

文章编号 1004-924X(2014)12-3247-11

基于三维凸包的公差基准轴线拟合

郭崇颖*, 刘检华, 唐承统, 蒋科, 刘海博
(北京理工大学机械与车辆学院, 北京 100081)

摘要:针对采用坐标测量系统(CMM)进行基准轴线测量的特点,提出了一种基于凸包的基准轴线拟合算法。该算法首先根据计算几何的凸包理论,利用礼品包裹算法获得轴线采样点构建的三维凸包;考虑基准体系(Datum Reference Frames DRF)中基准的定义,确定基准轴线处于不同的基准优先级时被约束的自由度以及基准的评价方法。然后,利用轴线的数学方程将带约束的轴线分解成转动向量和平动向量并依次建立带约束的基准轴线转动和平动的数学模型。最后,利用三维凸包的相关定理以及基准的相关实体要求完成基准轴线的变动区域的求解。实验结果显示:采用该算法进行轴线基准体系建立得到的结果在处理无约束的轴线基准拟合时与CMM最小二乘算法得到的结果近似重叠,在处理存在约束的轴线基准拟合时两者的误差较大。不过,本文算法保证了受约束轴线相对位置关系,符合基准轴线的建立原则,满足工程需求。

关键词:基准轴线拟合;计算几何;三维凸包;坐标测量机(CMM)

中图分类号:TP216.1;TH72 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20142212.3247

Datum axis fitting for tolerances based on 3D convex hulls

GUO Chong-ying*, LIU Jian-hua, TANG Cheng-tong, JIANG Ke, LIU Hai-bo

(School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 10081, China)

* Corresponding author, E-mail: guocy912@126.com

Abstract: According to the characteristics of datum axis measurement by using a Coordinate Measuring Machine (CMM), a method based on 3D convex hulls was proposed to realize the datum plane fitting. Firstly, the 3D convex hulls of discrete sampling points were rapidly constructed by using "gift encapsulated algorithm" based on the computational geometric theory. According to the definition of datum axis in Datum Reference Frames (DRF), the constrained degrees of freedom as well as the method to establish the datum axis were determined by the priority of datum axis and the features of other datum. Then, the mathematical equation of datum axis was used to resolve the constrained axis into a rotational vector and a translational vector and then to establish mathematical models with constrained datum axis rotation and constrained datum axis translation. Finally, the variable domain of datum axis was obtained by using 3D convex hulls based on material requirements. The experiment demonstrate that the results of datum axis determined by proposed method is the same as that of the CMM least square method in an unconstrained axis processing, however, it has more different as compared with that in a constrained axis processing. Fortunately, the method ensures the relative position

收稿日期:2014-03-13;修订日期:2014-05-05.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51275047);国防基础科研基金资助项目(No. A2220110008);总装预研基金资助项目(No. 51318010102)。

relationship between the constrained axes, and it accords with the principle of establishing datum axes and meets the requirements of engineering applications

Key words: datum axis fitting; computational geometry; 3D convex hull; Coordinate Measuring Machine(CMM)

1 引言

目前,坐标测量系统(Coordinate Measuring Machining, CMM)已被广泛应用于精密仪器的几何误差评定,在评定之前需对基准进行精确拟合。基准包括基准点、基准轴线和基准平面,其中基准轴线通过回转表面的离散采样点拟合得到,相比于其它基准类型,基准轴线具有更多的自由度,拟合过程更加复杂。

国内外学者在基准轴线拟合方面做了大量研究工作,其成果和算法主要集中在解析几何和计算几何方面。Zhang^[1]建立非线性数学模型实现了圆柱度最小区域误差的评定。Chatterjee G 等人^[2]采用最小二乘法实现了圆柱度误差的评定。Calvoa R 等人^[3]在此基础上进行改进实现了圆度误差的评定。苑国英等^[4]采用椭圆拟合法建立了轴线垂直度误差的数学模型。李惠芬等^[5]建立了采样数据为直角坐标值的圆柱度误差评定的最小二乘法数学模型。姚南殉等人^[6-7]提出了实用的最小二乘评定方法数学模型。Lai^[8]通过控制平面旋转得到圆柱度参数。郑鹏等人^[9]提出采用修正单纯形法实现圆柱度误差的评定。此外还有很多学者采用线性逼近的方法实现了误差的评定^[10-16]。Jyunping H^[17,18]采用计算几何的凸包理论结合 Voronoi 图实现了直线度和圆度的评价。Endriasa D. H^[19]从最小外接圆需要包含的采样点出发建立了最小区域法的评定方法。Shunmugam M. S^[20]采用利玛松曲线实现了圆柱度的评价。王建华等^[21,22]采用凸壳理论实现对特征点的筛选,将寻找特征点的问题转化为求解壳顶点的问题。但上述算法存在以下不足:1)解析几何法采用的是形状误差包容评定的线性化模型,因模型本身存在误差,因此只能得到近似解;2)线性逼近迭代算法虽然评价速度较快,但存在迭代步长和迭代方向的判别问题,给评价数据处理带来了困难;虽然在其基础上采用现代优化算法进行求解,算法的精度和鲁棒性较好,但是启发

式算法无法判断轴线拟合的准确性;3)采用计算几何理论虽实现了轴线拟合的精确评定,但对在基准体系中基准轴线被约束不同自由度时如何进行拟合,尚未进行相关深入的研究。

本文针对当前带约束的基准轴线拟合存在的不足,采用计算几何凸包理论实现了基准轴线的拟合。该方法保证了受约束轴线相对位置关系,符合基准轴线的建立原则,满足工程需要。

2 基准轴线的数学模型

采用 CMM 进行基准轴线的测量实质上是对孔(轴)几何特征的测量,测量坐标系如图 1 所示。将被测圆柱面按等距划分为若干个横向测量截面,在每一个横截面内测量轮廓的坐标值(x, y, z)。根据采样点的坐标值,建立轴线拟合的数学模型来实现轴线的拟合。

