方法的有效性和测试数据的可靠性。对非线性振动的研究,有利于对滑膜结构硅谐振加速度计的结构上和电路的优化。

2 原理及分析

2.1 工作原理

该 SRA 采用滑膜梳齿结构作为双端固定支音叉(Double-end Fixed-duty Tuning Fork, DETF)的驱动电容。图 1 为 DETF 结构的示意图,其尺寸参数如表 1 所示。相比于传统的机翼型梳齿,这种结构有着更小的质量块,故而有着更大的标度因子和更高的谐振频率^[11-12]。这种无附加质量块、梳齿为滑膜结构的 DETF 的驱动电容与振幅的二阶求导为 0,即静电刚度为 0,因此本文中仅需考虑机械效应带来的非线性影响,无需考虑静电负刚度。该 MEMS 器件采用北京大学微米/纳米加工技术国家级重点实验室标准的硅-玻璃(SOG)工艺,利用阳极键合使得硅与玻璃结合在一起,通过深反应离子刻蚀(DRIE)对结构层进行释放。如图 2 所示,SRA 主要由质量块、DETF、微杠杆和支撑结构构成。当器件工作时,两边的 DETF 通过电容驱动使得谐振梁谐振在本征频率下。此时,若在检测方向上有加速度,质量块会使左右两边的 DETF 分别受到轴向的压力和拉力,使工作频率发生改变。检测梳齿检测到两边

DETF 的频率差从而得出加速度的大小。当 DETF 工作在线性区时, 振幅与驱动力成正比。然而, 随着振幅增大, 谐振梁更容易受到两端锚点所引起的轴向拉力影响, 非线性三次项系数 $k_{3,eff}$ 不能被忽略, 使得工作频率受振幅影响产生偏移。

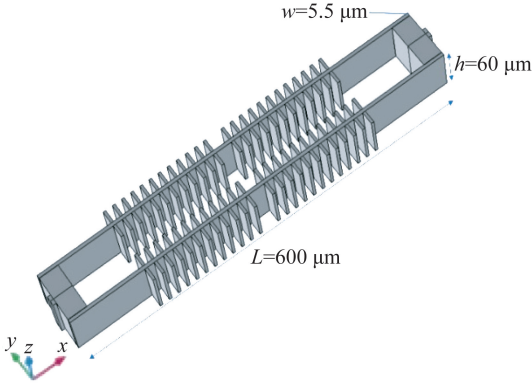


图 1 双端固支音叉结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of double-end fixed-duty tuning fork

表 1 双端固支音叉尺寸参数

Tab. 1 Dimensional parameters of double-end fixed-duty tuning fork

参数	数值
谐振梁长度 $L/\mu\text{m}$	600
谐振梁宽度 $w/\mu\text{m}$	5.5
结构厚度 $h/\mu\text{m}$	60
梳齿宽度 $w_c/\mu\text{m}$	5
梳齿长度 $l_c/\mu\text{m}$	50
质量块面积 S/mm^2	49.1

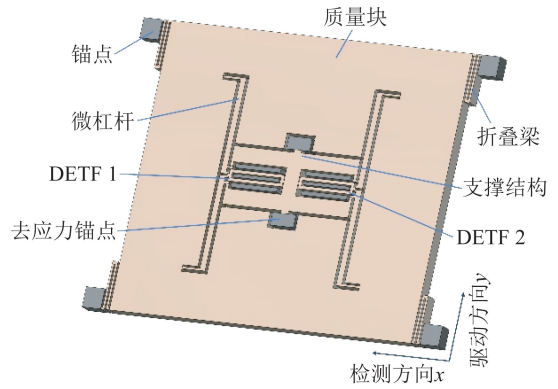


图 2 谐振加速度计示意图

Fig. 2 Schematic diagram of resonant accelerometer

2.2 模态分析

DETF 工作在线性区时频率的变化与本征频率和非线性系数有关。首先用仿真软件对 DETF 进行模态分析, 求得工作模式下的理想本征频率。根据版图尺寸在 COMSOL 软件进行 DETF 模拟, 研究 SRA 的模态与特征频率, 其仿真结果如图 3(a)~3(f)所示。表 2 为各个模态所对应的特征频率。其中, 第一和第二阶分别为平面内同向和反向的横向振动。第三和第四阶分别为平面内同向和反向的扭动振动。第五和第六阶分别为同向和反向的离面扭动振动。本文选取第二阶振动模态作为工作模态, 其特征频率为 92 791 Hz。

