

文章编号 1004-924X(2015)01-0206-10

## 深切口椭圆柔性铰链优化设计

卢 倩, 黄卫清\*, 王 寅, 孙梦馨

(南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 考虑深切口椭圆形柔性铰链比其他常用的柔性铰链更适用于具有大行程要求的柔性机构, 本文对其进行了优化设计。建立了深切口椭圆形柔性铰链的刚度模型, 探讨了结构参数对其转动刚度的影响。分析了深切口椭圆柔性铰链的柔度矩阵, 利用 Newton-cotes 求积公式简化了柔度系数的计算, 在此基础上构建了多目标加权优化模型, 利用模糊优化设计方法对各结构参数进行了优化设计。优化结果表明: 绕 Z 轴旋转的角位移提高了 16.72%; 绕 Y 轴旋转角位移下降了 16.01%; 沿 X 轴、Y 轴和 Z 轴产生的线位移分别下降了 10%、29.33% 和 51.84%。数据显示: 经过优化的柔性铰链在所期望的 Z 轴方向上的转动能力得到了提高, 同时抑制了其他方向上的运动能力, 从而提高了柔性铰链的整体运动精度和结构柔度, 可用于高精密、大行程光波导封装定位平台。

**关键词:** 椭圆柔性铰链; 深切口; 刚度模型; 柔度矩阵; 多目标优化; 模糊优化

**中图分类号:** TH132 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20152301.0206

## Optimization design of deep-notch elliptical flexure hinges

LU Qian, HUANG Wei-qing, WANG Yin, SUN Meng-xin

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

\* Corresponding author, E-mail: mehwoq@nuaa.edu.cn

**Abstract:** Deep-notch elliptical flexure hinges are more suitable for a flexible mechanism with large stroke requirements as compared with other common flexure hinges, so this paper optimizes their design. The stiffness model of deep-notch elliptical flexure hinges was established firstly, and the impact of structural parameters on the rotational stiffness was also discussed in detail. Then, the flexibility matrix was analyzed by using Newton-cotes quadrature formula to simplify the calculation of flexibility coefficients, and each structural parameter was optimized by fuzzy optimization method based on the multi-objective optimization model. The results of optimization show that the angular displacement rotated with the Z axis is improved by 16.72%, while that rotated with the Y axis is decreased by 16.01%, and the linear displacements along the axes X, Y, Z are decreased by 10%, 29.33% and 51.84%, respectively. After optimization, the rotation capacity of Z axis has been improved and the transmission capacities in other directions are both inhibited, so that the movement accuracy and structural flexibility are enhanced. The test results demonstrate that the optimized deep-notch elliptical flexure hinges meet the requirements of high-precision and large travel of waveguide package positioning platforms.

**Key words:** elliptical flexure hinge; deep-notch; stiffness model; flexibility matrix; multi-objective optimization; fuzzy optimization

收稿日期: 2014-06-19; 修订日期: 2014-08-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51375224); 江苏高校优势学科建设工程基金资助项目

## 1 引言

柔性铰链是利用材料的微形弹性变形产生位移的一种特殊运动副,具有无机械摩擦、无间隙和运动灵敏度高等优点<sup>[1]</sup>。随着光通信技术的不断发展,柔性铰链在光学精密定位及调整装置中的应用逐渐广泛<sup>[2-4]</sup>,尤其是随着光波导器件封装工艺的发展,对光学定位调整装置不断提出更高的精度要求,开创了光学定位调整工作台进入微纳米级的新时代<sup>[5-8]</sup>。

结构参数和结构刚度是影响柔性铰链精度的关键因素,国内外很多学者围绕柔性铰链的精度、刚度和柔度从不同方面做了研究:王姝歆、左行勇等人<sup>[9-10]</sup>对弓形、直梁形、倒圆角直梁形及复合型柔性铰链做了深入的分析比较,给出了常用柔性铰链的相关理论模型;邱丽芳等人<sup>[11]</sup>以结构参数为设计变量建立了柔性铰链的多目标优化模型,给出了直圆形柔性铰链优化设计,但忽略了剪切力的影响;尹文韬等人<sup>[12]</sup>建立了浅切口椭圆柔性铰链的参数优化模型,但只考虑了有效力矩  $M_z$  的作用;赵磊等人<sup>[13]</sup>建立了直梁圆角形柔性铰链回转精度矩阵闭环解析模型;Y. Tian 等人<sup>[14]</sup>基于卡氏第二定理建立了直梁形、直圆形和浅切口椭圆形柔性铰链的刚度模型,给出了尺寸优化设计的建议;Saša Zelenika 等人<sup>[15]</sup>分析了不同非线性参数对于柔性铰链刚度和精度的影响;Hale、Smith 等人<sup>[16-17]</sup>分别研究了直梁倒圆角形和浅切口椭圆形的柔度矩阵计算方法,构建了柔度计算模型;Bi Shusheng 等人<sup>[18]</sup>研究了不同设计参数对3种不同环形柔性铰链刚度的影响;Lobontiu N. 等人<sup>[19-20]</sup>系统地研究了抛物线和双曲线柔性铰链的结构柔度,并设计了全柔性位移放大机构;Sachindra Mahto<sup>[21]</sup>基于欧拉-伯努利梁,分析了柔性机械臂的优化设计问题,采用有限元-拉格朗日方法构建了优化模型并给出了4种不同优化方案;Frank Dirksen 等人<sup>[22]</sup>通过研究矩形、圆形和抛物线形柔性铰链的几何轮廓特征及疲劳特性,对柔性机构进行了拓扑结构优化设计,进而得到

了高弹性收益的全柔顺机构;T. N. Do 等人<sup>[23]</sup>基于非对称性动态模型,提出了适用于柔性内窥镜系统的多参数运动控制方案。

综上所述,目前对于柔性铰链刚度、柔度的研究都集中在常规柔性铰链;对于柔性铰链的优化设计也只考虑了有效弯矩  $M_z$  的作用,忽略了其他方向上的作用力(或力矩),这与柔性铰链的实际应用情况有较大出入;另一方面,相较于常规的浅切口椭圆铰链及其他常用的柔性铰链,深切口椭圆柔性铰链具有更高的转动精度,同时其工作行程范围也有保障<sup>[24-25]</sup>,更加适合于全柔性机构的应用,完全能够满足高精密、大行程光学定位装置的应用要求。但目前尚未见对深切口椭圆柔性铰链结构参数的灵敏度的分析,对其结构刚度、结构柔度及尺寸参数化设计之间的关系尚不明确。为此,本文建立了深切口椭圆柔性铰链的转动刚度模型,分析了各结构参数对结构刚度的影响;在此基础上对深切口椭圆柔性铰链进行尺寸参数优化设计,进一步提高了深切口椭圆柔性铰链的转动精度,为应用于高精密、大行程的光波导封装定位平台的设计提供一定借鉴和依据。