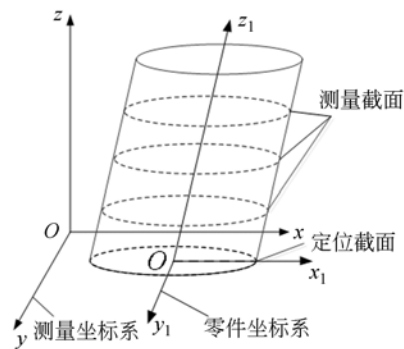


图 1 测量坐标系

Fig. 1 Measuring coordinate system

基准轴线的拟合空间由零件坐标系和测量坐标系构成,由于两个坐标系之间存在空间位置偏差(如图 2 所示),基准轴线由采样点的最小外接圆柱(最大内接圆柱)求解得到。

图 2 中,假设 z 轴方向为圆柱的长度方向,采样点坐标值为 $p_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$)。轴线在进行拟合时,将实际圆柱面与理想圆柱面进行比较。假设理想圆柱面的轴线为 L , L 的方向由 l 和 m 决定,位置由 a 和 b 决定,则理想圆柱面

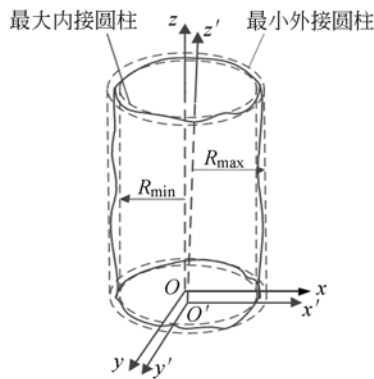


图 2 基准轴线拟合几何模型
Fig. 2 Model of datum axis fitting

的轴线可表示为:

$$(x-a)/l=(y-b)/m=z, \quad (1)$$

圆柱面上各采样点到轴线 L 的距离为:

$$d_i = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ x_i - a & y_i - b & z_i \\ l & m & 1 \end{matrix} \right\| / \sqrt{l^2 + m^2 + 1}. \quad (2)$$

当基准轴线对应的几何特征为轴时,轴线采用最小外接圆柱法进行拟合:寻找一个外接于实际圆柱面的最小理想圆柱面,目标函数是理想要素的本质特征值最小,即 $\min[\max(d_i)]$;当基准轴线对应的几何特征是孔时,轴线采用最大内接圆柱法进行拟合:寻找一个内接于实际被测内圆柱面的最大理想圆柱面,目标函数是理想要素的本质特征值最大,即 $\max[\min(d_i)]$ 。

3 基准轴线的拟合算法

根据 ASME^[23] 标准可知,轴线被约束的自由度存在以下几种情况:无约束的轴线,被其它基准约束 1 平动和 1 转动自由度(同轴、不同轴)的轴线;被其它基准约束 2 转动自由度的轴线;被其它基准约束 2 转动自由度和 1 平动自由度的轴线。

为了实现轴线的拟合,提出了基于凸包的空间轴线拟合算法,考虑轴线被约束的自由度,实现带约束的轴线拟合。首先利用计算几何的凸包理论,将轴线的采样点依据凸点的判定准则,获得采样点的三维凸包,用较少的数据点进行后期的拟合计算;然后根据三维凸包的相关特征建立无约束、转动约束、平动约束三种轴线基准拟合算法;最终结合基准轴线的相关实体要求完成轴线的拟合。

3.1 三维凸包

提高轴线拟合效率关键在于特征采样点的选取,减少数据搜索量,降低运算次数。根据轴线被约束的自由度可知,轴线拟合存在两种情况:一种是孔特征采用最大内接圆柱;另一种是轴特征采用最小外接圆柱。

用三维凸包进行构造最小外接圆柱时,存在以下定理^[17]:

定理 1: 构建最小外接圆柱的采样点必须为凸包的顶点;

定理 2: 凸包任意两个顶点之间在投影面的距离最小时,当且仅当以包含两个顶点中任意一个顶点的凸包边定义为投影面的法向量;

定理 3: 最小外接圆柱的轴线与凸包的边平行。

通过上述定理可实现基于三维凸包的最小外接圆柱的求解,而为了实现最大内接圆柱的求解,需将最大内接圆柱转化成最小外接圆柱进行评价。根据王丽^[17]的圆度误差评定中提到的圆的最大内接圆向最大外接圆的转化方法,将该方法推广到三维空间中,利用采样点实现由内向外翻转。该方法首先求解最小外接圆柱的半径,然后将所有点到轴线的距离减去该半径,实现了最大内接圆柱向最小外接圆柱的转化。

三维凸包的定义^[24]为:对于空间的离散点集,求解最小的凸多面体,其中把空间中点集所有的点包含在里面的凸多面体就是凸包。凸包的建立流程如下:

1. 根据采样点建立基准坐标系。采用 CMM 的标准最小二乘法获得轴线方程:

$$\begin{cases} x = a + qz \\ y = b + pz \end{cases}, \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum(x_i z_i) \sum z_i - \sum z_i^2 \sum x_i}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ b &= \frac{\sum(y_i z_i) \sum z_i - \sum z_i^2 \sum y_i}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ q &= \frac{\sum x_i \sum z_i - n \sum(z^2 x_i)}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ p &= \frac{\sum y_i \sum z_i - n \sum(y_i z_i)}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \end{aligned}, \quad (4)$$

其中: $S = \{P_i = (x_i, y_i, z_i)\}$, $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ 为采样点坐标。

将采样点向以最小二乘线为法向量的面投影, 求解平面内最小二乘线:

$$(x' - a')/m = (y' - b')/n = z', \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} a' = \frac{\sum (x_i' z_i') \sum z_i' - \sum (z_i')^2 \sum x_i'}{(\sum z_i')^2 - n \sum (z_i')^2} \\ b' = \frac{\sum (y_i' z_i') \sum z_i' - \sum (z_i')^2 \sum y_i'}{(\sum z_i')^2 - n \sum (z_i')^2} \\ m = \frac{\sum x_i' \sum z_i' - n \sum (x_i' z_i')}{(\sum z_i')^2 - n \sum (z_i')^2} \\ n = \frac{\sum y_i' \sum z_i' - n \sum (y_i' z_i')}{(\sum z_i')^2 - n \sum (z_i')^2} \end{cases} \quad (6)$$