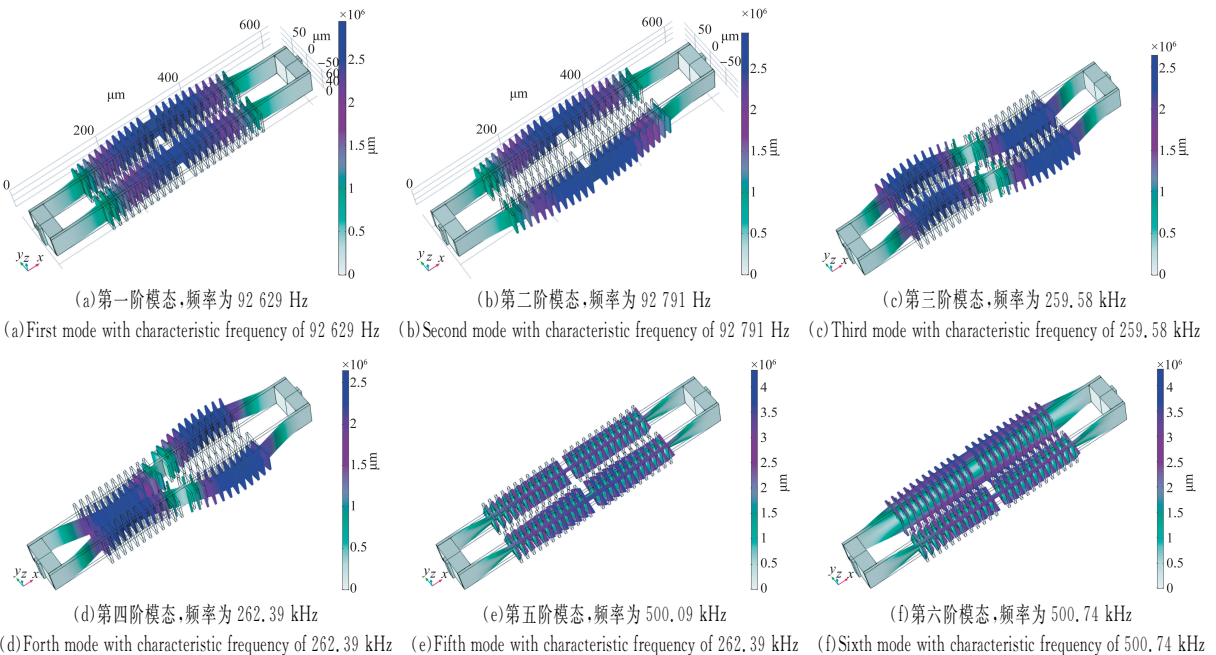


图 3 双端固支音叉的第一到第六阶模态

Fig. 3 First mode to sixth mode of double-end fixed-duty tuning fork

表 2 各模态对应的特征频率

Tab. 2 Characteristic frequency corresponding to each mode

模态	特征频率/Hz
同向横向振动	92 629
反向横向振动	92 791
同向平面扭动	259 580
反向平面扭动	262 390
同向离面扭转	500 090
反向离面扭转	500 740

2.3 非线性分析

在获得理想的本振频率后,本文进一步仿真以获得理想的线性系数 k_{eff} 和非线性三次项 $k_{3,\text{eff}}$ 的值。在非线性区,当考虑非线性三次项 $k_{3,\text{eff}}$,驱动力 P 与位移 x 的关系如下:

$$P = k_{\text{eff}}x + k_{3,\text{eff}}x^3. \quad (1)$$

基于式(1),用施加静载荷的方法对谐振梁进行仿真分析。此方法通过施加静载荷于谐振梁的振动方向,可以快速有效地得出位移与静力的关系,从而得出 k_{eff} 和 $k_{3,\text{eff}}$ 的值。如上节所述对模态仿真分析后,改变 DETF 的边界条件,勾选软件中的非线性条件,计算位移与驱动力之间的关系。仿真分析的总体步骤如图 4 所示。

