文章编号　1004-924X(2014)10-2715-10

柔性压电智能反射面的静态形状控制

王　志，曹玉岩*，周　超，范　磊，张丽敏
（中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所，吉林 长春 130033）

摘要：建立了柔性压电智能反射面系统的有限元模型和优化控制模型，给出了结构力学建模和形状控制方法以及相应的优化算法。首先，将蜂窝夹层结构的压电智能反射面等效为多层复合板；基于 Kirchhoff 假设和经典层合板理论，根据虚功原理推导了柔性压电智能反射面的有限元方程；采用蜂窝等效理论计算了反射面蜂窝夹芯等效弹性模量，有限元模型中的单元为四节点四边形压电板单元，每个作动器单元中引入额外的电势自由度。然后，根据建立的有限元方程，推导了反射面变形均方根误差与作动器控制电压的关系式；以均方根误差最小为优化目标，建立了柔性压电智能发射面的静态形状控制优化模型；采用 Lagrange 乘子法处理了压电作动器工作电压的限制。最后，用提出的方法分析已有模型并验证建模方法。以 600 mm 口径的平面柔性智能反射面为例，验证了采用压电陶瓷贴片对反射面静态形状控制的可行性及优化算法有效性。仿真结果表明：通过控制压电陶瓷贴片作动器，可以使反射面的静态形状误差减小 97%以上，而且作动器的控制电压均在极限电压范围内。

关　键　词：智能反射面；柔性压电反射面；经典层合板理论；虚功原理；静态形状控制；Lagrange 乘子法

中图分类号：TN384；O302　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.3788/OPE.20142210.2715

Static shape control of flexible piezoelectric smart reflectors

WANG Zhi, CAO Yu-yan*, ZHOU Chao, FAN Lei, ZHANG Li-min

(*Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*)

* *Corresponding author, E-mail: yuyan_cao@126.com*

Abstract: The finite element formulation of a flexible piezoelectric smart reflector was presented based on Kirchhoff classical laminated theory, and its structural mechanic modeling and optimization algorithms were investigated. Firstly, the smart reflector with the honeycomb core was modeled with the equivalent laminate plate theory, and its finite element formulation was derived according to virtual work theory. The honeycomb core equivalent elastic modulus was calculated by using equivalent theory. Then, a simple four-node quadrilateral element was used in the model, and one electric potential degree of freedom was introduced to each active element. Accordingly, the relation between the mean square root error of reflector and the control voltages of actuators was derived, the optimization model for static shape control was created and the voltage limitation for piezoelectric actuator patches was imposed to maintain its control voltage within a practical range. The optimal control voltages were determined by using Lagrange multipliers to minimize the Root Mean Square (RMS) error. Finally, a

收稿日期：2013-10-15；**修订日期**：2013-11-18.

基金项目：吉林省科技发展计划资助项目(No. 20130102018JC)

numerical example of plane smart reflector was given to demonstrate the feasibility of smart mirror concept and the effectiveness of optimization algorithm. Simulation results indicate that the square root error of the smart reflector is reduced by above 90%, and the control voltage of each actuator is in a practical range.

Key words: piezoelectric smart reflector; flexible piezoelectric reflector; Kirchhoff classical laminated theory; virtual work theory; static shape control; Lagrange multiplier

1 引 言

近几十年来，随着通信、空间科学、地球观测事业迅猛发展，对大口径反射面的需求越来越迫切[1-3]。在先进的雷达天线系统或天文望远镜系统中，大口径反射面可以收集更多的能量，有利于提高系统的分辨率和性能。不过，反射面口径的不断增大导致系统的总质量也越来越大。为了降低系统的重量与成本，大口径的系统通常采用轻量化[4]或超薄[5-6]形式的反射面。

随着复合材料技术的不断进步，轻质的大口径复合材料反射面，即碳纤维增强型复合材料(Carbon Fiber Reinforced Polymer，CFRP)反射面已在可重构天线系统和光学望远镜系统得到了应用[7-8]。大口径的反射面具有较大的柔性，需要对重力、温度梯度和制造误差等引起变形进行主动校正。

压电作动器如压电聚合物和压电陶瓷贴片，集成了压电作动器和传感器，是智能结构中最常用的一种压电驱动元件，具有形状可变、柔软、重量轻、响应频带宽等优点，而且作为执行器时不需要支撑点，是解决反射面口径与高精度面形之间矛盾的理想元件。在复合材料形状控制方面，Paradies[9-10]采用有限元方法研究了反射面在不同倾斜角度下的变形控制，由于仅采用 12 片压电陶瓷贴片，控制变形的能力非常有限。Agrawal and Treanor[11]从理论上研究了悬臂梁结构的形状控制和压电陶瓷作动器最优布置问题，采用单纯形优化算法单独优化作动器位置和控制电压。Sun and Tong[12]采用有限元方法研究了层合板结构形状控制问题，采用基于能量的优化方法确定最优控制电压。

本文采用有限元方法研究柔性压电智能反射面静态形状控制问题。首先，基于经典的层合板理论和广义蜂窝等效理论[13]推导了压电蜂窝夹层反射面结构的有限元模型，其次，建立了反射面的静态形状控制优化模型，采用 Lagrange 乘子法处理实际压电陶瓷极限电压的限制。最后，分析了已有模型验证建模方法的可靠性，然后给出了相应的数值仿真算例来验证优化算法。

