

文章编号 1004-924X(2014)07-1857-07

## 直圆柔性球铰柔度矩阵的解析计算

姚建涛<sup>1,2</sup>, 李立建<sup>1</sup>, 杨 维<sup>1</sup>, 赵永生<sup>1,2\*</sup>

(1. 燕山大学 河北省并联机器人与机电系统实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:**基于线弹性和小变形假设理论,通过引入比例系数(直圆柔性球铰槽口间距与切割半径倍数之比)并利用其结构对称的特点,推导得到了形式较为简洁的直圆柔性球铰柔度矩阵各子元素的解析柔度计算公式。利用有限元仿真软件验证了所推公式的正确性,并绘制了相应的误差曲线。结果表明:当比例系数小于 0.2 时,直圆柔性球铰各柔度计算公式的相对误差限均在 11% 以内;随着比例系数的增加,除沿  $x$  向的拉压柔度  $C_{11}$  误差较小外,其他柔度计算公式的误差均呈增加的趋势,最大误差为 30%。实验结果显示理论分析与仿真结果基本趋于一致,验证了直圆柔性球铰各柔度解析公式的正确性。本文的研究内容为直圆柔性球铰在实际应用中的结构设计和参数优化奠定了理论基础。

**关键词:**直圆柔性球铰;柔度矩阵;比例系数;仿真;误差曲线

**中图分类号:**TH165;TH132 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20142207.1857

## Analytical calculation of compliance matrix for right-circular flexure spherical hinge

YAO Jian-tao<sup>1,2</sup>, LI Li-jian<sup>1</sup>, YANG Wei<sup>1</sup>, ZHAO Yong-sheng<sup>1,2\*</sup>

(1. *Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;*

2. *Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science, Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)*

\* *Corresponding author, E-mail: yszhao@ysu.edu.cn*

**Abstract:** On the basis of hypothesis theories of linear elasticity and small deformation, the analytical compliance calculation formula of each sub-element in the compliance matrix of a right-circular flexure spherical hinge was deduced. The formula is succinct in form by introducing the proportional coefficient (The ratio of right-circular flexure spherical hinge groove spacing and double cutting radius) and utilizing the symmetrical feature of the structure. The correctness of the formula was verified by adopting the finite element simulation software, and its error curves were drawn corresponding to the simulated values. The results show that the relative errors of serial compliance calculation formula for the right-circular flexure spherical hinge are within 11% when the proportional coefficient is less than 0.2. With the increase of the proportional coefficient, the errors of the other

**收稿日期:**2014-01-20; **修订日期:**2014-02-27.

**基金项目:**国家 973 重点基础研究发展计划资助项目 (No. 2013CB733000); 国家自然科学基金资助项目 (No. 51305383); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (No. 20131333120007); 河北省自然科学基金资助项目 (No. 2012203130)

compliance calculation formulas have a trend of increasing with maximum of 30% except the error of tension and compression compliance  $C_{11}$  along the direction  $x$ . The experimental results show that the theoretical analysis is in agreement with the simulation results, which verifies the correctness of the proposed formula. These results will lay a key theoretical basis for the structural design and parametric optimization of the right-circular flexure spherical hinges in practical applications.

**Key words:** right-circular flexure hinge; compliance matrix; proportional coefficient; simulation; error curve

## 1 引言

柔性铰链是构建精密和高精密全柔性机构的最基本单元,也是依靠自身柔性来实现全柔性机构微小运动的最小运动单元,具有加工制造方便、运动精度高、体积小、无机械摩擦及间隙和灵敏度高等诸多优点,被广泛应用于微机电系统和微细加工等领域,如精密微定位平台<sup>[1-2]</sup>、微位移放大机构<sup>[3]</sup>、微动机器人<sup>[4-5]</sup>、光纤对接及生物工程等。