根据最小二乘中线和平面内最小二乘线建立采样点的基准坐标系。

2. 获得采样点在基准坐标系下的坐标值。将采样点 S 转化为基准坐标系的 S_1 :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A_x x + B_x y + C_x z + D_x}{\sqrt{A_x^2 + B_x^2 + C_x^2}} \\ y_1 = \frac{A_y x + B_y y + C_y z + D_y}{\sqrt{A_y^2 + B_y^2 + C_y^2}} \\ z_1 = \frac{A_z x + B_z y + C_z z + D_z}{\sqrt{A_z^2 + B_z^2 + C_z^2}} \end{cases} \quad (7)$$

式中: x, y, z 为测量坐标系下采样点的坐标值; x_1, y_1, z_1 为基准坐标系下的采样点的坐标值; A_x, B_x, C_x, D_x 为 yz 平面的方程系数; A_y, B_y, C_y, D_y 为 zx 平面的方程系数; A_z, B_z, C_z, D_z 为 xy 平面的方程系数。

3. 将最大内接圆柱转化成最小外接圆柱的方法如下:

(1) 遍历采样点, 获得最大距离 d :

$$d = \max\{\sqrt{(x_i^1)^2 + (y_i^1)^2}\}. \quad (8)$$

(2) 采样点用极坐标表达 $\rho_i(r_i^1, \theta_i^1, z_i^1)$:

$$\begin{cases} r_i^1 = \sqrt{(x_i^1)^2 + (y_i^1)^2} \\ \theta_i^1 = \arcsin(y_i^1/r_i^1) \end{cases} \quad (9)$$

(3) 将采样点减去 d 后转化到最小二乘坐标系的坐标值进行由最大内接圆柱向最小外接圆柱的转化:

$$\begin{cases} x_i^2 = (d - r_i^1) \cos \theta_i^1 \\ y_i^2 = (d - r_i^1) \sin \theta_i^1 \\ z_i^2 = z_i^1 \end{cases} \quad (10)$$

4. 采用礼品包裹算法^[24], 获得三维凸包, 凸包点集 S 和边集分别为 e :

$S = \{p_i = (x_i, y_i, z_i)\} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为凸包顶点, 其中 n 为顶点个数, $p_i(x_i, y_i, z_i)$ 为凸包顶点坐标值;

$e = \{f_i = (A_i, B_i, C_i)\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为凸包面, 其中 m 为面个数, $f_i = (A_i, B_i, C_i)$ 为凸包面系数, 如 $z = A_i x + B_i y + C_i$;

$l = \{l_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)\} (i = 1, 2, \dots, h)$ 为凸包边, 其中 h 为边个数, $l_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ 凸包边系数, 如: $(x - c_i)/a_i = (y - a_i)/b_i = z$ 。

3.2 基准轴线的拟合

为实现基准轴线拟合, 建立了轴线的转动向量和平动向量求解的数学模型。首先通过轴线被约束的自由度建立基准轴线拟合的数学模型, 然后与三维凸包的顶点、边、面相结合, 依次求解轴线的转动和平动向量, 在考虑轴线相关实体要求的基础上完成轴线变动区域的求解。

3.2.1 无约束基准轴线拟合

当基准轴线无任何约束时, 由凸包定理可知, 最小外接圆柱的轴线与凸包的某条边平行, 故无约束基准轴线的拟合步骤如下:

1. 建立采样点的三维凸包, 获得凸包顶点 S , 凸包边 l 。

2. 从集合 l 中取出任意边定义为平面法向量与原点构成投影面, 投影面方程为:

$$a_i(x - x_0^1) + b_i(y - y_0^1) + z - z_0^1 = 0, \quad (11)$$

其中: (x_0^1, y_0^1, z_0^1) 为基准坐标系下的坐标原点。

3. 将凸包顶点向投影面投影, 获得 S_1 :

$$\begin{cases} \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{a_i} = \frac{(y_j^1 - y_0^1)}{b_i} = (z_j^1 - z_0^1) \\ a_i(x_j^1 - x_0^1) + b_i(y_j^1 - y_0^1) + z_j^1 - z_0^1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中: (x_j^1, y_j^1, z_j^1) 为 S_1 中任意点坐标。

4. 在 S_1 中采用计算几何的增量算法^[19] 获得平面凸包顶点, 并在 S_1 中计算最小外接圆的半径, 步骤如下:

(1) 将凸包顶点按逆时针方向排列, 如图 5(a) 所示, 依次计算集合中相邻三点构成的圆心 (x_0^1, y_0^1, z_0^1) :

$$\begin{bmatrix} x_0^1 \\ y_0^1 \\ z_0^1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中: $(x_{j-1}^1, y_{j-1}^1, z_{j-1}^1)$ (x_j^1, y_j^1, z_j^1) $(x_{j+1}^1, y_{j+1}^1, z_{j+1}^1)$ 为相邻三点的坐标。

半径为:

$$r_j = \sqrt{(x_j^1 - x_0^1)^2 + (y_j^1 - y_0^1)^2 + (z_j^1 - z_0^1)^2}. \quad (14)$$

(2)删除最大直径对应的相邻三点的中间点,如图 3(b)所示。 $P_3 P_4 P_5$ 三点组成的圆半径最大,则删除 P_4 。重复上述步骤,直至剩余 3 点,如图 3(c)所示, $P_3 P_8 P_2$ 构成的三角形。

(3)计算三点构成三角形最大的边,定义 j 点对应的是最大边:

$$l_{j(j+1)} = \sqrt{(x_j^1 - x_{j+1}^1)^2 + (y_j^1 - y_{j+1}^1)^2 + (z_j^1 - z_{j+1}^1)^2}. \quad (15)$$