2 智能反射面建模

智能反射面结构如图 1 和图 2 所示，压电陶瓷贴片作动器粘贴在蜂窝夹层反射面的下蒙皮外侧。轻量化的蜂窝夹层反射面由上下两层蒙皮和中间铝蜂窝夹层黏接构成，上下蒙皮具有相同的材料和几何参数且由多个铺层复合而成。铝蜂窝夹层由六边形蜂窝单元构成，具有各向正交的力学特性[14]。在反射面静态形状控制中，采用了各向同性的压电陶瓷贴片作动器。压电陶瓷贴片作动器粘贴在反射面下蒙皮外侧，构成力矩作动器，如图 3(a)所示，与图 3(b)所示的传统力作动器相比具有很多优势[15-16]，具体如下：

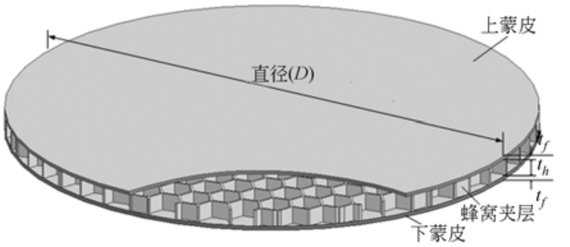


图 1 智能反射面结构

Fig. 1 Smart reflector structure

(1)力矩作动器能够产生整体的横向变形，而力作动器仅能产生局部变形；

(2)力矩作动器粘贴在下蒙皮外侧不需要支撑设备，可以极大减轻系统重量。

为了简化模型推导，假设蒙皮与蜂窝之间、压电陶瓷贴片与蒙皮之间粘贴理想，即忽略胶层厚度对变形的影响。

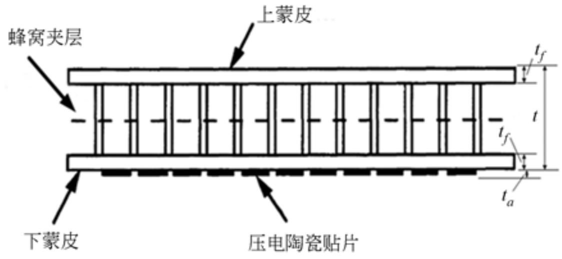
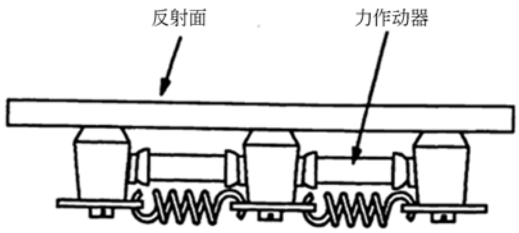


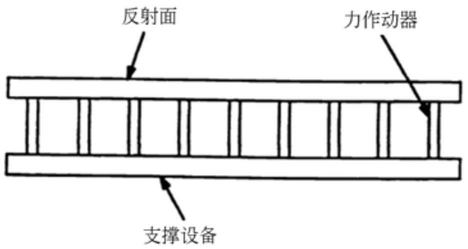
图 2　力矩作动器在智能反射面上应用

Fig. 2　Smart reflector with moment actuator



（a）力矩作动器

（a）Force actuator



（b）力作动器

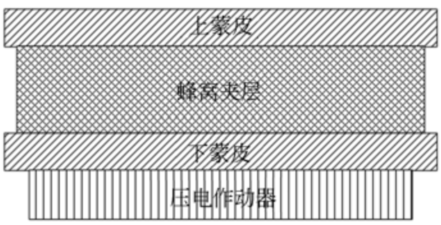
（b）Moment actuator

图 3　力矩作动器与力作动器比较

Fig. 3　Comparison between moment actuator and force actuator

2.1　应变位移场描述

基于经典层合板理论[17]，考虑如图 4 所示的模型，其几何形状参数如图 5 所示。反射面的总厚度为 t，压电作动器的厚度为 t_a，上下蒙皮的厚度为 t_f，上下蒙皮分别由 N 层各向正交铺层复合而成。



（a）粘贴压电作动器

（a）With actuator patch

（b）无压电作动器

（b）Without actuator patch

图 4　结构模型的截面表示

Fig. 4　Cross-section of structure system

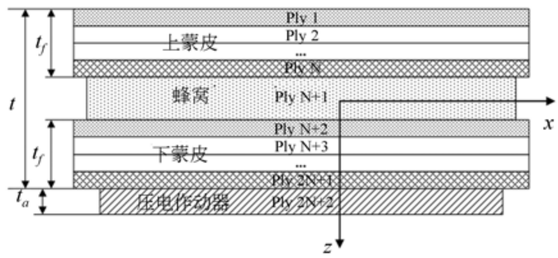


图 5　结构等效模型

Fig. 5　Cross-section of equivalent model

根据 Kirchhoff 假设，反射面的位移场可以表示为：

$$\begin{cases} u(x,y,z)=u_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z)=v_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z)=w_0(x,y) \end{cases}, \tag{1}$$