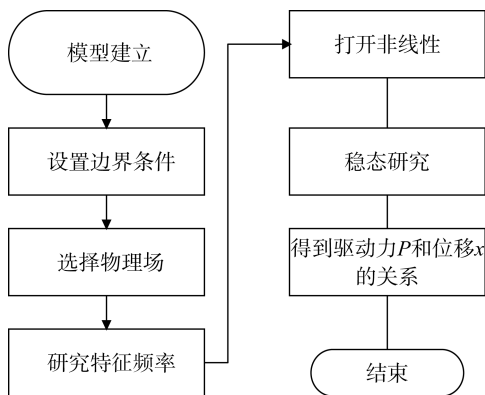


图 4 COMSOL 仿真流程

Fig. 4 Flow chart for COMSOL simulation

图 5 为非线性仿真结果,从中可以得出驱动力与位移的关系。 k_{eff} 和 $k_{3,\text{eff}}$ 的仿真值分别是 231.60 N/m 和 4.94×10^{12} N/m³, 计算得出 $k_{3,\text{eff}}$ 和 k_{eff} 的比值为 2.13×10^{10} m⁻²。

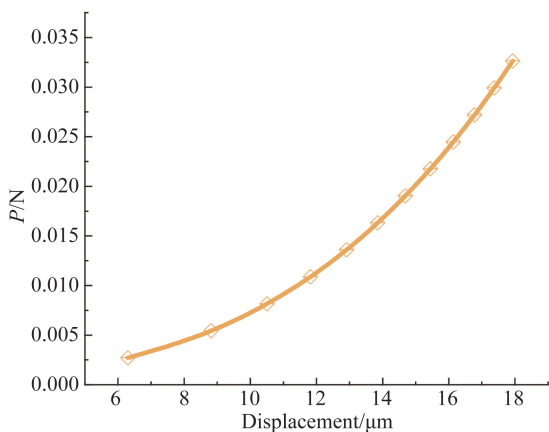


图 5 仿真结果中驱动力与位移的关系

Fig. 5 Relationship between driving force and displacement in simulation

在工作模式处于线性振动时,驱动电容驱动梳齿,使谐振梁在谐振状态下工作。在忽略阻尼时,可以得到:

$$M_{\text{eff}} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k_{\text{eff}}x = 0, \quad (2)$$

故而得到特征频率 $\omega_0 = \left(\frac{k_{\text{eff}}}{M_{\text{eff}}} \right)^{1/2}$ 。

当考虑非线性三次项 $k_{3,\text{eff}}$ 时,振动方程可用杜芬方程描述^[13]:

$$M_{\text{eff}} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k_{\text{eff}}x + k_{3,\text{eff}}x^3 = F(t), \quad (3)$$

假设方程的解为:

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos \omega t + x_2 \cos 2\omega t + x_3 \cos 3\omega t + x_4 \cos 4\omega t + \dots, \quad (4)$$

结合式(2)~式(4)可以得到:

$$\omega^2 = \frac{k_{\text{eff}}}{M_{\text{eff}}} + \frac{3k_{3,\text{eff}}}{4M_{\text{eff}}} X_m^2. \quad (5)$$

因为式(5)中第二项为小量,故而可以近似为^[13-15]:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3k_{3,\text{eff}}}{8k_{\text{eff}}} X_m^2 \right). \quad (6)$$

如式(6)所示,频率与位移呈非线性关系,频率受振幅影响发生偏移。

3 实验

图 6 为 SRA 结构的电镜图像,测试电路如图 7 所示,其中测试图的上方为幅值变化图,下方

为相位变化图。CH1,CH2,CH3,CH4 分别为左右两端的信号输入和信号输出接口,PCB 板的尺寸为 50 mm×55 mm。谐振加速度计为器件级真空封装。先后对硅谐振加速度计左右两边的谐振梁进行频率扫描,频率分别为 93 070~93 110 Hz 和 92 810~92 850 Hz,扫描结果如图 8 所示。图 8(a)是硅谐振加速度计左侧的谐振梁扫频结果,图 8(b)是硅谐振加速度计右侧的谐振梁扫频结果。图中驱动电压分别为 0.6, 1.8, 3.0, 4.0, 5.0 mV。从扫描结果可以看出,对于左侧谐振梁,工作频率约为 93 087 Hz;对于右侧谐振梁,工作频率约为 92 830 Hz。当驱动电压为 0.6 mV 时,两边的谐振梁都工作在线性区;而当驱动电压分别为 1.8,3.0,4.0,5 mV 时,两边的谐振梁都已经工作在非线性区域,谐振频率发生偏移。并且可以看出,驱动电压增大,频率偏移量也随着增大。