柔度或刚度是评价柔性铰链性能的最重要指标之一,对其进行空间形式的柔度矩阵建模也是构建全柔性机构整体刚度建模的基础。柔性铰链的柔度矩阵集拉压、扭转和弯曲变形为一体且能较好反映出载荷与形变间的解析映射关系。根据柔性铰链对运动精度和范围的不同要求,可选用外轮廓曲线为矩形及圆弧形、圆锥曲线形、多项式曲线形和三角函数形等型式的单轴、双轴和三轴的柔性铰链<sup>[6]</sup>。TIAN 等<sup>[7]</sup>基于卡氏第二定理得到了倒 V-型柔性铰链平面内和平面外的解析柔度方程,并研究了几何参数对其柔度特性的影响。CHEN 等<sup>[8-9]</sup>通过引入椭圆偏心角作为积分变量得到了椭圆柔性铰链的系列柔度计算公式。张景柱等<sup>[10]</sup>和曹锋等<sup>[11]</sup>分别得到了一种新型单轴柔性铰链和双轴椭圆柔性铰链的柔度矩阵计算公式。王纪武等<sup>[12]</sup>研究了弹性球副的结构参数对其抗弯和扭转刚度性能的影响。朱仁胜等<sup>[13]</sup>将柔性球铰当作双轴处理,并对其在力和力矩作用下的线位移和角位移柔度设计公式进行了计算。

本文针对三轴直圆柔性球铰,基于线弹性和小变形假设理论,通过引入比例系数(直圆柔性球铰槽口间距与切割半径倍数之比)和直圆柔性球铰的旋转对称性,并考虑力和力矩对直圆柔性球

铰自由端线位移和角位移耦合柔度的影响,得到了直圆柔性球铰柔度矩阵的系列解析计算公式,过程简洁,避免了繁琐的数值计算。最后利用有限元软件得到了直圆柔性球铰系列柔度公式的误差曲线。

## 2 直圆柔性球铰结构特点

当直圆柔性球铰自由端受到载荷作用时,其空间变形形式如图 1 所示。

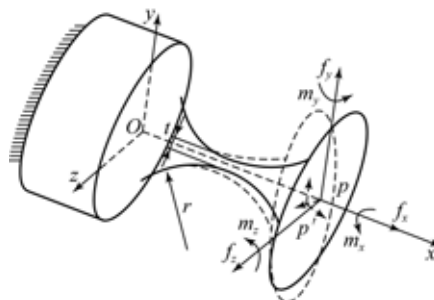


图 1 直圆柔性球铰空间变形图

Fig. 1 Spatial deformation diagram of right-circular flexure spherical hinge

其中,  $O-xyz$  为直圆柔性球铰固定端参考点上的固定坐标系,  $p-xyz$  为直圆柔性球铰自由端参考点上的局部坐标系,  $p'-xyz$  为直圆柔性球铰自由端在载荷作用下变形后自由端参考点的姿态坐标系,  $r$  为直圆柔性球铰的切割圆弧半径,  $t$  为槽口间距。

## 3 直圆柔性球铰的柔度矩阵计算

基于线弹性和小变形假设理论,忽略因各方向变形而相互产生的微小干涉影响,可得直圆柔性球铰自由端参考点的位移-力方程为:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{px} \\ \Delta_{py} \\ \Delta_{pz} \\ \Delta_{\alpha x} \\ \Delta_{\alpha y} \\ \Delta_{\alpha z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & C_{62} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \mathbf{CF}, \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{\Delta} = (\Delta_{px}, \Delta_{py}, \Delta_{pz}, \Delta_{\alpha x}, \Delta_{\alpha y}, \Delta_{\alpha z})^T$  为直圆柔性球铰自由端参考点的变形矢量,  $\mathbf{F} = (f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z)^T$  为作用于直圆柔性球铰自由端参考点上的载荷矢量,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$  为直圆柔性球铰自由端参考点的柔度矩阵。

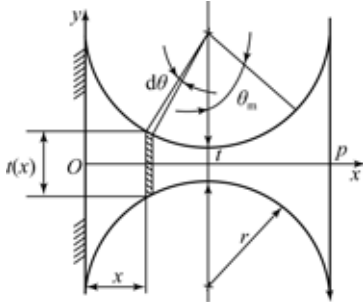


图 2 直圆柔性球铰的平面视图  
Fig. 2 Planar view of right-circular flexure spherical hinge

直圆柔性球铰  $xy$  平面视图如图 2 所示。其中,  $\theta_m \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。直圆柔性球铰在点  $x$  处, 平行于  $yz$  平面, 表示圆横截面直径的形状函数为:

$$t(x) = t + 2(r - \sqrt{x(2r - x)}) \quad (x \in [0, 2r]). \quad (2)$$

令  $x = \rho + r$ , 有:

$$t(\rho + r) = t + 2(r - \sqrt{r^2 - \rho^2}) \quad (\rho \in [-r, r]). \quad (3)$$