其中：(u_0, y_0, w_0)为中面节点的位移。

根据式(1)，应变分量可以表示为：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\{\varepsilon^{(0)}\}+\{\varepsilon^{(1)}\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(0)}\\ \varepsilon_y^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(1)}\\ \varepsilon_y^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix}, \tag{2}$$

$$\{\varepsilon^{(0)}\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(0)}\\ \varepsilon_y^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\end{Bmatrix}, \tag{3}$$

$$\{\varepsilon^{(1)}\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(1)}\\ \varepsilon_y^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ -z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ -z\left(2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\end{Bmatrix}. \tag{4}$$

2.2 本构方程

假设反射面由 2N+2 各铺层复合而成，其中 1～N 层复合构成上蒙皮，N+2～2N+1 层复合构成下蒙皮，N+1 层为蜂窝夹层，2N+2 层为压电作动器。对于反射面铺层 1～2N+1 层，其本构方程为：

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}=[\bar{\boldsymbol{Q}}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}\ . \tag{5}$$

压电陶瓷作动器的本构方程为：

$$\begin{aligned}\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}&=[\bar{\boldsymbol{Q}}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}-[\bar{\boldsymbol{e}}]\{\bar{\boldsymbol{E}}\}\\ \{\bar{\boldsymbol{D}}\}&=[\bar{\boldsymbol{e}}]^{\mathrm{T}}\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}+[\bar{\boldsymbol{p}}]\{\bar{\boldsymbol{E}}\}\end{aligned}\ , \tag{6}$$

其中：$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}=\{\sigma_x\quad \sigma_y\quad \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}=\{\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \gamma_{xy}\}^{\mathrm{T}}$ 分别为应力和应变向量，$[\bar{\boldsymbol{Q}}]$为弹性本构矩阵，$\{\bar{\boldsymbol{E}}\}=\{\bar{E}_x\quad \bar{E}_y\quad \bar{E}_z\}^{\mathrm{T}}$ 为电场向量，$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\{\bar{D}_x\quad \bar{D}_y\quad \bar{D}_z\}^{\mathrm{T}}$ 为电位移向量，$[\bar{\boldsymbol{p}}]$为介电常数矩阵，$[\bar{\boldsymbol{e}}]=[\bar{\boldsymbol{Q}}][\bar{\boldsymbol{d}}]$为压电应力系数矩阵，$[\bar{\boldsymbol{d}}]$为压电应变常数矩阵。$\bar{Q}_{ij}$，$\bar{e}_{ij}$，$p_{ij}$ 为可以显示表达为铺层角度的函数[17]。

压电陶瓷贴片的电场向量$\{\bar{\boldsymbol{E}}\}$为电势 ϕ 的负梯度，而且在厚度方向线性变化，可以简化为：

$$\{\bar{\boldsymbol{E}}\}=\{0\quad 0\quad -\phi/t_a\}^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

如图 6 所示，正六边形单元蜂窝夹层具有各向正交特性[14]，其等效弹性常数为[18]：

$$E_{1h}=E_h\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\sin\theta)}\left(\frac{t}{l}\right)^3\times\frac{1}{1+\left[2(1+\nu_h)+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}\ , \tag{8}$$

$$E_{2h}=E_h\frac{(1+\sin\theta)}{\cos^3\theta}\left(\frac{t}{l}\right)^3\times\frac{1}{1+\left[2(1+\nu_h)+\tan^2\theta+\dfrac{2}{\cos^2\theta}\right]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}\ , \tag{9}$$

$$\nu_{12}^h=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}\times\frac{1+[2(1+\nu_h)-1]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}{1+\left[2(1+\nu_h)+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}\ , \tag{10}$$

$$\nu_{21}^h=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}\times\frac{1+[2(1+\nu_h)-1]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}{1+\left[2(1+\nu_h)+\tan^2\theta+\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right]\left(\dfrac{t}{l}\right)^2}\ , \tag{11}$$

$$G_{12h}=E_h\frac{(1+\sin\theta)}{3\cos\theta}\ , \tag{12}$$

其中：E_h 和 ν_h 分别为蜂窝材料的弹性模量和泊松比，$\theta=30°$，t 和 l 分别为蜂窝壁的厚度和长度。

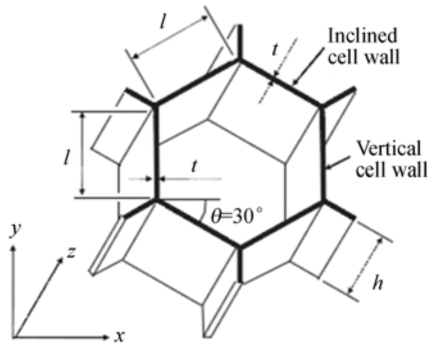


图 6 正六边形蜂窝单元

Fig. 6 Geometry of regular hexagonal cell

2.3 结构有限元方程

有限元模型中采用 4 个节点四边形单元，每个节点具有 6 个自由度，在局部坐标系下，通过插值函数将单元位移场 u_0，v_0，w_0 表示为节点位移变量的表达式，其中 u_0，v_0 采用 Lagrange 插值函数表示，w_0 采用 Hermite 插值函数表示[19]。

根据插值函数，单元位移场式可以表示为：[20]

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Z}\Big(\sum_{i=1}^{4}N_i\boldsymbol{d}_i\Big)=\boldsymbol{ZNa}\ , \tag{13}$$

$$\boldsymbol{d}_i=(u_{0i},v_{0i},w_{0i},\theta_{xi},\theta_{yi},\theta_{zi})^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-z&0\\0&1&0&-z&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{15}$$