## 2 深切口椭圆柔性铰链分析

### 2.1 转动刚度模型

图1所示为深切口椭圆柔性铰链的立体视图。 $h$ 、 $w$ 和 $t$ 分别为柔性铰链的高度,宽度和最小切割厚度,椭圆切口的长轴半径和短轴半径分别为 $a$ 、 $b$ ( $a \geq b$ )。

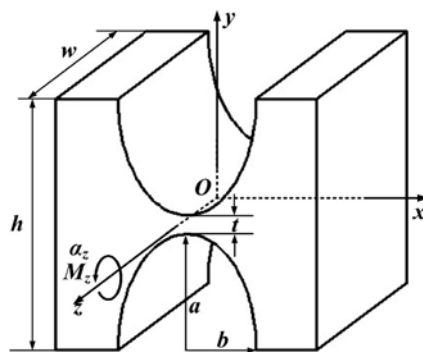


图1 深切口椭圆柔性铰链

Fig. 1 Deep-notch elliptical flexure hinge

由于  $Z$  轴是柔性铰链运动的输入轴,绕  $Z$  轴旋转角位移  $\alpha_z$  是柔性铰链运动精度和性能的关键参数。为简化分析,仅对旋转力矩  $M_z$  引起的绕  $Z$  轴旋转角位移  $\alpha_z$  进行分析<sup>[1,11]</sup>。柔性铰链转角的计算公式为:

$$\alpha_z = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{M_z}{E \cdot I(x)} dx, \quad (1)$$

式中:  $E$  为柔性铰链材料的弹性模量,  $I(x)$  为截面对中心轴的惯性矩。

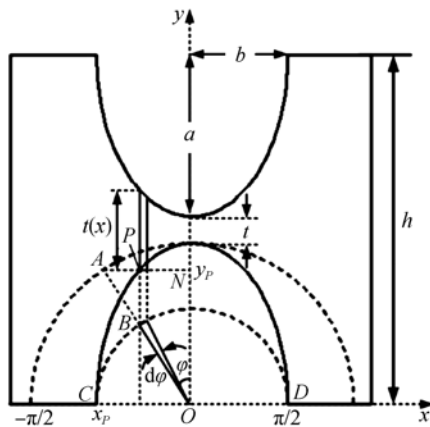


图 2 微元划分图

Fig. 2 Diagram of infinitesimal strip

图 2 所示为微元划分图,在下切口椭圆底部中心建立  $xOy$  坐标系,分别以椭圆的长轴半径  $a$  和短轴半径  $b$  作辅助圆,在大圆圆周上任取一点  $A$ ,  $OA$  交小圆于点  $B$ ,过点  $A$  作  $AN \perp y$  轴于点  $N$ ,过点  $B$  作  $BP \perp AN$  于点  $P$ ,则  $P$  点必在椭圆圆周上,且  $\angle AON$  即为离心角。令  $\angle AON$  为  $\varphi$ ,则  $P$  点坐标为:  $x_P = b \cdot \sin \varphi$ ,  $y_P = a \cdot \cos \varphi$ 。

实际上,柔性铰链的转角变形是由许多微段弯曲变形累积的结果,因此在  $P$  点取微元  $dx$ ,对应于离心角则取微元角  $d\varphi$ ,如图 2 所示。由于柔性铰链的弹性变形主要集中在中间较为薄的部分,因此可以忽略掉其余部分的转角,积分范围从图 2 的  $C$  点到  $D$  点,即积分区间为  $(-\pi/2, \pi/2)$ 。

由图 2 可得:

$$I(x) = \omega [t(x)]^3 / 12, \quad (2)$$

$$t(x) = h - 2ON = 2a + t - 2y_P = 2a + t - 2a \cdot \cos \varphi, \quad (3)$$

$$dx = d(b \sin \varphi) = b \cdot \cos \varphi d\varphi. \quad (4)$$

将式(2)、(3)及(4)代入(1)中,即可得到柔性铰链的转角  $\alpha_z$  为:

$$\alpha_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M_z}{E \cdot \frac{1}{12} \omega \cdot [t(x)]^3} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{12M_z \cdot (b \cos \varphi)}{E \omega \cdot [2a + t - 2a \cos \varphi]^3} d\varphi = \frac{12M_z b}{E \omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{(2a + t - 2a \cos \varphi)^3} d\varphi \quad (5)$$

令:

$$f_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{(2a + t - 2a \cos \varphi)^3} d\varphi, \quad (6)$$

则:

$$\alpha_z = \frac{12M_z b}{E \omega} \cdot f_1. \quad (7)$$

故,深切口椭圆柔性铰链的转动刚度  $K$  为:

$$K = M_z / \alpha_z = E \omega / (12b f_1). \quad (8)$$

## 2.2 结构参数灵敏度分析

由式(6)~(8)发现,要精确定性的分析深切口椭圆柔性铰链的结构参数对转动刚度的影响比较困难。借助于 MATLAB 软件,编写数值计算程序,定量的分析各结构参数对转动刚度的影响,能够得到各结构参数对转动刚度  $K$  的灵敏度关系,进而为深切口椭圆柔性铰链的结构设计提供依据。

深切口椭圆柔性铰链材料选用合金钢,其弹性模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ 。对转动刚度有影响

的结构参数主要包括柔性铰链椭圆切口的长轴半径  $a$ ,短轴半径  $b$ ,最小切割厚度  $t$  以及铰链的宽度  $\omega$ 。各结构参数对转动刚度的影响如图 3 所示。

由图 3(a)~(d)分析可得:

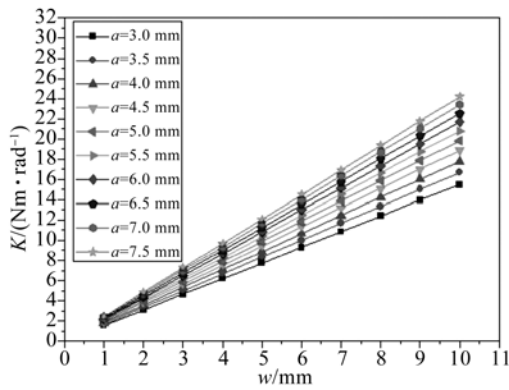
(1) 铰链宽度  $\omega$  与转动刚度  $K$  呈线性递增,这从式(8)也能够明显得到;

(2) 椭圆长轴半径  $a$  与转动刚度  $K$  呈曲线递增,但是增幅较小;

(3) 最小切割厚度  $t$  与转动刚度  $K$  呈曲线递增,且增幅越来越快;

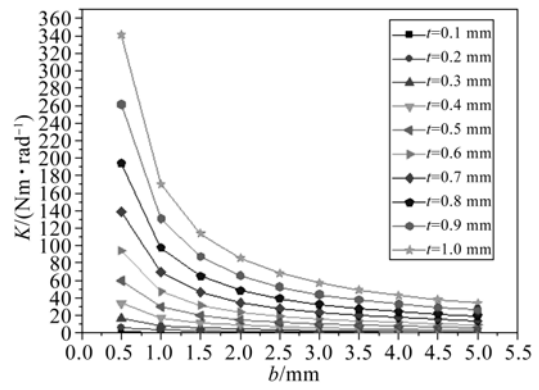
(4) 椭圆短轴半径  $b$  与转动刚度  $K$  呈反比,这从式(8)也能够明显得到。

比较图 3(a)、(b)可以发现,长轴半径  $a$  的变化能引起转动刚度  $K$  更加明显的变化,说明长轴半径  $a$  比较链宽度  $\omega$  更加灵敏,更能影响转动刚度  $K$ 。



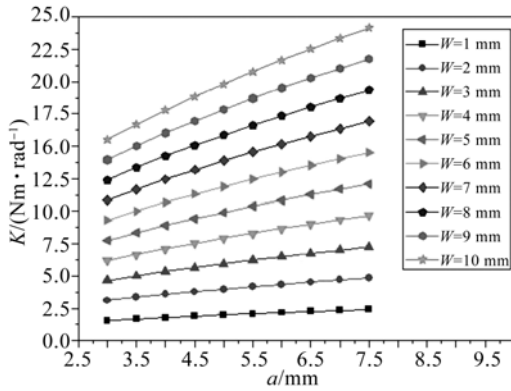
(a)  $w$  与  $K$  的关系 ( $a$  变化)

(a) Relationship between  $w$  and  $K$  (change  $a$ )



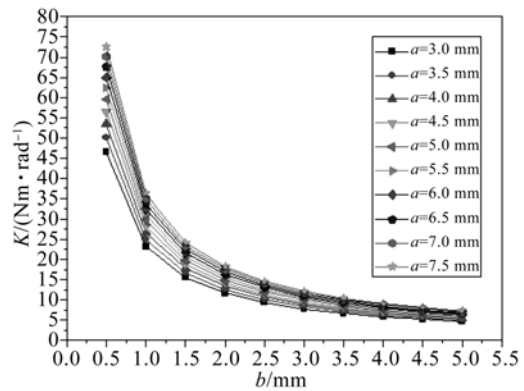
(d)  $b$  与  $K$  的关系 ( $t$  变化)

(d) Relationship between  $b$  and  $K$  (change  $t$ )



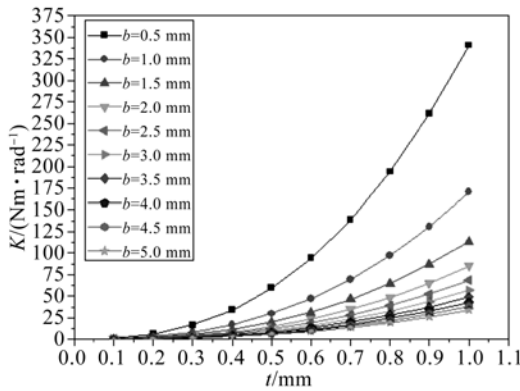
(b)  $a$  与  $K$  的关系 ( $w$  变化)

(b) Relationship between  $a$  and  $K$  (change  $w$ )



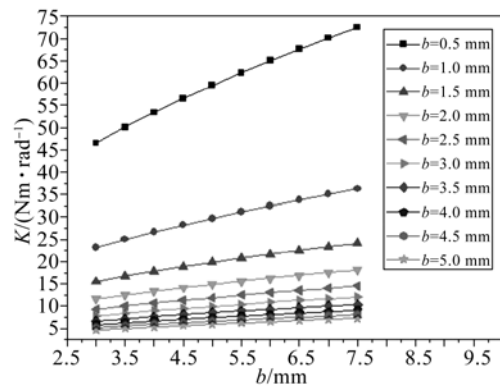
(e)  $b$  与  $K$  的关系 ( $a$  变化)

(e) Relationship between  $b$  and  $K$  (change  $a$ )



(c)  $t$  与  $K$  的关系 ( $b$  变化)

(c) Relationship between  $t$  and  $K$  (change  $b$ )



(f)  $a$  与  $K$  的关系 ( $b$  变化)

(f) Relationship between  $a$  and  $K$  (change  $b$ )

图 3 结构参数与转动刚度的关系

Fig. 3 Relationship between structure parameters and rotational stiffness

比较图 3(c)、(d) 可以发现, 最小切割厚度  $t$  的变化, 能引起转动刚度  $K$  更加明显的变化, 说

明最小切割厚度  $t$  比短轴半径  $b$  更加灵敏, 更能影响转动刚度  $K$ 。

比较图 3(e)、(f) 可以发现,短轴半径  $b$  的变化,能引起转动刚度  $K$  更加明显的变化,说明短轴半径  $b$  比长轴半径  $a$  更加灵敏,更能影响转动刚度  $K$ 。

综上所述,深切口椭圆柔性铰链各结构参数对其转动刚度  $K$  的灵敏度依次为:最小切割厚度  $t$ ,短轴半径  $b$ ,长轴半径  $a$ ,铰链宽度  $w$  对转动刚度  $K$  的影响灵敏度最小。在设计深切口椭圆柔性铰链时,应当根据设计要求首先确定最小切割厚度  $t$ ,然后确定椭圆切口的短轴半径  $b$  和长轴半径  $a$ ,最后确定铰链的宽度  $w$ 。