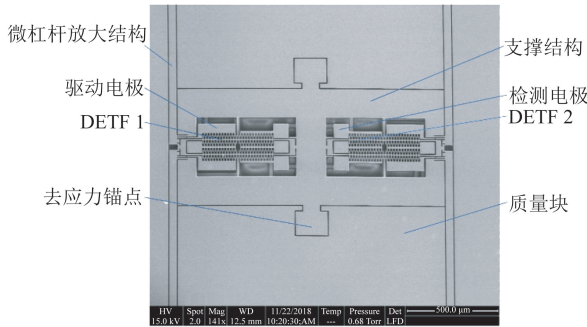


图 6 SRA 结构电镜图像

Fig. 6 SEM image of SRA structure

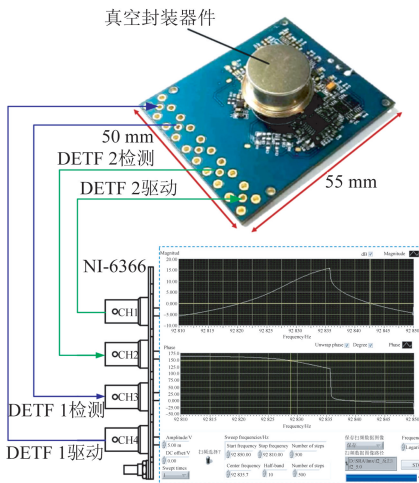
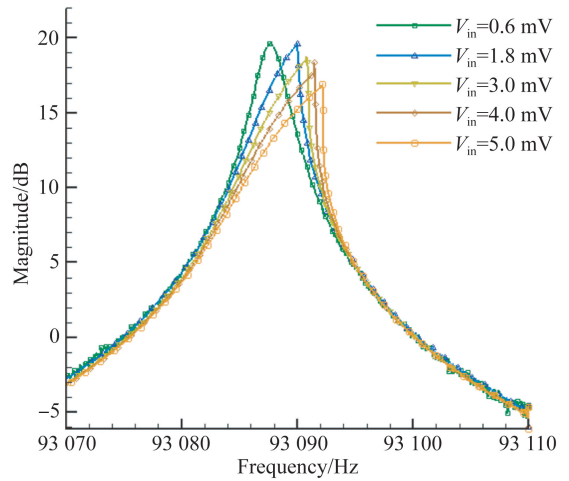