根据式(13)和式(2)，应变分量可以表示为[21]：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\Big\{\sum_{i=1}^{4}(B_i^m+zB_i^b)\boldsymbol{d}_i\Big\}=\boldsymbol{B}^{mb}\boldsymbol{a}\ , \tag{16}$$

其中：N_i 和 $\boldsymbol{B}^{mb}$ 分别为形函数和应变位移矩阵。

将式(7)表达为与式(16)同样形式，即：

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{B}^{\phi}\phi\ , \tag{17}$$

其中：B^{ϕ} 为电势矩阵。

压电智能反射面的控制方程可以通过虚功原理得到，虚功原理表述为：

$$\delta U+\delta W=0\ , \tag{18}$$

$$\delta U=\sum_{k=1}^{2N+2}\iint_{A}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\delta\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^{\mathrm{T}}\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(k)}=\mathrm{d}z\mathrm{d}A=$$
$$\sum_{k=1}^{2N+2}\iint_{A}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\delta\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^{\mathrm{T}}[\bar{Q}]^{(k)}\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}\mathrm{d}z\mathrm{d}A-$$
$$\iint_{a}\int_{h_{2N+1}}^{h_{2N+2}}\delta\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^{\mathrm{T}}[\bar{Q}]^{(2N+2)}[\bar{\boldsymbol{d}}]\{\bar{\boldsymbol{E}}\}\mathrm{d}z\mathrm{d}A\ ,\quad(19)$$

$$\delta W=-\int_{V}\{\boldsymbol{f}\}\delta\{\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}V-\int_{S}\{\boldsymbol{T}\}\delta\{\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}S\ ,\quad(20)$$

其中：δU 和 δW 分别为虚应变能和外力虚功，$\{\boldsymbol{f}\}$ 为体积力，$\{\boldsymbol{T}\}$ 为表面力。

将式(16)代入式(19)和(20)，可得：

$$\delta U=\sum_{k=1}^{2N+2}\int_{A}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{mb})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{mb}}\boldsymbol{a}\mathrm{d}z\mathrm{d}A-$$
$$\int_{A}\int_{h_{2N+2}}^{h_{2N+2}}\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{mb}})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{B}^{\phi}\mathrm{d}z\mathrm{d}A\ ,\quad(21)$$

$$\delta W=-\int_{V}\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}\}\mathrm{d}V-\int_{S}\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{T}\}\mathrm{d}S\ .\quad(22)$$

根据式(21)可以得到单元刚度矩阵和机电耦合刚度矩阵分别为：

$$[\mathbf{K}_{uu}]=\sum_{k=1}^{2N+2}\int_{A}\int_{h_{k-1}}^{h_k}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{mb}})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{mb}}\mathrm{d}z\mathrm{d}A$$
$$[\mathbf{K}_{u\phi}]=\int_{A}\int_{h_{2N+1}}^{h_{2N+2}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{mb}})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{B}^{\phi}\mathrm{d}z\mathrm{d}A\quad .\quad(23)$$

根据式(22)可以得到结构的载荷列阵为：

$$\{\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mec}}\}=\int_{V}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}\}\mathrm{d}\mathbf{V}+\int_{S}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{T}\}\mathrm{d}S.\quad(24)$$

以上得到的单元特性矩阵，即式(23)、(24)为单元坐标系下的刚度矩阵和载荷列阵，为了计算结构在总体坐标系下的力学特性，需要进行单元坐标-总体坐标的变换[20-21]。通过组集单元刚度矩阵，得到压电智能反射面的控制方程为：

$$[\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}]\{\boldsymbol{q}\}+[\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{u}\phi}]\{\boldsymbol{\Phi}\}=\{\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mec}}\}\ .\quad(25)$$

3　静态形态控制

在地面应用的反射面中，通常受到重力、温度梯度和风载作用，而温度梯度和风载的影响是随机的，重力影响是不变的[9]，因此主要研究大口径智能反射面重力变形的校正。

3.1　均方根误差(RMS)

在工程应用中，反射面的面形精度特别重要，通常用均方根误差来衡量实际面形与理想面形间的偏差。首先定义面形向量$\{\boldsymbol{\delta}\}\in R^{m}$为：

$$\{\boldsymbol{\delta}\}=[\mathbf{R}]\{\boldsymbol{q}\}\ ,\quad(26)$$

其中：$[\mathbf{R}]\in R^{m\times n}$为权系数矩阵。

实际面形$[\boldsymbol{\delta}]$与理想面形$\{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{d}}\}\in R^{m}$的偏差可以表示为：

$$\boldsymbol{f}=\|\{\boldsymbol{\delta}\}-\{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{d}}\}\|_2^2=(\{\boldsymbol{\delta}\}-\{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{d}}\})^{\mathrm{T}}(\{\boldsymbol{\delta}\}-\{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{d}}\})\ .\quad(27)$$

反射面面形均方根误差(RMS)可以表示为：

$$RMS=\mathrm{sqrt}(\frac{f}{m})\ .\quad(28)$$

根据式(25)，节点位移和控制电压的关系可以表示为：

$$\{\boldsymbol{q}\}=([\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}])^{-1}(\{\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mec}}\}-[\widetilde{\mathbf{K}}_{j\phi}]\{\boldsymbol{\Phi}\})\ ,(29)$$