### 3 深切口椭圆柔性铰链优化设计

#### 3.1 柔度模型的构建

柔性铰链在实际应用中,多是受到外力和外力矩的综合作用产生弹性微变形。假设柔性铰链一端固定,另一端自由,受到弯矩  $M_y$ 、 $M_z$ ,剪切力  $F_y$ 、 $F_z$ ,以及轴向力  $F_x$  的综合作用。以柔性铰链的下椭圆切口中心点  $O$  建立  $Oxyz$  坐标系,如图 4 所示。

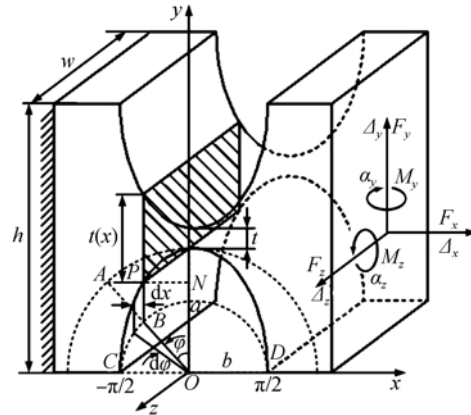


图 4 深切口椭圆柔性铰链分析图

Fig. 4 Analysis diagram of deep-notch flexure hinge

用  $\Delta$  表示线位移,用  $\alpha$  表示角位移,下标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别表示沿(绕)某个轴所产生的位移,由材料力学性质分析可得: $\Delta_x$  由  $F_x$  引起; $\Delta_y$  由  $F_y$  和  $M_z$  共同引起; $\Delta_z$  由  $F_z$  和  $M_y$  共同引起; $\alpha_y$  由  $M_y$  和  $F_z$  共同引起; $\alpha_z$  由  $M_z$  和  $F_y$  共同引起。可用如下矩阵表示外力(外力矩)和位移之间的关系:

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Delta_x-F_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Delta_y-F_y} & 0 & 0 & C_{\Delta_y-M_z} \\ 0 & 0 & C_{\Delta_z-F_z} & C_{\Delta_z-M_y} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\alpha_y-F_z} & C_{\alpha_y-M_y} & 0 \\ 0 & C_{\alpha_z-F_y} & 0 & 0 & C_{\alpha_z-M_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (9)$$

式中: $C_{\Delta_x-F_x}$  表示由外力  $F_x$  引起的沿  $x$  轴产生的线位移  $\Delta_x$ ;  $C_{\Delta_y-M_z}$  表示由外力矩  $M_z$  引起的沿  $y$  轴产生的线位移  $\Delta_y$ ;  $C_{\alpha_z-F_y}$  表示由外力  $F_y$  引起的绕  $Z$  轴产生的角位移  $\alpha_z$ ;  $C_{\alpha_z-M_z}$  表示由外力矩  $M_z$  引起的绕  $Z$  轴产生的角位移  $\alpha_z$ ; 其余类推。由式(8)可知:

$$C_{\alpha_z-M_z} = \frac{\alpha_z}{M_z} = \frac{12b}{E\tau w} f_1. \quad (10)$$

$f_1$  由式(6)给出。这里  $f_1$  为定积分,在 Mathematica 8.0 中的积分结果十分复杂,且包含反三角函数<sup>[26]</sup>。为此,采用 Newton-cotes 求积公式进行简化计算。当  $n=4$  时,  $f_1$  为:

$$f_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{(2a+t-2a\cos\varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{90} \left[ \frac{32\sqrt{2}}{(0.58a+t)^3} + \frac{12}{t^3} \right]. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)中可得:

$$C_{\alpha_z-M_z} = \frac{12b}{E\tau w} f_1 = \frac{12b}{E\tau w} \cdot \frac{\pi}{90} \left[ \frac{32\sqrt{2}}{(0.58a+t)^3} + \frac{12}{t^3} \right] = \frac{5.027b}{E\tau w} \left[ \frac{3.771}{(0.58a+t)^3} + \frac{1}{t^3} \right]. \quad (12)$$

根据文献[1]、[16]及[24]对浅切口椭圆柔性铰链柔度的计算,结合弹性变形公式和 Newton-cotes 求积公式,即可推导出深切口椭圆柔性铰链柔度矩阵  $C$  中的其他各柔度系数:

$$C_{\alpha_z-F_y} = \frac{\alpha_z}{F_y} = \frac{5.027b^2}{E\tau w} \left[ \frac{3.771}{(0.58a+t)^3} + \frac{1}{t^3} \right]. \quad (13)$$

$$C_{\alpha_y-M_y} = \frac{\alpha_y}{M_y} = \frac{5.027b}{E\tau w^3} \left[ \frac{3.771}{0.58a+t} + \frac{1}{t} \right]. \quad (14)$$

$$C_{\alpha_y-F_z} = \frac{\alpha_y}{F_z} = \frac{5.027b^2}{E\tau w^3} \left[ \frac{3.771}{0.58a+t} + \frac{1}{t} \right]. \quad (15)$$

$$C_{\Delta_z-M_y} = \frac{\Delta_z}{M_y} = \frac{5.027b^2}{E\tau w^3} \left[ \frac{3.771}{0.58a+t} + \frac{1}{t} \right]. \quad (16)$$

$$C_{\Delta_z-F_z} = \frac{\Delta_z}{F_z} = \frac{5.027b^3}{E\tau w^3} \left[ \frac{5.657}{0.58a+t} + \frac{1}{t} \right]. \quad (17)$$

$$C_{\Delta_y-M_z} = \frac{\Delta_y}{M_z} = \frac{5.027b^2}{E\tau w} \left[ \frac{3.771}{(0.58a+t)^3} + \frac{1}{t^3} \right]. \quad (18)$$

$$C_{\Delta_y-F_y} = \frac{\Delta_y}{F_y} = \frac{5.027b^3}{E\tau w} \left[ \frac{5.657}{(0.58a+t)^3} + \frac{1}{t^3} \right]. \quad (19)$$

$$C_{\Delta_x-F_x} = \frac{\Delta_x}{F_x} = \frac{0.419b}{E\tau w} \left[ \frac{3.771}{0.58a+t} + \frac{1}{t} \right]. \quad (20)$$