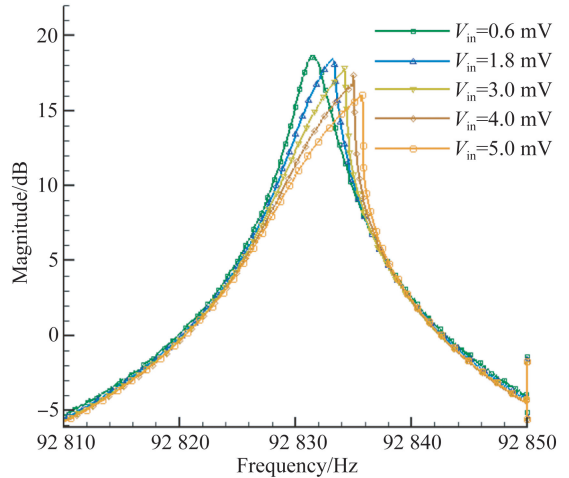
图 7 真空封装 SRA 测试电路

Fig. 7 Test circuit for vacuum sealed SRA



(a) 左边谐振梁在不同驱动电压下的扫频曲线

(a) Frequency sweep curve of left resonant beam at different driving voltages



(b) 右边谐振梁在不同驱动电压下的扫频曲线

(b) Frequency sweep curve of right resonant beam at different driving voltages

图 8 扫频测试结果

Fig. 8 Result of frequency sweeping

表 3 左边谐振梁实验测试数据

Tab. 3 Experimental test data of left resonant beam

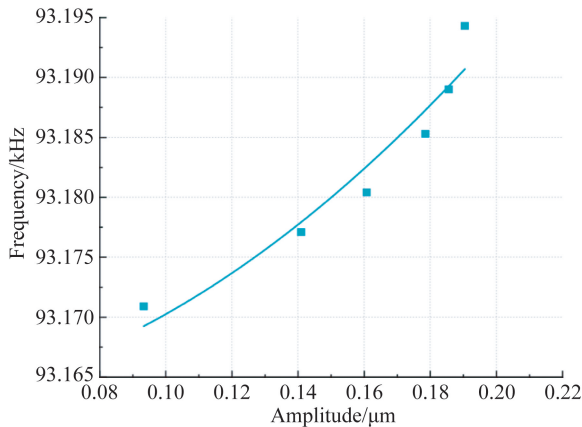
输入电压/V	f_1 /Hz	输出电压/V
0.8	93 170.9	0.317
1.2	93 177.1	0.479
1.4	93 180.4	0.547
1.6	93 185.3	0.607
1.8	93 189.0	0.631

表 4 右边谐振梁实验测试数据

Tab. 4 Experimental test data of right resonant beam

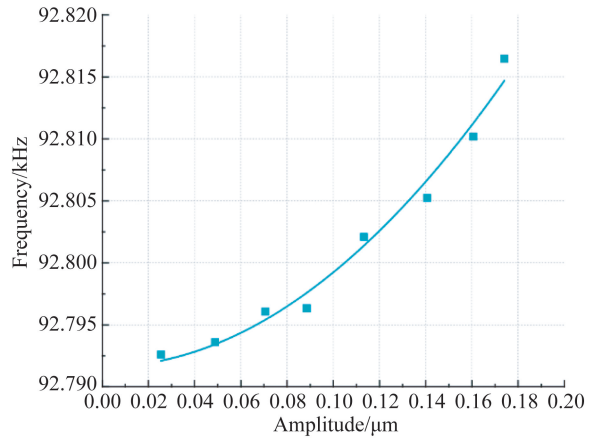
输入电压/V	f_2 /Hz	输出电压/V
0.2	92 792.6	0.087
0.4	92 793.6	0.166
0.6	92 796.1	0.240
0.8	92 796.3	0.301
1.0	92 802.1	0.385
1.2	92 805.2	0.478
1.4	92 810.2	0.546
1.6	92 816.5	0.592
2.0	93 194.3	0.642

表 3 和表 4 分别为左右两边谐振梁闭环测试数据。改变谐振器不同的输入电压得到不同的工作频率和输出电压,利用输出电压可算得谐振梁的振幅。将谐振梁的工作频率和振幅关系绘制成二维图,如图 9 所示。其中,图中实点为实验数据,曲线为拟合结果。如图所示,当增加驱动电压,也就意味着增大振幅 X_m ,工作频率也会增大,这是由于 X_m 增大时 $k_{3,eff}$ 不能够再被忽略。图 9(a)和图 9(b)分别为左右两边谐振器工作频率与振幅的关系曲线。通过使用多项式最小二乘拟合法拟合实验数据,得到两边 $k_{3,eff}$ 和 k_{eff} 的比值分别为 $2.24 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 和 $2.19 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。