将式(29)代入(26)、(27)可以得到：

$$\boldsymbol{f}(\phi)=\{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{A}]\{\phi\}+2\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}+e_0,\quad(30)$$

其中：

$$[\mathbf{A}]=([\mathbf{R}][\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}]^{-1}[\widetilde{\mathbf{K}}_{u\phi}])^{\mathrm{T}}[\mathbf{R}][\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}]^{-1}[\widetilde{\mathbf{K}}_{u\phi}]\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$$
$$\{\boldsymbol{b}\}=([\mathbf{R}][\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}]^{-1}[\widetilde{\mathbf{K}}_{u\phi}])^{\mathrm{T}}(\{\boldsymbol{\delta}_d\}-[\mathbf{R}][\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{uu}}]^{-1}[\widetilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mec}}]$$
$$e_0=|\{\delta_{\mathrm{d}}\}-[\mathbf{R}][\widetilde{\mathbf{K}}_{uu}]^{-1}\{\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mec}}\}|^2$$

误差函数 $f(\phi)$为控制电压的函数，可以用来衡量实际面形与理想面形间的偏差。

3.2　控制电压优化

形状控制的目标可以转化为确定压电作动器的最优控制电压$\{\phi^*\}$，使误差函数 $f(\phi)$趋于最小值。为此，确定最优控制电压$\{\phi^*\}$即为求解以下无约束优化问题：

$$\min f(\phi)=\{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{A}]\{\phi\}+2\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}+e_0.\ (31)$$

在实际应用中，过高的控制电压将会造成压电陶瓷击穿或极化明显，控制电压必须限制在一个应用范围内。由此，可以将形状控制问题转化为约束优化问题，优化模型为：

$$\begin{aligned}&\min f(\phi)=\{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\Phi}\}+2\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}+e_0\\&\text{subject to:}\\&g_i(\phi)=\phi_{\max}^2-\phi_i^2\geqslant0,\ i=1,2,K,n_v\end{aligned}\quad,\quad(32)$$

其中：$\phi_{\max}$为允许最大控制电压，系数矩阵$[\mathbf{A}]$为对称正定矩阵，因此优化目标函数 $f(\phi)$为凸函数，不等式约束 $g_i(\phi)$显然为凸集，因此优化问题为凸规划，存在全局最优控制电压$\{\phi^*\}$。

为了确定最优控制呢电压$\{\phi^*\}$，采用 Lagrange 乘子法将约束优化转化为无约束优化：

$$F(\phi,y,w,\sigma)=f(\phi)-\sum_{i=1}^{n_v}w_i(g_i(\phi)-y_i^2)+$$
$$\frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n_v}(g_i(\phi)-y_i^2)^2\ ,\quad(33)$$

其中：$y_i(i=1,2,K,n_v)$为松弛变量，$w_i(i=1,2,K,n_v)$为 Lagrange 乘子，σ为惩罚因子。为了求解无约束优化问题，采用拟牛顿法 BFGS 校正算法求解。

4　数值算例与验证

4.1　模型验证

Paradies[10]研究了如图 7 所示的复合材料反射面的形状控制问题，反射面共粘贴 12 片压电陶瓷作动器，采用 NASTRAN 软件分析了压电陶瓷贴片对反射面重力变形的控制，在 NASTRAN 软件中划分的网格如图 8(a)所示。为了验证建模方法和形状控制算法，建立了相同材料和几何参数的模型，网格如图 8(b)所示。对其进行仿真，将分析结果与 Paradies 仿真结果进行对比，如图 9 所示，横坐标为最大允许控制电压，纵坐标为反射面的 RMS 值。从结果比较中可以发现，与 Paradies 得到的结果基本一致。

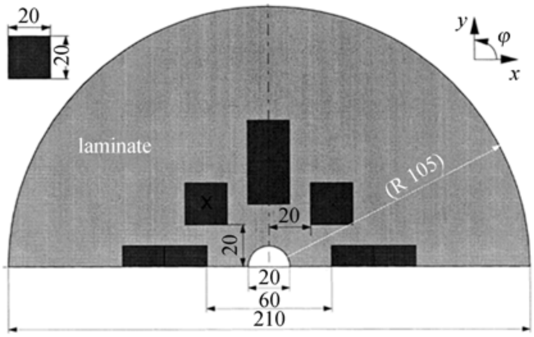
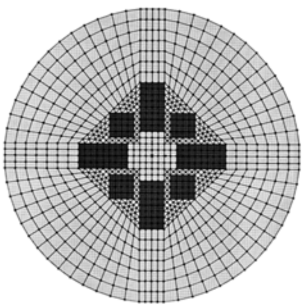


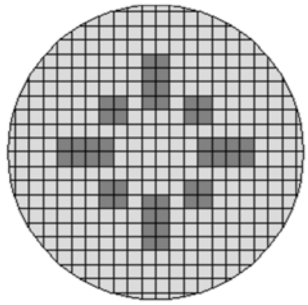
图 7　文献[10]所述平面反射镜模型

Fig. 7　Model of flat mirror in Ref[10]



(a) 文献[10]网格模型

(a) Mesh model in Ref[10]