### 3.2 多目标模糊优化设计

#### (1) 设计变量

柔性铰链的主要结构参数有宽度  $w$ , 椭圆切口的长轴半径和短轴半径分别为  $a, b(a \geq b)$ , 最小切割厚度  $t$ . 因此, 设计变量  $\mathbf{X}$  为:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [t, b, a, w]^T. \quad (21)$$

#### (2) 目标函数

柔性铰链绕  $Z$  轴的旋转角位移  $\alpha_z$  是衡量柔性铰链的运行精度和性能的最重要参数, 其他方向上的位移相对于柔性铰链的运动来说都是“干扰因素”。因此, 在设计柔性铰链时, 应当尽量增大  $C_{\alpha_z-M_z}$  和  $C_{\alpha_z-F_y}$ , 而其他方向上的运动柔度应尽可能小。令:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= C_{\alpha_z-M_z}; g_2(\mathbf{X}) = C_{\alpha_z-F_y}; g_3(\mathbf{X}) = C_{\alpha_y-M_y}; \\ g_4(\mathbf{X}) &= C_{\alpha_y-F_z}; g_5(\mathbf{X}) = C_{\Delta_z-M_y}; g_6(\mathbf{X}) = C_{\Delta_z-F_z}; \\ g_7(\mathbf{X}) &= C_{\Delta_y-M_z}; g_8(\mathbf{X}) = C_{\Delta_y-F_y}; g_9(\mathbf{X}) = C_{\Delta_x-F_x}; \end{aligned}$$

构建如下多目标优化函数:

$$\min G(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{j=3}^9 \beta_j g_j(\mathbf{X})}{\sum_{i=1}^2 \beta_i g_i(\mathbf{X})}, \quad (22)$$

其中:  $\beta_i$  为各柔度系数的加权系数, 反映了各子目标在多目标优化问题中的重要程度。

采用传统的加权法寻找最优解。不同的加权系数会产生不同的最优解, 因此多目标优化问题普遍存在着最优解集<sup>[27]</sup>。在实际应用中, 须结合不同影响因素的重要程度和决策人员的个人偏好, 从最优解集合中挑选一个或一些解作为多目标优化问题的最优解<sup>[28]</sup>。

采用固定权重值法来求解多目标优化问题。根据各子目标函数的实际意义及对多目标函数的影响程度, 即, 深切口椭圆柔性铰链绕  $Z$  轴的转动能力应该尽量大, 而其他方向上的运动能力应尽量小; 这里取加权系数为:  $\beta_1 = 0.35; \beta_2 = 0.3; \beta_3 = \beta_4 = \dots = \beta_9 = 0.05$ 。

#### (3) 约束条件

##### ① 尺寸约束

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (23)$$

式中:  $x_{il}, x_{iu}$  分别是设计变量  $x_i$  取值的下限值和上限值。

因为柔性铰链为深切口椭圆铰链, 因此对于长、短轴半径存在如下关系:

$$x_2 \leq x_3. \quad (24)$$

简化柔性铰链弹性变形公式并达到工程设计应用的标准, 必须要满足:

$$x_1 \leq 0.2x_2. \quad (25)$$

##### ② 应力-强度约束

在力矩  $M_z$  的作用下, 柔性铰链最小厚度部分所承受的弯曲应力为最大, 故应满足:

$$\sigma_{\max} = M_z/W_z \leq \sigma_u = \sigma_s, \quad (26)$$

式中:  $\sigma_{\max}$  为最大弯曲应力,  $\sigma_u$  为强度上限值;  $\sigma_s$  为材料的屈服强度,  $W_z$  为抗弯截面系数。

#### (4) 模糊约束的隶属函数

将模糊约束条件的隶属函数分为两类处理:

##### ① 几何约束采用梯形分布隶属函数:

$$\mu(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i - \underline{x}_{il}}{\underline{x}_{iu} - \underline{x}_{il}} & (\underline{x}_{il} \leq x_i \leq \underline{x}_{iu}) \\ 1 & (\underline{x}_{iu} \leq x_i \leq \underline{x}_{il}) \\ \frac{\bar{x}_{iu} - x_i}{\bar{x}_{iu} - \bar{x}_{il}} & (\bar{x}_{il} \leq x_i \leq \bar{x}_{iu}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad (27)$$

式中:  $\underline{x}_{il}, \bar{x}_{il}$  分别为设计变量  $x_i$  的下限值  $x_{il}$  的下界和上界;  $\underline{x}_{iu}, \bar{x}_{iu}$  分别为设计变量  $x_i$  的上限值  $x_{iu}$  的下界和上界。

##### ② 强度约束采用降半形梯形分布隶属函数:

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma < \underline{\sigma}_u) \\ \frac{\bar{\sigma}_u - \sigma}{\bar{\sigma}_u - \underline{\sigma}_u} & (\underline{\sigma}_u < \sigma \leq \bar{\sigma}_u) \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad (28)$$

式中:  $\underline{\sigma}_u, \bar{\sigma}_u$  分别为强度约束  $\sigma$  的上限值  $\sigma_u$  的下界和上界。

#### (5) 非模糊化和单目标优化处理

各设计变量上下限值的具体范围为:

$$\begin{cases} \underline{x}_{il} + (\bar{x}_{il} - \underline{x}_{il}) \cdot \lambda \leq x_i \leq \bar{x}_{iu} - (\bar{x}_{iu} - \underline{x}_{iu}) \cdot \lambda \\ \sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}_u - (\bar{\sigma}_u - \underline{\sigma}_u) \cdot \lambda \end{cases}. \quad (29)$$

显然,  $\lambda$  取值的不同将直接影响到模糊优化的结果。实际上,  $\lambda$  值的大小反映了不同的优化水平, 这里采用最优水平截集法来求解最优  $\lambda$  值, 同时将上述多目标模糊优化问题转化为单目标优化问题。

①建立因素集  $U$ 。柔性铰链在实际使用中, 影响其运动精度和运动性能的因素主要有:  $u_1 =$  设计水平高低;  $u_2 =$  工艺及制造水平;  $u_3 =$  材质优

$$R = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.5 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.3 & 0.5 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 1.0 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