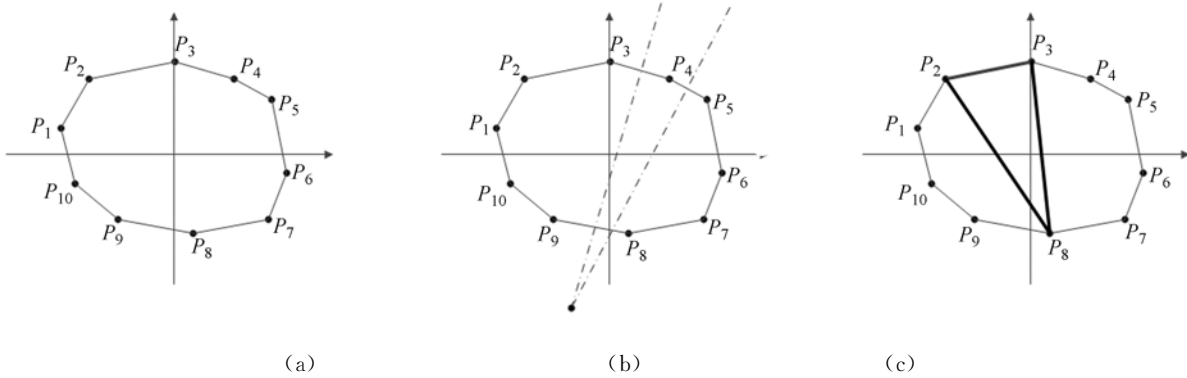


图 3 平面最小外接圆求解方法

Fig. 3 Method of minimum circumscribed circle fitting

计算最大边对应的角度:

$$\alpha_j = \arccos\left(\frac{(l_{j(j+1)})^2 + (l_{j(j-1)})^2 - (l_{(j+1)(j-1)})^2}{2(l_{j(j-1)})(l_{j(j+1)})}\right). \quad (16)$$

(4)当 $\alpha_j \leq 90^\circ$ 时,最小外接圆的圆心为 (x_0^1, y_0^1, z_0^1) ,当 $\alpha_j > 90^\circ$ 时,圆心为 $((x_{j+1}^1 - x_{j-1}^1)/2, (y_{j+1}^1 - y_{j-1}^1)/2, (z_{j+1}^1 - z_{j-1}^1)/2)$,半径为 $l_{j(j+1)}/2$ 。

5. 重复步骤 2~4,求解所有以凸包边的方向向量为面法向量的投影面最小外接圆半径,将最小外接圆半径对应的凸包边方向向量定义为轴线的方向向量,与最小外接圆圆心结合完成轴线的建立:

$$(x - x_1)/a_i = (y - y_i)/b_i = (z - z_1), \quad (17)$$

其中: (x_1, y_1, z_1) 为最小外接圆圆心坐标。

3.2.2 基准轴线方向向量的求解

轴线的方向向量由 2 个转动自由度构成,根据基准被约束的自由度分析,基准转动自由度被约束存在两种情况,一种是单一转动自由度被约束,另一种是两转动自由度均被约束。

1. 单一转动自由度被约束

当轴线某转动自由度被约束时,轴线仅存在

1 个转动自由度,则采样点非线性的拟合问题转化成平面内采样点拟合问题。当轴线求解最小外接圆柱时,在约束转动自由度的方向上,采样点到轴线的相对距离保持不变,如图 4 所示。轴线存在绕 y 轴的转动方向的约束时,需求解绕 x 轴的转动向量,而因采样点任意 A、B 两点在 x 轴方向的相对距离保持不变。最小外接圆柱的求解转化成在无转动自由度约束的方向上的最小距离的平行直线(即在 zy 平面内求解包含所有采样点的最小距离的平行直线)求解,确定未约束的转动自由度的方向向量(绕 x 轴的转动向量)的确定,实现轴线方向向量的求解,拟合步骤如下:

(1)根据轴线被约束的自由度,确定基准轴线方向向量 $(a_1, b_1, 1)$,建立平面方程 $f: a_1 x + b_1 y + z + c = 0 (c \in R)$;

(2)根据采样点建立三维凸包;

(3)将凸包的顶点向平面投影,获得 S_1 ;

(4)在平面内求解上下半凸包,步骤如下所示:

①在平面内确定 y 方向的极值点,将 y 方向的极值点连线,该连线将平面凸包分为上下两个半凸包。

②基于 y 的极值点采用 Quick Hull^[24] 完成平面上下半凸包求解。上半凸包顶点 $S_1 = \{p_i^1 = (x_i^1, y_i^1, z_i^1)\} (i=1, 2, \dots, n_1)$, 上半凸包边 $l_1 = \{l_i^1 = (a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1)\} (i=1, 2, \dots, h_1)$; 下半凸包顶点 $S_2 = \{p_i^2 = (x_i^2, y_i^2, z_i^2)\} (i=1, 2, \dots, n_2)$, 下半凸包边 $l_2 = \{l_i^2 = (a_i^2, b_i^2, c_i^2, d_i^2)\} (i=1, 2, \dots, h_2)$;

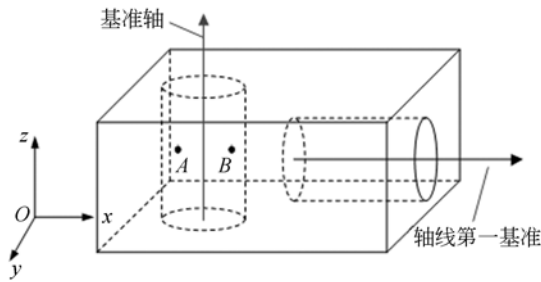


图 4 转动自由度被约束的基准轴线
Fig. 4 Rotation degrees is constrained

(5)在建立平面上下半凸包的基础上,求解最小距离的平行直线,如图 5 所示。

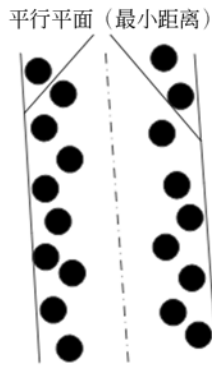


图 5 转动约束基准轴线

Fig. 5 Axis's rotation degrees is constrained

下半凸包顶点到上半凸包边的距离为:

$$d_1 = \frac{|(x_i^1 - c_i^1 - z_i^1 a_i^1) \mathbf{n}_2^2 - (y_i^1 - d_i^1 - z_i^1 b_i^1) \mathbf{n}_1^1|}{|\mathbf{n}_1^1 \times \mathbf{n}_2^2|} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{n}_1^1 = (1, 0, -a_i^1)$, $\mathbf{n}_2^2 = (0, 1, -b_i^1)$

上半凸包顶点到下半凸包边的距离为:

$$d_2 = \frac{|(x_i^2 - c_i^2 - z_i^2 a_i^2) \mathbf{n}_2^1 - (y_i^2 - d_i^2 - z_i^2 b_i^2) \mathbf{n}_1^2|}{|\mathbf{n}_2^1 \times \mathbf{n}_1^2|} \quad (19)$$