$$I_2 = \int_0^{2r} \frac{1}{t^4(x)} dx = \frac{1}{8r^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{(1 + \xi - \cos \theta)^4} d\theta = \frac{1}{8r^3 (\xi(\xi + 2))^3} \left\{ \frac{6\xi^5 + 30\xi^4 + 70\xi^3 + 90\xi^2 + 59\xi + 15}{6(\xi + 1)^3} + \frac{4\xi^2 + 8\xi + 5}{\sqrt{\xi(\xi + 2)}} \arctan \sqrt{\frac{\xi + 2}{\xi}} \right\}. \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可知, 直圆柔性球铰自由端产生绕  $z$  轴的弯曲柔度  $C_{66}$  为:

$$C_{66} = \frac{\Delta_{\alpha z}}{m_z} = \frac{64 I_2}{\pi E}. \quad (10)$$

根据旋转对称性, 直圆柔性球铰自由端产生

可令  $\rho = r \sin \theta$ , 故有:

$$\begin{cases} t(\theta) = 2r(1 + \xi - \cos \theta) \quad (\theta \in [-\pi/2, \pi/2]), \\ d\rho = r \cos \theta d\theta \end{cases}, \quad (4)$$

式中:  $\xi = t/2r$  为比例系数。

### 3.1 沿 $x$ 轴的线变形

直圆柔性球铰受沿  $x$  轴向的拉压力  $f_x$  作用时, 产生沿  $x$  方向上的线变形  $\Delta_{px}$  为:

$$\Delta_{px} = \int_0^{2r} \frac{f_x}{EA(x)} dx = \frac{4f_x}{\pi E} \int_0^{2r} \frac{1}{t^2(x)} dx = \frac{4f_x}{\pi E} I_1. \quad (5)$$

式中:  $A(x)$  为点  $x$  处平行于  $yz$  平面的圆横截面积函数,  $E$  是材料的弹性模量,  $I_1$  为中间变量, 其计算表达式为:

$$I_1 = \int_0^{2r} \frac{1}{t^2(x)} dx = \frac{1}{2r} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{(1 + \xi - \cos \theta)^2} d\theta = \frac{1}{2r} \left\{ \frac{1}{\xi(\xi + 2)} + \frac{2}{(\xi(\xi + 2))^{3/2}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\xi + 2}{\xi}} \right] \right\}. \quad (6)$$

由式(5)和式(6)可知, 直圆柔性球铰自由端沿  $x$  方向的拉压柔度  $C_{11}$  为:

$$C_{11} = \frac{\Delta_{px}}{f_x} = \frac{4 I_1}{\pi E}. \quad (7)$$

### 3.2 绕 $z(y)$ 轴的角变形

当直圆柔性球铰自由端受绕  $z$  轴的作用力矩  $m_z$  时, 在点  $x$  处平行于  $yz$  平面上产生反作用力矩为  $m_z(x) = m_z$ , 则在力矩  $m_z$  作用下直圆柔性球铰自由端产生绕  $z$  轴的弯曲角变形  $\Delta_{\alpha z}$  为:

$$\Delta_{\alpha z} = \int_0^{2r} \frac{m_z(x)}{EI_z(x)} dx = \frac{64 m_z}{\pi E} \int_0^{2r} \frac{1}{t^4(x)} dx = \frac{64 I_2 m_z}{\pi E}, \quad (8)$$

式中:  $I_z(x)$  为点  $x$  处的圆截面绕  $z$  轴的截面惯性矩,  $I_2$  为中间变量, 其计算表达式为:

绕  $y$  轴的弯曲柔度  $C_{55}$  为:

$$C_{55} = \frac{\Delta_{\alpha y}}{m_y} = C_{66} = \frac{64 I_2}{\pi E}, \quad (11)$$

式中:  $m_y$  为直圆柔性球铰自由端参考点作用的绕  $y$  向上的力矩,  $\Delta_{\alpha y}$  为直圆柔性球铰自由端在力矩

$m_y$  作用下产生的绕  $y$  轴的弯曲角变形。

当仅受沿  $y$  轴方向上作用力  $f_y$  时, 在  $x$  处平行于  $yz$  平面的圆截面上产生内力矩  $m_y(x)$  为:

$$m_y(x) = f_y(2r - x) \quad (x \in [0, 2r]). \quad (12)$$

在力  $f_y$  作用下直圆柔性球铰自由端产生绕  $y$  轴的弯曲角变形  $\Delta_{\omega}$  为:

$$\Delta_{\omega} = \int_0^{2r} \frac{m_y(x)}{EI_z(x)} dx = \frac{64f_y}{\pi E} \int_0^{2r} \frac{(2r-x)}{t^4(x)} dx = \frac{64f_y}{\pi E} (2rI_2 - I_3), \quad (13)$$