④建立权重集, 针对上述因素集, 分配各权重为:  $W = [0.20, 0.3, 0.22, 0.18, 0.1]$ 。

⑤建立模糊综合评价集  $B = W \cdot R$ 。经过计算可得:  $B = [0.032, 0.092, 0.26, 0.508, 0.878, 0.912, 0.864, 0.532, 0.468, 0.122, 0.04]$ 。

采用加权平均法可求得最优水平值:

$$\lambda^* = \sum_{j=1}^{11} b_j \cdot \lambda_j / \sum_{j=1}^{11} b_j = 0.6337$$

将最优  $\lambda^*$  值代入式(29)即可确定各设计变量的尺寸边界。至此, 在最宽松约束条件下, 可以采用普通优化方法寻找各子目标函数的最优解

$$L_i(X) = \begin{cases} 1 & g_i(X) < g_{i\min}(X_k^*) \\ \left[ \frac{g_{i\max}(X_k^*) - g_i(X)}{g_{i\max}(X_k^*) - g_{i\min}(X_k^*)} \right]^q & g_{i\min}(X_k^*) \leq g_i(X) \leq g_{i\max}(X_k^*) \\ 0 & g_{i\max}(X_k^*) < g_i(X) \end{cases}$$

式中:  $q$  为权重系数, 取非负实数。

最后, 引入辅助变量  $m(0 \leq m \leq 1)$ , 将模糊多目标优化问题转化为单目标优化问题, 即求:  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, m]^T$ , 使得存在最大的  $m_{\max}$ ,  $L_i(X) \geq m_{\max}$ , 且满足多目标优化模型的约束条件式(23)~(25)。这样, 解  $m_{\max}$  所对应的一组解  $X^* = [x_{1^*}, x_{2^*}, x_{3^*}, x_{4^*}, m_{\max}]^T$ , 即为所求多目标优化模型的优化解。

### 3.3 算例分析

给定设计变量的上下限值(单位: mm):

$$X_L = [x_{1l}, x_{2l}, x_{3l}, x_{4l}]^T = [0.05, 1.0, 2.0, 3.0]^T;$$

$$X_U = [x_{1u}, x_{2u}, x_{3u}, x_{4u}]^T = [0.5, 3.0, 6.0, 8.0]^T.$$

根据所求得的最优  $\lambda^*$  值和式(30), 可得各子目标函数优化解的极大、极小值, 如表 1 所示。

劣;  $u_4 =$  使用工况优劣;  $u_5 =$  维护保养水平。故建立的因素集为  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 。

②建立水平值  $\lambda$  的评判集。这里给出水平值  $\lambda$  的评判集为  $\lambda = (0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0)$ 。

③建立单因素模糊评判矩阵  $R$ 。单因素模糊评判矩阵  $R$  中的元素  $r_{ij}$  是因素集  $U$  到评判集  $\lambda$  的模糊映射。采用专家打分法, 得到的单因素模糊评判矩阵  $R$  为:

$X_{i^*}$ , 进而可以得到各子目标函数的最优解  $g_i(X_{i^*})$ 。对各子目标函数  $g_i(X)$  按上述方法循环求解, 便可求得各子目标函数在设计变量尺寸边界范围内的优化解的极小、极大值  $g_{i\min}(X_{k^*})$ ,  $g_{i\max}(X_{k^*})$ , 即:

$$\begin{cases} g_{i\min}(X_k^*) = \min_{1 \leq k \leq 9} g_i(X_k^*) \\ g_{i\max}(X_k^*) = \max_{1 \leq k \leq 9} g_i(X_k^*) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 9. \tag{30}$$

根据式(30), 构建如下隶属函数:

$$\begin{cases} g_i(X) < g_{i\min}(X_k^*) \\ g_{i\min}(X_k^*) \leq g_i(X) \leq g_{i\max}(X_k^*) \\ g_{i\max}(X_k^*) < g_i(X) \end{cases} \tag{31}$$

表 1 子目标函数优化解的极大极小值

Tab. 1 Minimax values of sub-objective function's optimization solutions

子目标函数	优化解极大值	优化解极小值
$g_1(X)$	0.247	0.032
$g_2(X)$	$5.298 \times 10^{-4}$	$1.480 \times 10^{-5}$
$g_3(X)$	$1.50 \times 10^{-3}$	$1.353 \times 10^{-4}$
$g_4(X)$	$1.40 \times 10^{-6}$	$6.268 \times 10^{-8}$
$g_5(X)$	$1.40 \times 10^{-6}$	$6.268 \times 10^{-9}$
$g_6(X)$	$3.70 \times 10^{-9}$	$3.436 \times 10^{-11}$
$g_7(X)$	$5.298 \times 10^{-4}$	$1.480 \times 10^{-5}$
$g_8(X)$	$1.150 \times 10^{-6}$	$6.863 \times 10^{-9}$
$g_9(X)$	$3.20 \times 10^{-9}$	$6.363 \times 10^{-10}$

取  $q = 2$ , 即可求得各优化子目标的隶属函数。由此, 将多目标优化模型转换为普通的单目

标优化问题,可以通过编写 matlab 程序,寻找在尺寸边界范围内的最优解,其结果为: $\mathbf{X}^* = [x_{1*}, x_{2*}, x_{3*}, x_{4*}]^T = [0.36, 1.82, 2.0, 5.28]^T$ 。

为了方便比较优化性能,结合设计经验取一组初始设计值: $\mathbf{X}^{(0)} = [0.45, 3.0, 5.0, 5.0]^T$ 。将设计变量的初始值  $\mathbf{X}^{(0)}$  与优化之后的取值  $\mathbf{X}^*$  进行对比。定义优化率为(优化后的值-优化前的值)/优化前的值。对比结果如表 2 所示。

表 2 优化设计结果对比

Tab. 2 Comparison of optimization results

目标函数	优化前 $\mathbf{X}^{(0)}$	优化后 $\mathbf{X}^*$	优化率/%
$g_1(X)$	0.159	0.186	16.98
$g_2(X)$	$4.772 \times 10^{-4}$	$3.380 \times 10^{-4}$	-29.17
$g_3(X)$	$1.90 \times 10^{-3}$	$1.60 \times 10^{-3}$	-15.79
$g_4(X)$	$5.80 \times 10^{-6}$	$2.80 \times 10^{-6}$	-51.72
$g_5(X)$	$5.80 \times 10^{-6}$	$2.80 \times 10^{-6}$	-51.72
$g_6(X)$	$2.02 \times 10^{-8}$	$6.40 \times 10^{-9}$	-68.32
$g_7(X)$	$4.772 \times 10^{-4}$	$3.380 \times 10^{-4}$	-29.17
$g_8(X)$	$1.438 \times 10^{-6}$	$6.30 \times 10^{-7}$	-56.19
$g_9(X)$	$4.00 \times 10^{-9}$	$3.60 \times 10^{-9}$	-10
$G(X)$	0.0021	0.0015	-28.57