其中: $\mathbf{n}_1^1 = (1, 0, -a_i^1)$, $\mathbf{n}_2^1 = (0, 1, -b_i^1)$

$d = \min\{d_1, d_2\}$, 此时 d 对应的平行直线的

中心直线为: $(x-c)/a = (y-d)/b = z$ 。

根据中心直线确定基准轴线的方向向量 t

$(a, b, 1)$ 。

3.2.3 转动自由度均被约束的基准轴线

当轴线的 2 转动自由度均被约束时,首先根据轴线被约束的自由度,确定轴线的的一个转动方向向量 $t_1(a_1, b_1, 1)$,然后根据轴线被约束的另一转动自由度,确定轴线所在的另一个转动方向向量 $t_2(a_2, b_2, 1)$ 。则轴线的方向向量为 $t(a, b, 1)$, 其中 $t = t_1 \times t_2$ 。

3.2.4 基准轴线平动向量的求解

在完成轴线方向向量 t 求解,结合轴线被约束的平动自由度,实现轴线的拟合。轴线被约束的平动自由度存在三种情况:

1. 平动自由度未被约束的基准轴线

当轴线的平动自由度未被约束时,根据 ASME^[23] 定义,在以轴线方向向量为法向量的平面上投影,该平面内最小外接圆的圆心即平动向量,求解步骤如下:

(1)根据基准轴线的方向向量 $t(a, b, 1)$, 建立投影面;

(2)根据采样点建立三维凸包,将凸包顶点向投影面进行投影;

(3)采用无约束基准轴线中求解最小外接圆的方法,获得圆心 (x_1, y_1, z_1) ;

(4)获得轴线的数学方程:

$$(x - x_1)/a = (y - d_1)/b = z - z_1. \quad (20)$$

2. 单一平动自由度被约束的基准轴线

当轴线的某平动自由度被约束时,首先根据轴线转动自由度的解析确定轴线的方向向量,然后利用轴线的平动约束求解轴线的平动向量,完成轴线的建立。根据 ASME 定义,单一平动自由度被约束存在两种情况:一种是被平面约束平动,另一种是被轴线约束平动。

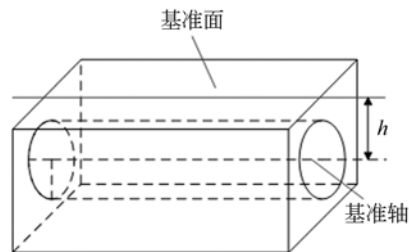


图 6 平动自由度被平面约束的基准轴线

Fig. 6 Axis's translation degrees is constrained by plane

(1)当约束平动自由度的为平面时如图 6 所示,根据平动约束方向和大小,完成平动向量的求

解。平面方程: $Ax + By + Cz + D = 0$, 与轴线平行的直线: $(x - c)/a = (y - d)/b = z$ 。轴线的平动向量 (x', y', z') :

$$\begin{cases} x' = -Ah/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ y' = -Bh/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ z' = -Ch/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases} \quad (21)$$

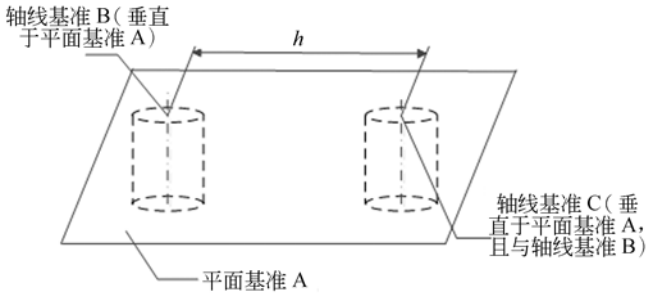
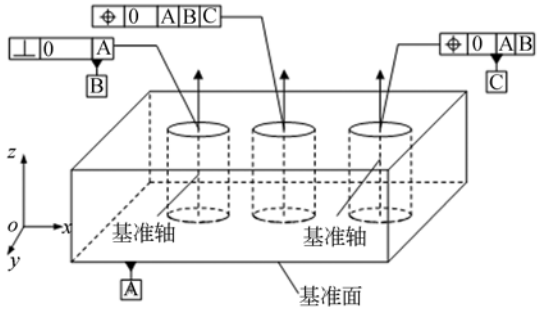


图 7 平动自由度被轴线约束的基准轴线

Fig. 7 Axis's translation degrees is constrained by axis

第一基准方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 第二基准方程 $(x - c_1)/a_1 = (y - d_1)/b_1 = z$, 与轴线平行的方程为 $(x - c_2)/a_1 = (y - d_2)/b_1 = z$ 。

第二基准与平面的交点 (x_1, y_1, z_1) :

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ (x_1 - c_1)/a_1 = (y_1 - d_1)/b_1 = z_1 \end{cases} \quad (23)$$

第三基准与基准平面的交点 (x_2, y_2, z_2) :

$$\begin{cases} Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ (x_2 - c_1)/a_1 = (y_2 - d_1)/b_1 = z_2 \end{cases} \quad (24)$$

轴线的平动方向向量: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, 基准轴线的平动向量:

$$\begin{cases} x' = \frac{(x_2 - x_1)h}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ y' = \frac{(y_2 - y_1)h}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ z' = \frac{(z_2 - z_1)h}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{cases} \quad (25)$$

得到的轴线的数学方程与式(20)相同。

3.3 基准轴线的相关实体要求

当轴线作为基准时,因其不仅受大小差异控制还存在相关的实体要求,需要明确轴线处于哪种情况下(独立原则(RFS)、最大实体要求(MMC)、最小实体要(LMC))。当轴线作为基准

则基准轴线的方程为:

$$(x - c - x')/a = (y - d - y')/b = z - z' \quad (22)$$

(2)当约束平动自由度的是轴线基准时,如图7所示,在完成轴线转动向量的求解后,依次求解两轴线与基准平面的交点,确定平动约束的方向,然后结合平动约束的大小确定平动向量,完成基准轴线的建立。