式中:  $I_3$  为中间变量, 其计算表达式为:

$$I_3 = \int_0^{2r} \frac{x}{t^4(x)} dx = \int_{-r}^r \frac{\rho+r}{t^4(\rho+r)} d\rho = \int_{-r}^r \frac{\rho}{t^4(\rho+r)} d\rho + r \int_{-r}^r \frac{1}{t^4(\rho+r)} d\rho = rI_2, \quad (14)$$

式中: 划双横线项由于被积函数为奇函数, 因此该项定积分为 0。联立式(13)和式(14)并整理可得

$$\Delta_{pyb} = C_{22}^b f_y = \int_0^{2r} \Delta_{\omega(x)} dx = \int_0^{2r} \left[ \int_0^x \frac{f_y(2r-\mu)}{EI_z(\mu)} d\mu \right] dx = x \alpha_{z(x)} \Big|_0^{2r} - \int_0^{2r} \frac{f_y(2r-x)x}{EI_z(x)} dx = \frac{64f_y}{\pi E} \left[ 2r^2 I_2 - 2r \int_0^{2r} \frac{x}{t^4(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{x^2}{t^4(x)} dx \right] = \frac{64f_y}{\pi E} (2r^2 I_2 - 2rI_3 + I_4) = \frac{64I_4}{\pi E} f_y, \quad (17)$$

式中:  $C_{22}^b$  为仅受力  $f_y$  作用时由弯矩产生的沿  $y$  轴线变形的柔度,  $\Delta_{\omega(x)}$  为由于力  $f_y$  作用下在点  $x$

直圆柔性球铰自由端因力  $f_y$  作用而产生绕  $z$  轴的弯曲柔度  $C_{62}$  为:

$$C_{62} = \frac{\Delta_{\omega}}{f_y} = \frac{64rI_2}{\pi E} = rC_{55}. \quad (15)$$

根据直圆柔性球铰的旋转对称性及力与力矩对直圆柔性球铰变形的作用效果可同时得到直圆柔性球铰自由端因力矩  $m_z$  作用产生沿  $y$  轴的弯曲柔度  $C_{26}$ 、因力矩  $m_y$  作用产生沿  $z$  轴的弯曲柔度  $C_{35}$  和因力  $f_z$  作用产生绕  $y$  轴的弯曲柔度  $C_{53}$  分别为:

$$C_{26} = C_{62} = \frac{64rI_2}{\pi E},$$

$$C_{35} = C_{53} = -C_{62} = -\frac{64rI_2}{\pi E}, \quad (16)$$

式中: 负号表示变形方向与坐标轴方向相反。

### 3.3 沿 $y(z)$ 轴的线变形

当仅在力  $f_y$  作用时, 由于弯矩使直圆柔性球铰自由端参考点沿  $y$  轴的线变形  $\Delta_{pyb}$  为:

处产生的弯曲角变形,  $I_4$  为中间变量, 其计算表达式为:

$$I_4 = \int_0^{2r} \frac{x^2}{t^4(x)} dx = \int_{-r}^r \frac{(\rho+r)^2}{t^4(\rho+r)} dx = \int_{-r}^r \frac{\rho^2}{t^4(\rho+r)} d\rho + 2r \int_{-r}^r \frac{\rho}{t^4(\rho+r)} d\rho + r^2 \int_{-r}^r \frac{1}{t^4(\rho+r)} d\rho = \int_{-r}^r \frac{\rho^2}{t^4(\rho+r)} d\rho + r^2 I_2 = I_5 + r^2 I_2, \quad (18)$$

式中: 划双横线项由于被积函数为奇函数, 因此该项定积分为 0,  $I_5$  为中间变量, 其计算表达式为:

$$I_5 = \int_{-r}^r \frac{\rho^2}{t^4(\rho+r)} d\rho = \frac{1}{8r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{(1+\xi - \cos \theta)^4} d\theta = \frac{1}{8r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta - \cos^3 \theta}{(1+\xi - \cos \theta)^4} d\theta = r^2 I_2 - \frac{1}{8r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \theta}{(1+\xi - \cos \theta)^4} d\theta = r^2 I_2 - r^2 I_6. \quad (19)$$