(b) 本文建立的模型

(b) Mesh model in this paper

图 8　有限元网格模型

Fig. 8　Mesh models

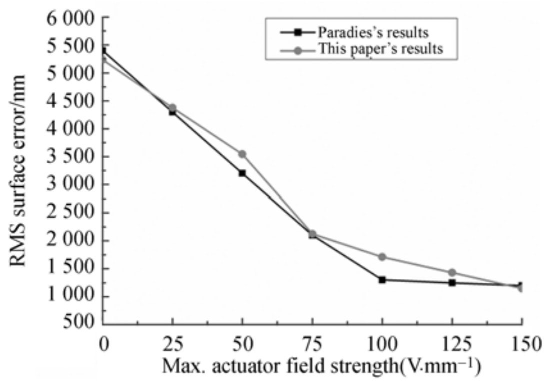


图 9　仿真模型比较

Fig. 9　Comparison of simulation results

4.2　三点支撑下模型数值算例

考虑如图 1 所示，水平放置的圆形平面智能反射面，反射面的下蒙皮外侧黏贴压电陶瓷贴片作动器。支撑方式参考望远镜主镜的多点支撑的形式，采用下蒙皮三点支撑，支撑点的半径可以根据文献[23]确定。上下蒙皮材料为 CFRP 复合材料，反射面的口径为 600 mm，反射面的总厚度

表 1　蒙皮参数

Tab. 1　Facesheet parameters

参数	数值
铺层数	16
铺层顺序[24]	$[\pm27/\pm74]_s/[m27/m74]_s$
铺层厚度/mm	0.08
弹性模量 E_1/GPa	209.0
弹性模量 E_2/GPa	9.02
泊松比 v_{12}	0.3
剪切模量 G_{12}/GPa	4.7
密度 ρ(kg/m^3)	1 850

为 25 mm。蒙皮参数如表 1 所示，蜂窝参数如表 2 所示。

表 2　蜂窝参数

Tab. 2　Honeycomb parameters

参数	数值
蜂窝壁厚度/mm	0.07
蜂窝单元边长/mm	9.53
弹性模量 E/GPa	70
泊松比 v	0.3
密度 ρ/kg · m^{-3}	2 700

作动器采用规则四边形压电陶瓷作动器，特性参数如表 3 所示。

表 3　压电陶瓷作动器参数

Tab. 3　Piezoelectric actuator parameters

参数	数值
长度/mm	20
宽度/mm	20
厚度/mm	0.4
弹性模量 E/GPa	99
泊松比 v	0.3
密度 ρ/kg · m^{-3}	7 600
压电常数 d_{31}/mm · V^{-1}	-120×10^{-9}
压电常数 d_{32}/mm · V^{-1}	-120×10^{-9}
极限电压/V	±120

在分析算例中，假设反射面下蒙皮外侧除边缘以外，其余贴满了四边形的作动器，而且规则排列，其布置方式如图 10 所示，深色区域粘贴作动器。

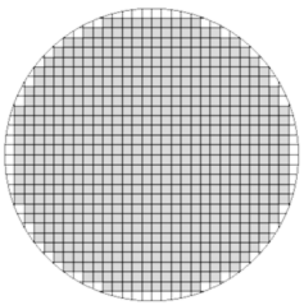


图 10　压电陶瓷作动器的布置

Fig. 10　Arrangement of piezoelectric actuators

在重力作用下，反射面在三点支撑条件下，具有较大的变形，其面形均方根误差（RMS）达到 2 084 nm，重力变形云图如图 11 所示。

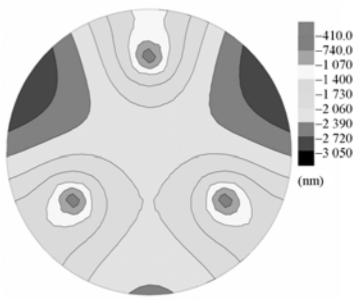
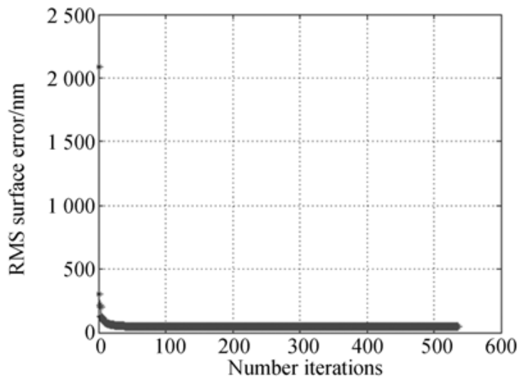


图 11　反射面重力变形云图

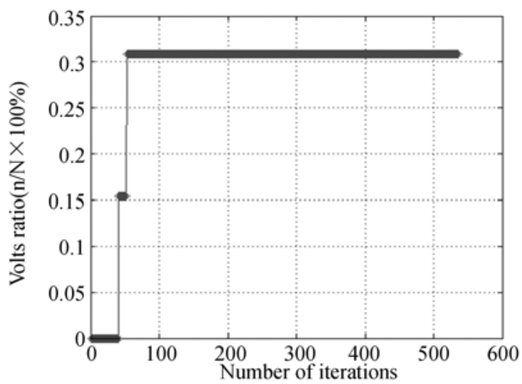
Fig. 11　Uncontrolled deformation contour

根据以上描述的形状控制算法，优化压电作动器的控制电压，首先初始控制电压置为 0，首先按式所给出的无约束模型优化求解，在迭代过程中，面形变化和电压超过允许范围的比例如图 12