(a) 左边谐振梁

(a) Left resonant beam



(b) 右边谐振梁

(b) Right resonant beam

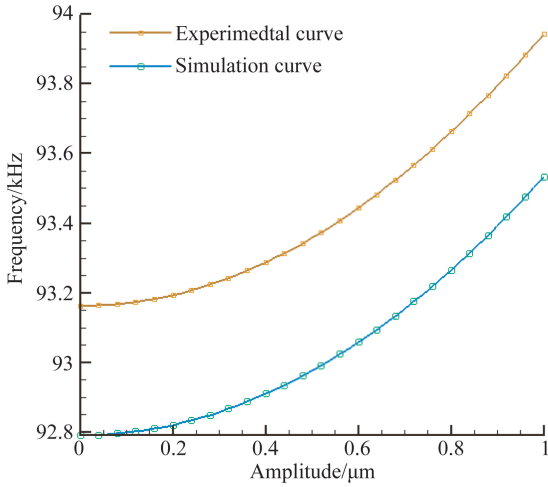
图 9 谐振梁工作频率随振幅的变化

Fig. 9 Characteristic frequency of resonant beams varies with amplitude

4 对比分析

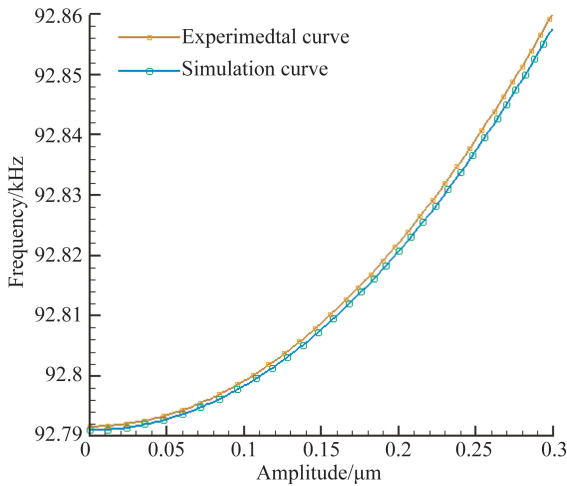
在非线性区,振幅不再正比于驱动电压,同时频率也不再是与振幅无关的一个量。当振幅增大时,器件进入非线性区,由于机械效应带来的材料刚度变化,频率会随着振幅的增加而增大。在仿真结果中, $k_{3,eff}$ 和 k_{eff} 的比值结果是 $2.13 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。在实验数据中,左右两边的谐振器 $k_{3,eff}$ 和 k_{eff} 的比值分别是 $2.24 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 和 $2.19 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。实验和仿真的误差分别是 5.2% 和 2.8%。两误差的差异是由于工艺制作导致两边 SRA 的线宽损失不一致导致的。仿真及实验得到的数据拟合曲线对比如图 10 所示。由于左右两边 DETF 加工后尺寸并不完全一致,因此测得的初始工作频率不一致。仿真时,认为 SRA 处于理想情况下,左右两边 DETF 尺寸完全相等,所以工作在同一谐振频率,实验和仿真的初始工作频率有着大小不一样的偏移,如图 10(a) 和 10(b) 所示。本文设定当非线性项 $3k_{3,eff}/8k_{eff}X_m^2$ 的值小于 10^{-5} 时,可忽略非线性项,由仿真结果拟合得到: $y = 92\ 791(1 + 7.99 \times 10^9 \times 2)$,可计算出线性范围上限为 35.4 nm。由此可得当振幅 x 小于 35.4 nm 时,器件工作在线性区。如前所述,当振幅增大时,器件进入非线性区,此时频率与振幅耦合,幅度噪

声转变为相位噪声。然而,通过上述对该器件的非线性特性分析,可知若想避免非线性带来的幅度噪声和测量的精度损失,在电路和系统设计时应该保证谐振器工作在 35.4 nm 的振幅以下。



(a) 左边谐振梁

(a) Left resonant beam



(b) 右边谐振梁

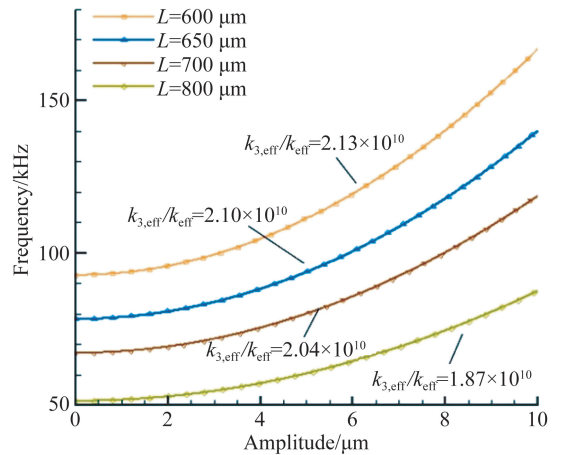
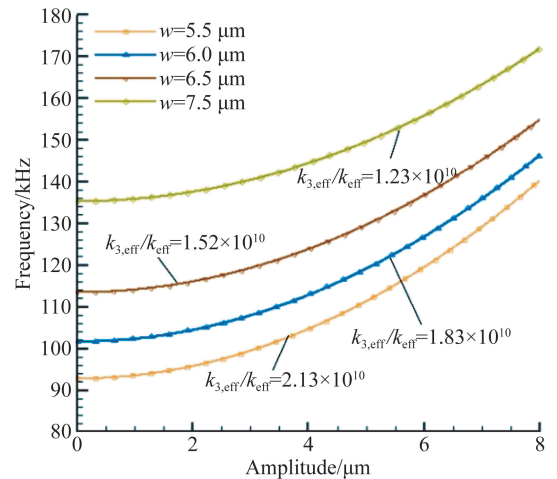
(b) Right resonant beam