且有相关实体要求时,基准轴线存在一定的不确定度。本文以 MMC 为例,完成基准轴线变动区域的解析。

当轴(孔)的轴线作为基准,且包含 MMC 要求时,如图 8 所示,根据对最大实体要求的定义可知:当最大实体要求应用于被测中心基准特征时,相应的尺寸基准特征的实际轮廓应遵守最大实体实效边界。

图中 h 为圆柱体的高度, D 为最小外接圆直径, d 为 MMC 要求下的圆柱直径。借鉴公差域^[25]的相关知识,求解基准轴线的变动区域。

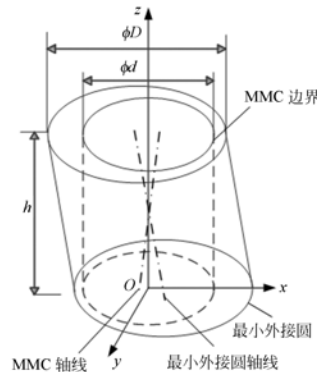


图 8 基准轴线 MMC 的变动区域

Fig. 8 Variable domain of axis under MMC

根据对基准轴线变动区域形状及大小的分

析,在建立坐标系的基础上,根据基准变动区域的形状获知几何变动的极限位置。然后基于极限位置求解各分量数值,获得独立变动域。各分量约束方程为:

$$\begin{cases} (d/2) \leq (x_0 - z_0 \delta_\beta - t_1 \delta_\beta + \delta_x)^2 + \\ (-x_0 \delta_\alpha \delta_\beta + y_0 - z_0 \delta_x - t_1 \delta_x + \delta_y)^2 \leq (D/2)^2 \\ 0 \leq x_0 \delta_\beta - y_0 \delta_\alpha + z_0 + t_1 \leq L \\ (d/2) \leq (x_0 - z_0 \delta_\beta - t_2 \delta_\beta + \delta_x)^2 + \\ (-x_0 \delta_\alpha \delta_\beta + y_0 - z_0 \delta_x - t_2 \delta_x + \delta_y)^2 \leq (D/2)^2 \\ 0 \leq x_0 \delta_\beta - y_0 \delta_\alpha + z_0 + t_2 \leq L \end{cases} \quad (26)$$

结合轴线被约束的自由度实现基准轴线的求解,例如当存在 y 方向转动约束时定义 $\delta_\beta = 0$,完成轴线变动区域的求解。

4 实例验证

在以上算法的基础上,在 MATLAB 中设计开发了基准轴线拟合的软件模块,并对相关算法进行了实例验证,如图 9 所示。假设基准 A 是理想平面,对基准轴线 B 和 C 依次进行拟合,根据基准 B 建立测量坐标系 $o\text{-}xyz$,其中基准 B 和 C 的采样点的坐标值如附录所示,每个基准轴线根据 CMM 测量方法,得到 5 个截面的采样点坐标值分别为 $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4; x_5, y_5, z_5$ 。

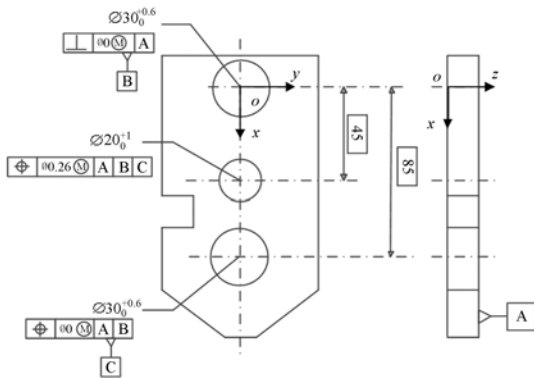


图 9 基准体系示意图

Fig. 9 Datum reference Frame

验证步骤为:

1. 假设平面基准 A 是理想平面不存在加工误差,理想基准 A 的数学方程为: $z=0$;
2. 根据平面基准 A,得到基准 B 的方向向量 $(0,0,1)$ 。

3. 根据平动自由度未约束的基准轴线的平动向量求解方法,首先建立基准轴线 B 的三维凸包,向基准平面 A 投影,获得最小外接圆的圆心为 $(0.224, -0.143, 0)$ 。

4. 根据最小外接圆的圆心与基准 B 的方向向量建立基准 B 的轴线数学方程:

$$\begin{cases} x=0.224 \\ y=-0.143 \end{cases}$$

5. 根据基准 A 得到基准 C 的方向向量 $(0, 0, 1)$ 。

6. 建立基准轴线 C 的三维凸包,然后向基准平面 A 投影,获得最小外接圆圆心为 $(84.517, 0, 286, 0)$ 。

7. 根据最小外接圆的圆心与基准 C 的方向向量建立与基准 C 平行的的直线数学方程:

$$\begin{cases} x=84.517 \\ y=0.286 \end{cases}$$

8. 根据约束该平动自由度的是基准轴线的求解方法进行求解平动约束的方向向量,得到平动约束的方向向量 $(84.293, 0, 429)$ 。

9. 由公式(23)~(25)得到第三基准的平动向量:

$$\begin{cases} x'=84.989 \\ y'=1.367 \\ z'=0 \end{cases}$$

10. 基准轴线 C 的数学方程:

$$\begin{cases} x=84.989 \\ y=1.367 \end{cases}$$

11. 根据平面基准和基准轴线的数学方程得到三基面体系的数学方程:

$$\begin{cases} z=0(\text{平面第一基准}) \\ 196.07x - y + 44.1 = 0(\text{平面第二基准}) \\ 0.0051x + 0.144 - y = 0(\text{平面第三基准}) \end{cases}$$

当采用 CMM 的标准最小二乘算法进行计算时,得到三基面体系的数学方程:

$$\begin{cases} z=0(\text{平面第一基准}) \\ 183.25x - y + 43.87 = 0(\text{平面第二基准}) \\ 0.0094x + 0.37 - y = 0(\text{平面第三基准}) \end{cases}$$

通过对最小二乘法与本文获得的基准平面的方程相比较,在第二基准轴线进行拟合时,两者得到的平面方程近似重合,但在求解第三基准时,因最小二乘法并未考虑第二基准所产生的平动约束,两者存在较大的区别。通过对基准轴线定义