目标函数  $g_1(X)$  和  $g_2(X)$  是最能够体现柔性铰链的运动精度和运动性能的。如表 2 所示,经过模糊优化设计之后,柔度系数  $C_{\alpha_z-M_z}$  提高了 16.98%,而  $C_{\alpha_z-F_y}$  降低了 29.17%,但  $C_{\alpha_z-M_z}$  和  $C_{\alpha_z-F_y}$  的数量级相差 1 000 倍,故  $C_{\alpha_z-F_y}$  对  $\alpha_z$  造成的影响可忽略。因此,优化之后的铰链绕 Z 轴的转动能力仍然得到了提高;另一方面,其他各轴上的柔度系数普遍呈减小的趋势,优化率在 10%~68%,说明柔性铰链在其他方向上的位移(线位移和角位移)都得到了抑制。

为了进一步验证模糊优化设计的有效性,下面对沿(绕)各轴的位移进行定量分析。给定铰链所受的各方向的力与力矩:弯矩  $M_z = 0.5 \text{ Nm}$ ,  $M_y = 0.1 \text{ Nm}$ ,剪切力  $F_y = 1 \text{ N}$ ,  $F_z = 0.2 \text{ N}$ ,轴向力  $F_x = 0.2 \text{ N}$ 。深切口椭圆铰链的尺寸分别采用经验取值  $\mathbf{X}^{(0)}$  和优化后的取值  $\mathbf{X}^*$ ,结合表 2 中的数据,按式(9)计算就得到了优化前后各轴的位移,具体结果如表 3 所示。

表 3 优化前后各轴位移结果对比

Tab. 3 Comparison of each axis's displacements before and after optimizations

位移	优化前 $\mathbf{X}^{(0)}$	优化后 $\mathbf{X}^*$	优化率/%
$\alpha_z/\text{rad}$	0.079 97	0.093 34	16.72
$\alpha_y/\text{rad}$	$1.911 6 \times 10^{-4}$	$1.6056 \times 10^{-4}$	-16.01
$\Delta_z/\text{m}$	$5.840 4 \times 10^{-7}$	$2.812 8 \times 10^{-7}$	-51.84
$\Delta_y/\text{m}$	$2.400 3 \times 10^{-4}$	$1.696 3 \times 10^{-4}$	-29.33
$\Delta_x/\text{m}$	$8.00 \times 10^{-10}$	$7.20 \times 10^{-10}$	-10

经过模糊优化设计之后,绕 Z 轴旋转产生的角位移  $\alpha_z$  提高了 16.72%;而其他不希望产生位移的运动方向上,其线位移或角位移都呈下降趋势,其中,绕 Y 轴旋转的角位移  $\alpha_y$  下降了 16.01%;沿 X 轴、Y 轴和 Z 轴产生的线位移分别下降了 10%、29.33%和 51.84%。得到的数据表明,经过模糊优化设计之后,柔性铰链在所期望的 Z 轴方向上的转动能力得到了提高,同时又抑制了其他方向上的运动能力,提高了柔性铰链的整体运动精度和运动能力,使之更加适合应用于高精密、大行程要求的光波导封装定位平台中。

### 4 结 论

本文建立了深切口椭圆形柔性铰链的刚度模型,分析了深切口椭圆柔性铰链的结构参数对其转动刚度 K 的灵敏度。

分析了深切口椭圆柔性铰链的柔度矩阵,利用 Newton-cotes 求积公式简化了柔度矩阵中各柔度系数的计算;构建了多目标加权优化设计模型,利用模糊优化设计方法对深切口椭圆柔性铰链的各结构参数进行了优化设计。结果表明:该方法能够有效地提高铰链的运动精度和运动性能,绕 Z 轴旋转角位移  $\alpha_z$  提高了 16.72%;绕 Y 轴旋转角位移  $\alpha_y$  下降了 16.01%;沿 X 轴、Y 轴和 Z 轴产生的线位移分别下降了 10%、29.33%和 51.84%。这表明采用多目标模糊优化设计方法对于提高柔性铰链的运动精度及运动行程范围具有明显的作用。相较于其他常见的柔性铰链,深切口柔性铰链更适合应用于高精密、大行程的光波导封装定位平台及其他光学应用仪器或装置。