(a)均方根误差变化

(a)RMS curve



(b)超过极限电压的比例

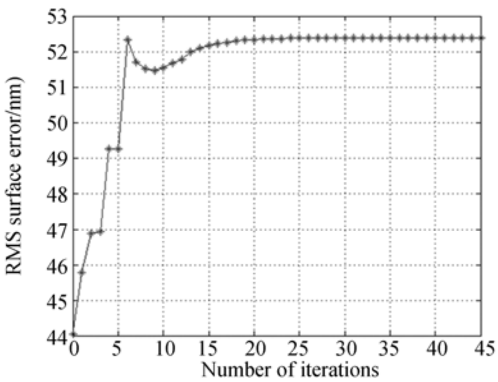
(b) Voltages exceed the limit percent

图 12　无约束优化求解

Fig. 12　Unconstrained optimization iteration

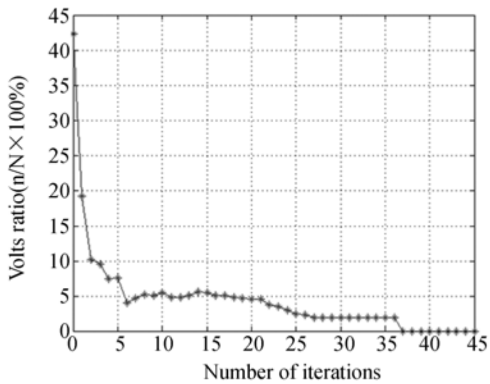
(所示。均方根误差(RMS)最小值为 44 nm 在第 545 步时达到。通过图 12(a)可以看出,重力变形可以减小 97.9%,但约有 30%作动器的控制电压超过了极限电压。

根据以上求解发现有必要控制作动器电压范围,按式(32)给出的约束优化模型求解。将无约束优化得到的控制电压作为初值进行迭代求解,面形变化和电压超过允许范围的比例如图 13(a)和 13(b)所示,均方根误差(RMS)最小值为 52 nm 在第 46 步时达到。由图 13(a)发现,重力变形减小了 97.1%,与无约束情况相比虽然增加了 0.8%,但此时全部作动器控制电压在最大允许电压范围内。



(a)均方根误差变化

(a)RMS curve



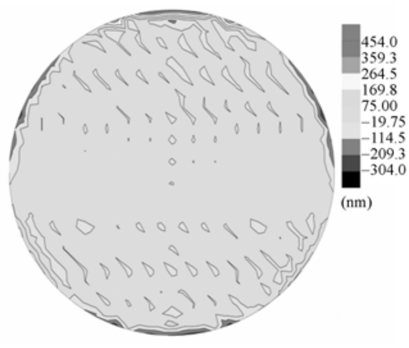
(b)超过极限电压的比例

(b) Voltages exceed the limit percent

图 13 约束优化求解

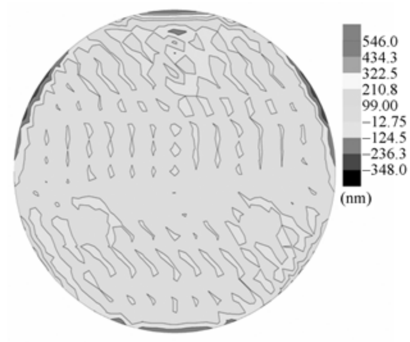
Fig. 13 Constrained optimization iteration

两种情况下,控制后的变形云图如图 14 所示,控制电压的分布如图 15 所示。



(a)不约束电压范围

(a) Without voltage limit

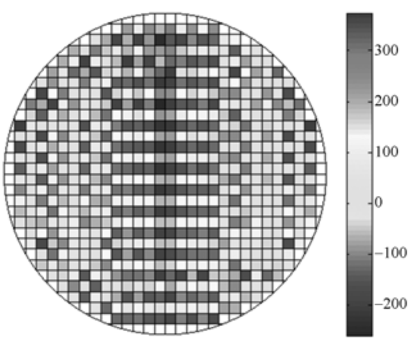


(b)约束电压范围

(b) With voltage limit

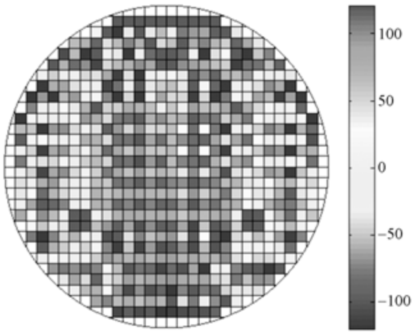
图 14 控制后的变形云图

Fig. 14 Controlled deformation contour



(a)不约束电压范围

(a) Without limitation



(b)约束电压范围
(b) With limitation

图 15　控制电压分布
Fig. 15　Control voltages distribution

5　结　论

本文研究了压电智能反射面的静态形状控制问题，根据 Kirchhoff 经典层合板理论建立的结构有限元模型，以均方根误差最小为目标，推导了确定最优控制电压的优化模型，采用 Lagrange 乘子法处理作动器的电压限制，并给出了平面压电智能反射面的算例。

算例结果表明，采用压电陶瓷贴片作动器校正反射面的重力变形是必要的而且效果明显，通过校正可使重力变形减小 90%以上，使反射面的面形精度得到了极大改善。采用 Lagrange 乘子法处理优化过程中作动器工作电压的限制，能够保证全部作动器的控制电压在合理范围内。