图 10 实验与仿真数据曲线

Fig. 10 Experimental and simulation curves

通过上述实验及仿真,可以得出谐振器的线性工作范围在 35.4 nm 以下。为了提高器件的性噪比,需要增大 DETF 的线性振动区。为探讨 DETF 几何尺寸对结构非线性的影响,使用上文所描述的施加静力载荷的方法,改变 DETF 的长度 L 和宽度 w ,对 DETF 进行非线性仿真分析,

结果如图 11 所示。在图 11(a)中,当谐振梁的梁长 L 由 600 μm 增大到 800 μm ,工作频率下降,非线性三次项系数 $k_{3,\text{eff}}$ 与线性系数 k_{eff} 的比值由 $2.13 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 降低到 $1.87 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$,非线性得到一定的改善。如图 11(b)所示,当增大谐振梁的宽度 w 时,其工作频率会增大, $k_{3,\text{eff}}$ 与 k_{eff} 的比值呈下降趋势,由 $2.13 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 下降到 $1.23 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$,非线性得到一定的改善。图 11(c)则是同时改变长度 L 和宽度 w 时的 $A-f$ 关系曲线。可以看出,当 L 为 600 μm , w 为 5.5 μm 时,非线性效应最为明显;而当 L 为 800 μm , w 为 7.5 μm 时,非线性效应最不明显,此时两系数的比值为 $1.10 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。上述仿真工作有助于优化谐振梁结构,以减弱非线性效应。

(a) 增大长度 L 时的 $A-f$ 关系曲线(a) $A-f$ curves with length L values increasing(b) 增大宽度 w 时的 $A-f$ 关系曲线(b) $A-f$ curves with width w values increasing

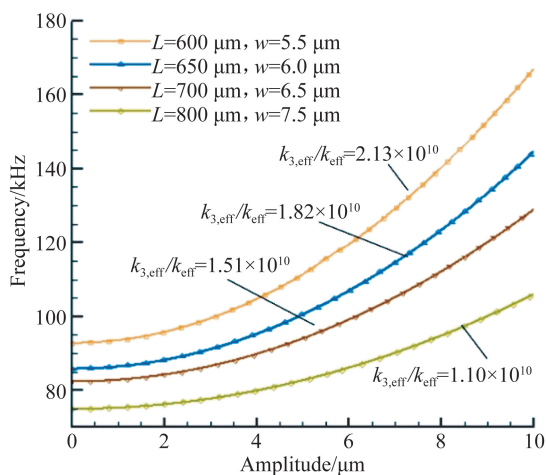
(c)不同 L 和 w 下的 A - f 关系曲线(c) A - f curves with different lengths and widths

图 11 不同尺寸谐振梁振幅与位移的仿真结果

Fig. 11 Simulation results of vibration amplitude and displacement of resonant beams in different sizes

5 结 论

由于硅谐振加速度计驱动电容采用的是滑膜结构,电容对位移的一次求导为常数,静电刚度为0,因此对于此种结构的谐振加速度计并不需要考虑静电效应对非线性的影响。首先,使用有限元软件对谐振梁进行建模仿真分析,得出非线性三次项 $k_{3,eff}$ 与线性项 k_{eff} 的理论值。进一步基于杜克方程对谐振器进行了数值分析,从公式推导上得出频率与振幅的非线性关系。同时对制备出来的硅谐振加速度计进行了扫频实验测试,实验和仿真的误差分别是 5.2% 和 2.8%。实验曲线与仿真结果吻合得较好,这印证了仿真方法的有效性和测试数据的可靠性。改变谐振梁的结构几何参数,用本文中的施加静载荷仿真方法,可以快速地看出尺寸对非线性效应的影响。上述对非线性特性的分析有助于优化器件的结构和电路。

参考文献:

- [1] BARARI A, KALIJI H D, GHADIMI M, *et al.*. Non-linear vibration of Euler-Bernoulli beams [J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2011, 8(2): 139-148.
- [2] RANTAKARI P, KAAJAKARI V, MATTILA T, *et al.*. Low noise, low power micromechanical oscillator [J]. *Transducer*, 2005: 2135-2138.
- [3] 严斌, 尹永刚, 董景新. 常温下硅微谐振加速度计零偏稳定性的提高 [J]. *光学精密工程*, 2016, 24(5): 1050-1056.
YAN B, YIN Y G, DONG J X. Improvement of bias stability of micromechanical silicon resonant accelerometer at room temperature [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(5): 1050-1056. (in Chinese)
- [4] KAAJAKARI V, MATTILA T, OJA A, *et al.*. Square-extensional mode single-crystal silicon micromechanical resonator for low-phase-noise oscillator applications [J]. *IEEE Electron Device Letters*, 2004, 25(4): 173-175.
- [5] AGARWAL M, MEHTA H, CANDLER R N, *et al.*. Scaling of amplitude-frequency-dependence nonlinearities in electrostatically transduced microresonators [J]. *Journal of Applied Physics*, 2007, 102(7): 074903.
- [6] AGARWAL M, PARK K, CANDLER R, *et al.*. Non-linearity cancellation in MEMS resonators for improved power-handling [C]. *IEEE International Electron Devices Meeting*, 2005. *IEDM Technical Digest.*, 5-5 Dec. 2005, Washington, DC, USA. IEEE, 2005: 286-289.
- [7] LEE S, NGUYEN CT C. Influence of automatic level control on micromechanical resonator oscillator phase noise [C]. *IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition Jointly With the 17th European Frequency and Time Forum*, 2003. *Proceedings of the 2003*, 4-8 May 2003, Tampa, FL, USA. IEEE, 2003: 341-349.
- [8] YANG Y S, NG E J, POLUNIN P M, *et al.*. Non-linearity of degenerately doped bulk-mode silicon MEMS resonators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2016, 25(5): 859-869.
- [9] 王玉朝, 余才佳, 田蕊, 等. MEMS 谐振器刚度非线性特性及其表征 [J]. *光学精密工程*, 2015, 23(11): 3114-3120.
WANG Y ZH, YU C J, TIAN R, *et al.*. Characterization and verification of MEMS resonator non-linearity [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(11): 3114-3120. (in Chinese)
- [10] AGARWAL M, PARK KK, CANDLER R N, *et al.*. Nonlinear characterization of electrostatic MEMS resonators [C]. 2006 *IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition*, 4-7 June 2006, Mi-

- ami, FL, USA. *IEEE*, 2006: 209-212.
- [11] SONG Z Y, CUI J, ZHAO Q C. A silicon resonant accelerometer with vibrating beam integrated with comb fingers sensing structure [C]. 2019 *IEEE 14th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS)*, 11-14 April 2019, Bangkok, Thailand. *IEEE*, 2019: 477-481.
- [12] CUI J, YANG H B, LI D, *et al.*. A silicon resonant accelerometer embedded in an isolation frame with stress relief anchor [J]. *Micromachines*, 2019, 10(9): 571.
- [13] KAAJAKARI V, MATTILA T, OJA A, *et al.*. Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, 13(5): 715-724.
- [14] 彭献. 非线性振动的一个新的渐近解法 [J]. *上海力学*, 1995, 16(3): 235-243.
PENG X. A new asymptotic method for nonlinear oscillations [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 1995, 16(3): 235-243. (in Chinese)
- [15] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. *Theory of Elasticity* [M]. 3rd Edition. Beijing: World Publishing Corporation, 1999.

作者简介:



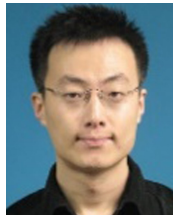
刘梦霞(1996—),女,广东韶关人,硕士研究生,2018年于湖南大学获得学士学位,主要从事 MEMS 工艺、硅谐振加速度计、硅谐振器非线性研究。E-mail: m. liu@pku. edu. cn

导师简介:



赵前程(1975—),男,黑龙江鸡西人,博士,高级工程师,2007年于北京大学获得博士学位,主要研究方向为微机电惯性器件结构及其工艺。E-mail: zqc@pku. edu. cn

通讯作者:



崔健(1982—),男,辽宁沈阳人,副研究员,2006年于北京交通大学获得学士学位,2011年于北京大学获得博士学位,主要从事 MEMS 惯性传感器技术研究。E-mail: eric. cuijian@pku. edu. cn