## 参考文献:

- [1] 李庆祥, 王东升, 李玉和. 现代精密仪器设计(第二版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
LI Q X, WANG D SH, LI Y H. *Design of Modern Precision Instruments* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [2] QING S X. Design, testing and precision control of a novel long-stroke flexure micro-positioning system [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 70(6): 209-224.
- [3] QIN Y D, BIJAN S, ZHANG D W, *et al.*. Compliance modeling and analysis of statically indeterminate symmetric flexure structures [J]. *Precision Engineering*, 2013, 37(2): 415-424.
- [4] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D, *et al.*. Development and dynamic modelling of a flexure-based Scott-Russell mechanism for nano-manipulation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(3): 957-978.
- [5] 赵磊, 巩岩, 赵阳. 光刻投影物镜中的透镜 X-Y 柔性微动调整机构 [J]. *光学精密工程*, 2013, 21(6): 1425-1433.  
ZHAO L, GONG Y, ZHAO Y. Flexure-based X-Y micro-motion mechanism used in lithographic lens [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013, 21(6): 1425-1433. (in Chinese)
- [6] 杨志刚, 刘登云, 吴丽萍, 等. 应用于压电叠堆泵的微位移放大机构 [J]. *光学精密工程*, 2007, 15(6): 884-888.  
YANG ZH G, LIU D Y, WU L, *et al.*. Micro-displacement magnifying mechanism used in piezo-stack pump [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(6): 884-888. (in Chinese)
- [7] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D. Closed-form compliance equations of filleted V-shaped flexure hinges for compliant mechanism design [J]. *Precision Engineering*, 2010, 34(3): 408-418.
- [8] WENDY F F, MOISES R L, OLEG S E, *et al.*. Combined application of power spectrum centroid and support vector machines for measurement improvement in optical scanning systems [J]. *Signal Processing*, 2014, 98(5): 37-51.
- [9] 王妹歆, 陈国平, 周建华, 等. 复合型柔性铰链机构特性及其应用研究 [J]. *光学精密工程*, 2005, 13(S1): 91-97.  
WANG SH X, CHEN G P, ZHOU J H, *et al.*. Compliant mechanisms consisted of compound flexible hinges and its applications [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2005, 13(S1): 91-97. (in Chinese)
- [10] 左行勇, 刘晓明. 三种形状柔性铰链转动刚度的计算与分析 [J]. *仪器仪表学报*, 2006, 27(12): 1725-1728.  
ZUO X Y, LIU X M. Calculation and analysis of rotational stiffness for three types of flexure hinges [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2006, 27(12): 1725-1728. (in Chinese)
- [11] 邱丽芳, 南铁玲, 翁海珊. 柔性铰链运动性能多目标优化设计 [J]. *北京科技大学学报*, 2008, 30(2): 189-192.  
QIU L F, NAN T L, WENG H SH. Multi-objective optimization for rotation capacity of flexure hinges [J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2008, 30(2): 189-192. (in Chinese)
- [12] 尹文韬, 芮延年, 李瑞. 微夹持机构中椭圆弧柔性铰链的模糊优化设计 [J]. *机床与液压*, 2011, 39(23): 104-107.  
YIN W T, RUI Y N, LI R. Fuzzy optimization of the elliptical flexure hinge in micro-gripper [J]. *Machine Tools & Hydraulics*, 2011, 39(23): 104-107. (in Chinese)
- [13] 赵磊, 巩岩, 华洋洋. 直梁圆角形柔性铰链的柔度矩阵分析 [J]. *中国机械工程*, 2013, 24(18): 2462-2468.  
ZHAO L, GONG Y, HUA Y Y. Compliance matrix analysis of corner-filletted flexure hinge [J]. *China Mechanical Engineering*, 2013, 24(18): 2462-2468. (in Chinese)
- [14] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D, *et al.*. Three flexure hinges for compliant mechanism designs based on dimensionless graph analysis [J]. *Precision Engineering*, 2010, 34(1): 92-100.
- [15] ZELENKA S, MUNTEANU M G, BONA F. Optimized flexural hinge shapes for microsystems and high-precision applications [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(10): 1826-1839.
- [16] HALE L C. *Principles and Techniques for Designing Precision Machines* [D]. California: University of California, 1999.
- [17] SMITH T S, BADAMI V G, DALE J S, *et al.*. Elliptical flexure hinges [J]. *Review of Scientific Instruments*, 1997, 68(3): 1474-1483.
- [18] SHUSHENG B, SHANSHAN Z, XIAOFENG Z. Dimensionless design graphs for three types of annulus-shaped flexure hinges [J]. *Precision Engineering*, 2010, 34(3): 659-666.

- [19] LOBONTIU N, PAINE J S N, O'MALLEY E, *et al.*. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations [J]. *Precision Engineering*, 2002, 26(2): 183-192.
- [20] LOBONTIU N. Compliance-based matrix method for modeling the quasi-static response of planar serial flexure-hinge mechanisms [J]. *Precision Engineering*, 2014, 38(3): 639-650.
- [21] SACHINDRA M. Shape optimization of revolute-jointed single link flexible manipulator for vibration suppression [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 75(3): 150-160.
- [22] FRANK D, MATHIAS A, TAREK I, *et al.*. Incorporation of flexural hinge fatigue-life cycle criteria into the topological design of compliant small-scale devices [J]. *Precision Engineering*, 2013, 37(3): 531-541.
- [23] DO T N, TJAHHJOWIDODO T, LAU M W S, *et al.*. Hysteresis modeling and position control of tendon-sheath mechanism in flexible endoscopic systems [J]. *Mechatronics*, 2014, 24(1): 12-22.
- [24] 陈贵敏, 韩琪. 深切口椭圆柔性铰链 [J]. *光学精密工程*, 2009, 17(3): 570-575.  
CHEN G M, HAN Q. Deep-notch elliptical flexure hinges [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(3): 570-575. (in Chinese)
- [25] 陈贵敏, 刘小院, 贾建援. 椭圆柔性铰链的柔度计算 [J]. *机械工程学报*, 2006, 42(Z): 111-114.  
CHEN G M, LIU X Y, JIA J Y. Compliance calculation of elliptical flexure hinge [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(Z): 111-114. (in Chinese)
- [26] 陈贵敏, 贾建援, 刘小院, 等. 椭圆柔性铰链的计算与分析 [J]. *工程力学*, 2006, 23(5): 152-156.  
CHEN G M, JIA J Y, LIU X Y, *et al.*. Design calculation and analysis of elliptical flexure hinges [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(5): 152-156. (in Chinese)
- [27] 马小妹, 李宇龙, 严浪. 传统多目标优化方法和多目标遗传算法的比较综述 [J]. *电气传动自动化*, 2010, 32(3): 48-50, 53.  
MA X SH, LI Y L, YANG L. Comparison review of traditional multi-objective optimization methods and multi-objective genetic algorithm [J]. *Electric Drive Automation*, 2010, 32(3): 48-50, 53. (in Chinese)
- [28] 杨加明, 盛佳, 张义长. 粘弹性复合材料结构的多目标优化设计 [J]. *工程力学*, 2013, 30(2): 19-23, 37.  
YANG J M, SHENG J, ZHANG Y CH. Multi-objective optimization design of composite structures with interleaved viscoelastic layers [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(2): 19-23, 37. (in Chinese)

#### 作者简介:



卢倩(1983—),男,江苏盐城人,博士研究生,2006年、2009年于中国矿业大学分别获得学士、硕士学位,主要从事压电精密致动技术方面的研究。E-mail:jackeylu@126.com



黄卫清(1965—),男,江苏南通人,博士,教授,博士生导师,1987年、1990年于南京航空航天大学分别获得学士、硕士学位,1999年于香港理工大学获得博士学位,主要从事超声电机技术的研究。E-mail:mehwq@nuaa.edu.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)