参考文献：

[1] 刘振宇，罗霄，邓伟杰，等. 大口径非球面组合加工技术[J]. 光学 精密工程，2013，21(11)：2791-2797.
LIU ZH Y，LOU X，DENG W J，*et al.*. Multi-mode optimization technique for large optical aspheric mirror [J]. *Opt. Precision Eng.*，2013，21(11)：2791-2797. (in Chinese)

[2] 叶伟楠，董吉洪. 大口径主镜轻量化结构参数的优化设计[J]. 中国光学，2012，5(3)：222-228.
YE W N，DONG J H. Optimized design for light weight structural parameters for large-aperture primary mirror[J]. *Chinese Optics*，2012，5(3)：222-228. (in Chinese)

[3] 张景旭. 地基大口径望远镜系统结构技术综述[J]. 中国光学，2012(4)：327-336.
ZHANG J X. Overview of structure technologies of large aperture ground-based telescopes[J]. *Chinese Optics*，2012(4)：327-336. (in Chiense)

[4] 范磊，张景旭，吴小霞，等. 大口径轻量化主镜边缘侧向支撑的优化设计[J]. 光学 精密工程，2012，20(10)：2207-2213.
FAN L，ZHANG J X，WU X X，*et al.*. Optimum design of edge lateral support for large aperture lightweight primary mirror [J]. *Opt. Precision Eng.*，2012，20(10)：2207-2213. (in Chinese)

[5] 曾春梅，郭培基，余景池. 0.5 m 超薄镜主动支撑面形校正及实验[J]. 光学 精密工程，2010，18(3)：570-578.
ZENG C M，GUO P J，YU J C. Demonstration and analysis on correction of 0. 5 m ultra-thin mirror with active supports[J]. *Opt. Precision Eng.*，2010，18(3)：570-578. (in Chinese)

[6] 李宏壮，林旭东，刘欣悦，等. 400mm 薄镜面主动光学实验系统[J]. 光学 精密工程，2009，17(9)：2076-2083.
LI HZ，LIN XD，LIU XY，*et al.* Experiment system of 400 mm thin-mirror active optics[J]. *Opt. Precision Eng.*，2009，17(9)：2076-2083. (in Chinese)

[7] CHEN PC，ROMEO RC. Advances in composite mirror and telescope technology[J]. *Proceedings of SPIE*，2004，5382：397-403.

[8] CHEN P C，BOWERS C W，A CONTENT D，*et al.*. Advances in very lightweight composite mirror technology [J]. *Optical Engineering*，2000，39(9)：2320-2329.

[9] PARADIES R，HERTWIG M. Shape control of adaptive composite reflectors[J]. *Composites Part B：Engineering*，1999，30(1)：65-78.

[10] PARADIES R，HERTWIG M，ELSPASS WJ. Shape control of an adaptive mirror at different angles of inclination [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*，1996，7(2)：203-210.

[11] AGRAWAL B N，TREANOR K E. Shape control of a beam using piezoelectric actuators[J]. *Smart Materials & Structures*，1999，8(6)：729-739.

[12] SUN D，TONG L. Design optimization of piezoelectric actuator patterns for static shape control of smart plates[J]. *Smart Materials & Structures*，

2005, 14:1353-1362.

[13] MASTERS I G, EVANS K E. Models for the elastic deformation of honeycombs[J]. *Composite Structures*, 1996, 35(4):403-422.

[14] GIBSON L J, ASHBY M F, SCHAJER G S, *et al.*. The mechanics of two-dimensional cellular materials[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1982, 382(1782):25-42.

[15] MEHTA P K. Moment actuator influence function for flat circular deformable mirrors[J]. *Advances in Optical Structure Systems*, 1990, 29:2-19.

[16] LIU CHCH-H. *Structural analysis and design of adaptive lightweight mirrors*[D]. USA: Massachusetts Institute of Technology, 1993.

[17] REDDY J N. *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*[M]. Second ed. New York: CRC PRESS, 1945.

[18] CHEN DH. Equivalent flexural and torsional rigidity of hexagonal honeycomb[J]. *Composite Structures*, 2011, 93(7):1910-1917.

[19] REDDY J N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators[J]. *Engineering Structures*, 1999, 21(7):568-593.

[20] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. *The Finite Element Method 5th edition* [M]. London: McGraw-Hill, 2000.

[21] MOITA J, SOARES C,SOARES C. Geometrically non-linear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators [J]. *Composite Structures*, 2002, 57:253-261.

[22] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
WANG XC. *Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)

[23] NELSON J E, LUBLINER J, MAST TS. Telescope Mirror Supports: Plate Deflections On Point Supports [J]. *Advanced Technology Optical Telescopes*, 1982, 332:212-228.

[24] PARADIES R. Designing quasi-isotropic laminates with respect to bending[J]. *Composites Science and Technology*, 1996, 56(4):461-472.

作者简介：

王　志(1963—),男,吉林长春人,副研究员,2007年于长春理工大学获硕士学位,主要研究方向为精密光学仪器结构设计。E-mail: wangzhi8927@163.com

曹玉岩(1986—),男,吉林省大安人,助理研究员,2009年、2012年于西安电子科技大学分别获学士学位、硕士学位,主要从事结构有限元理论、结构振动控制技术研究。E-mail: yuyan_cao@126.com