的解析,采用本文带约束的基准拟合得到的结果相对于最小二乘法得到的基准轴线更为精确。

5 结 论

本文通过计算几何的凸包理论从大量采样点中筛选、获得部分满足条件的采样点;然后通过将基准轴线拆分成两转动向量和两平动向量进行表

达,并在此基础上与基准的定义以及基准的相关实体要求相结合,完成带约束的基准轴线的拟合。通过实例证明:所提出的算法考虑了基准处于不同基准优先级的被约束的自由度,并结合了基准轴线存在的相关实体要求,实现了基准轴线准确和快速拟合,但如何在基准轴线存在变动区域(实体要求)的前提下实现定位定向误差的评定尚不明确,这些问题将在以后的研究中重点进行研究。

6 附 录

第二基准轴线 B 采样点
Sampling points of the second datum axis (mm)

x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4	x_5	y_5	z_5
30.52	0.00	5.00	30.03	0.00	10.00	30.82	0.00	15.00	30.12	0.00	20.00	30.09	0.00	25.00
26.38	14.65	5.00	26.33	14.66	10.00	26.59	14.44	15.00	26.48	14.81	20.00	26.56	14.79	25.00
16.61	26.05	5.00	16.38	25.70	10.00	16.27	25.80	15.00	16.55	25.86	20.00	16.41	25.94	25.00
2.15	30.92	5.00	2.19	30.11	10.00	2.15	30.47	15.00	2.14	30.46	20.00	2.17	30.01	25.00
-12.81	27.68	5.00	-12.73	27.30	10.00	-12.55	27.83	15.00	-12.58	27.65	20.00	-12.51	27.91	25.00
-24.16	18.27	5.00	-24.52	18.23	10.00	-24.39	17.99	15.00	-24.27	18.46	20.00	-24.59	18.31	25.00
-29.73	4.31	5.00	-29.87	4.31	10.00	-30.17	4.36	15.00	-30.25	4.28	20.00	-30.47	4.36	25.00
-28.29	-10.55	5.00	-28.55	-10.73	10.00	-28.74	-10.79	15.00	-28.35	-10.72	20.00	-28.99	-10.83	25.00
-19.62	-23.03	5.00	-19.96	-22.96	10.00	-20.04	-22.75	15.00	-19.80	-23.35	20.00	-19.71	-23.04	25.00
-6.47	-29.95	5.00	-6.52	-29.90	10.00	-6.41	-30.16	15.00	-6.53	-29.71	20.00	-6.52	-30.13	25.00
8.74	-29.21	5.00	8.67	-29.01	10.00	8.54	-29.23	15.00	8.69	-29.19	20.00	8.68	-28.91	25.00
21.84	-21.86	5.00	21.43	-21.40	10.00	21.37	-21.59	15.00	21.49	-21.18	20.00	21.58	-21.27	25.00
29.00	-8.45	5.00	29.72	-8.64	10.00	29.48	-8.54	15.00	28.93	-8.49	20.00	29.32	-8.61	25.00
29.96	6.62	5.00	30.20	6.53	10.00	29.63	6.56	15.00	29.83	6.60	20.00	29.86	6.50	25.00

第三基准轴线 C 采样点
Sampling points of the third datum axis (mm)

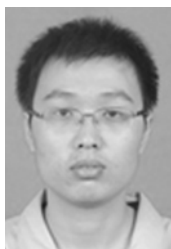
x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4	x_5	y_5	z_5
115.82	0.10	5.00	115.97	0.09	10.00	115.07	0.04	15.00	115.08	0.04	20.00	115.75	0.09	25.00
112.13	14.82	5.00	112.20	14.49	10.00	111.53	14.52	15.00	111.70	14.70	20.00	111.99	14.59	25.00
101.58	25.42	5.00	101.48	25.36	10.00	101.30	25.97	15.00	101.24	25.72	20.00	101.58	25.62	25.00
87.19	30.66	5.00	87.16	30.51	10.00	87.17	30.56	15.00	87.18	30.25	20.00	87.19	30.13	25.00
72.48	28.01	5.00	72.34	28.12	10.00	72.23	27.66	15.00	72.13	27.71	20.00	72.14	27.77	25.00
60.85	18.08	5.00	60.86	18.07	10.00	60.43	18.31	15.00	60.49	17.97	20.00	60.95	18.35	25.00
54.36	4.34	5.00	55.27	4.24	10.00	55.14	4.34	15.00	55.30	4.34	20.00	54.73	4.34	25.00
56.44	-10.86	5.00	56.59	-10.57	10.00	55.99	-10.54	15.00	56.76	-10.65	20.00	56.59	-10.73	25.00
64.93	-23.21	5.00	64.91	-22.92	10.00	65.25	-23.26	15.00	65.32	-22.97	20.00	65.08	-23.20	25.00
78.67	-29.33	5.00	78.55	-29.87	10.00	78.55	-30.23	15.00	78.60	-30.27	20.00	78.63	-29.63	25.00
93.78	-29.47	5.00	93.57	-29.69	10.00	93.60	-29.58	15.00	93.62	-29.63	20.00	93.57	-29.62	25.00
106.80	-21.61	5.00	106.83	-21.86	10.00	106.86	-21.32	15.00	106.84	-21.69	20.00	106.64	-21.37	25.00
114.65	-8.65	5.00	114.04	-8.47	10.00	113.95	-8.65	15.00	114.63	-8.45	20.00	114.48	-8.53	25.00
114.38	6.64	5.00	115.17	6.54	10.00	114.87	6.66	15.00	114.43	6.59	20.00	114.98	6.61	25.00

参考文献:

- [1] ZHAGN Q, FAN K C, LI Z. Evaluation method for spatial straightness errors based on minimum zone condition [J]. *Precision Engineering*, 1999, 23(4):264-272.
- [2] CHATTERJEE G, ROTH B. On Chebychev fits for pairs of lines and polygons with specified internal angles [J]. *Precision Engineering*, 1997, 21(1):43-56.
- [3] CALVOA R, GÓMEZA E, DOMINGO R. Circle fitting from the polarity transformation regression [J]. *Precision Engineering*, 2013, 37(4): 908-917.
- [4] 苑国英, 蒋庄德. 评定轴线对轴线垂直度误差的新算法[J]. 西安交通大学学报, 1995, 29(7):98-103.
YUAN G Y, JIANG ZH D. The new algorithm to evaluate reevaluate perpendicularity errors of axis to axisp [J]. *Journal of Xi'an Jiao Tong University*, 1995 29(7):98-103. (in Chinese)
- [5] 李惠芬, 蒋向前, 张玉, 等. 直角坐标系下计算圆柱度误差的一种实用算法[J]. 仪器仪表学报, 2002, 23(4):424-426.
LI H F, JIANG X Q, ZHANG Y, *et al.*. A practical algorithm for computing cylindricity error in the rectangular coordinates [J]. *Chinese Journal of scientific Instrument*, 2002, 23(4): 424-426. (in Chinese)
- [6] 姚南殉, 王殿龙, 康德纯. 回转体零件轮廓度误差评定方法的实用数学模型研究[J]. 计量学报, 1991, 1(24): 262-268.
YAO N X, WANG D L, KANG D CH. A study on the practical mathematical model for evaluating the profile error of revolving solid [J]. *Acta Metrological Sinica*, 1991, 01(24): 262-268. (in Chinese)
- [7] 朱嘉, 李醒飞, 谭文斌, 等. 圆心约束最小二乘圆拟合的短圆弧测量[J]. 光学精密工程 2009, 17(10): 2486-2492.
ZHU J, LI X F, TAN W B, *et al.*. Measurement of short arc based on center constraint least-square circle fitting [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(10):2486-2492. (in chinese)
- [8] LAI J Y, CHEN I H. Minimum zone evaluation of circles and cylinders[J]. *International Journal of Machine Tools Manufacture*, 1996, 36(4): 435-451.
- [9] LEI X Q, SONG H W, XUE Y J, *et al.*. Method for cylindricity error evaluation using geometry optimization searching algorithm [J]. *Measurement*, 2011, 44(9):1556-1563.
- [10] LAI H, JYWE W. Precision modeling of form errors for cylindricity evaluation using genetic algorithms [J]. *Precision Engineering*, 2000, 24(4): 310 - 319.
- [11] WEN X L, ZHAO Y B, WANG D X, *et al.*. Adaptive Monte Carlo and GUM methods for the evaluation of measurement uncertainty of cylindricity error [J]. *Precision Engineering*, 2013, 37(4): 856-864.
- [12] CHERAGHI S H, JIANG G H, AHAMD J S. Evaluating the geometric characteristics of cylindrical features[J]. *Precision Engineering*, 2003, 27(2):195-204.
- [13] 王东霞, 温秀兰, 赵艺兵. 基于 CAD 模型引导测量的自由曲面定位及轮廓度误差评定[J]. 光学精密工程 2012, 20(12):2720-2727.
WANG D X, WEN X L, ZHAO Y B. Localization and profile error evaluation of freeform surface based on CAD model directed measurement [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(12): 2720-2727. (in chinese)
- [14] 岳武陵, 吴勇. 基于多目标优化的空间直线度误差评定[J]. 光学精密工程, 2008, 16(8):1423-1427.
YUE W L, WU Y. Evaluation of spatial straightness errors based on multistage optimization [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(8) :1423-1427. (in chinese)
- [15] 崔长彩, 黄富贵, 张认成, 等. 粒子群优化算法及其在圆柱度误差评定中的应用[J]. 光学精密工程, 2006, 14(2):256-260.
CUI CH C, HUANG F G, ZHANG R CH, *et al.*. Research on cylindricity evaluation based on the Particle Swarm Optimization (PSO) [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(2) :256-260. (in chinese)
- [16] LI Z F, CUI CH C, CHE R CH, *et al.*. Comparison of genetic algorithm based evaluation of roundness with evaluation of roundness based on least squared method [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2003, 11(3):257-261.
- [17] HUANG J. Exact minimum zone solution for three-dimensional straightness evaluation problems [J]. *Precision Engineering*, 1999, 23(3):204-208.
- [18] HUANG J. Exact solution for the roundness eval-

- uation problems [J]. *Precision Engineering*, 1999, 23(1):2-8.
- [19] ENDRIASA D H, HSI-YUNG F, JI M, *et al.*. A combinatorial optimization approach for evaluating minimum-zone spatial straightness errors [J]. *Measurement*, 2012, 45(5): 1170-1179.
- [20] SHUNMUGAM M S, VENKAI AH N. Evaluation of form data using computational geometric techniques—Part II: Cylindricity error [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2007, 47(7): 1237 - 1245.
- [21] 王建华, 陈城. 圆度误差评定中 α -壳的删点效率分析 [J]. *西安工业大学学报*, 2009, 29(5): 424-427.
WANG J H, CHEN CH. Analyzing efficiency of datum deleting of α -hull in evaluation of roundness error [J]. *Journal of Xi'an Technological University*, 2009, 29(5): 424-427. (in Chinese)
- [22] 王丽, 王建华. 圆度误差评定中的一种新的删点技术 [J]. *西安工业学院学报*, 2002, 22(3): 193-199.
WANG L, WANG J H. A new technology to delete sample datum in the process of evaluating roundness error [J]. *Journal of Xi'an institute of technology*, 2002, 22(3): 193-199. (in Chinese)
- [23] *Dimensioning and tolerancing* [M]. New York: N. Y., ASME, 2009.
- [24] 王嘉业, 王长文, 屠长河, 等. 计算几何及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011, 9.
WANG J Y, WANG CH W, TU CH H, *et al.*. *Computational Geometry and Its Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2011, 9. (in Chinese)
- [25] 王洁, 刘检华, 刘伟东, 等. 虚拟环境中公差域建模技术 [J]. *计算机集成制造系统*, 2012, 18(12): 2595-2603.
WANG J, LIU J H, LIU W D, *et al.*. Modeling technology of tolerance zone in virtual environment [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2012, 18(12): 2595-2603. (in Chinese)

作者简介:



郭崇颖(1989—),男,江苏徐州人,博士研究生,2011年于东北大学获得硕士学位。主要研究方向为公差测量与拟合。Email: guocy912@126.com

导师简介:



刘检华(1977—),男,江西萍乡人,教授,博士生导师,2005年于北京理工大学获得博士学位,研究方向为数字化装配技术,通信作者 Email: jeflliu@bit.edu.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)