式中:  $I_6$  为中间变量, 其计算表达式为:

$$I_6 = \frac{1}{8r^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \theta}{(1+\xi - \cos \theta)^4} d\theta = \frac{1}{8r^3 (\xi(\xi+2))^3} \times \left\{ \frac{4\xi^5 + 20\xi^4 + 51\xi^3 + 73\xi^2 + 53\xi + 15}{6(\xi+1)^3} + \frac{3\xi^2 + 6\xi + 5}{\sqrt{\xi(\xi+2)}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\xi+2}{\xi}} \right] \right\}. \quad (20)$$

联立式(18)~(20)可得中间变量  $I_4$  为:

$$I_4 = \frac{1}{8r(\xi(\xi+2))^3} \left\{ \frac{8\xi^4 + 32\xi^3 + 57\xi^2 + 50\xi + 15}{6(\xi+1)^2} + \frac{5(\xi+1)^2}{\sqrt{\xi(\xi+2)}} \arctan \sqrt{\frac{\xi+2}{\xi}} \right\}. \quad (21)$$

当仅在力  $f_y$  作用时,由于剪切力使直圆柔性球铰自由端参考点沿  $y$  轴的线变形  $\Delta_{pys}$  为:

$$\Delta_{pys} = C_{22}^s f_y = \int_0^{2r} \frac{\kappa f_y}{\pi G t^2(x)} dx = \frac{\kappa f_y}{\pi G} \int_0^{2r} \frac{1}{t^2(x)} dx = \frac{\kappa I_1}{\pi G} f_y, \quad (22)$$

式中:  $C_{22}^s$  为仅受力  $f_y$  作用时由剪切力产生的沿  $y$  轴线变形的柔度,  $\kappa=1$  表示取平均剪应力,  $G$  为材料的剪切弹性模量。

联立式(17)和式(22)可得直圆柔性球铰自由端由力  $f_y$  作用产生沿  $y$  轴线变形的弯曲柔度  $C_{22}$  为:

$$C_{22} = \frac{\Delta_{pys} + \Delta_{pys}}{f_y} = C_{22}^b + C_{22}^s = \frac{64 I_4 + \kappa(1+\nu) I_1}{\pi E}. \quad (23)$$

根据旋转对称性,可得直圆柔性球铰自由端仅受力  $f_z$  的作用产生沿  $z$  轴线变形的弯曲柔度  $C_{33}$  为:

$$C_{33} = \frac{\Delta_{pzb} + \Delta_{pzs}}{f_z} = C_{22}. \quad (24)$$

### 3.4 绕 $x$ 轴的角变形

基于平面假设,当仅受纯力矩  $m_x$  作用时,由于纯力矩  $m_x$  使直圆柔性球铰自由端相对于固定端产生的相对扭转角变形  $\Delta_{ax}$  为:

$$\Delta_{ax} = \int_0^{2r} \frac{m_x(x)}{G I_x(x)} dx = \frac{32 m_x}{\pi G} \int_0^{2r} \frac{1}{t^4(x)} dx = \frac{32 I_2}{\pi G} m_x, \quad (25)$$

故由式(25)可得,直圆柔性球铰自由端在纯力矩  $m_x$  作用下产生绕  $x$  轴角变形的柔度  $C_{44}$  为:

$$C_{44} = \frac{32 I_2}{\pi G} = \frac{64 I_2}{\pi E} (1+\nu) = (1+\nu) C_{66}, \quad (26)$$

式中:  $\nu$  为材料的泊松比。

## 4 有限元仿真实验

表 1 为给定的 10 组直圆柔性球铰的尺寸参数值。其中,选定直圆柔性球铰的材料为铍青铜

(CuBe<sub>2</sub>), 材料密度  $\rho=8\ 000\ \text{kg/m}^3$ , 弹性模量  $E=128\ \text{GPa}$ , 泊松比为 0.3。

表 1 10 组直圆柔性球铰尺寸参数值

Tab. 1 Ten groups values of right-circular flexure spherical hinge's dimension parameters(mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
切割半径 $r$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
槽口间距 $t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
比例系数 $\xi$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5

利用 Ansys Workbench 14.5 有限元分析软件平台,来验证上述直圆柔性球铰柔度矩阵各子元素解析计算公式的求解精度。图 3 所示为直圆柔性球铰的有限元网格划分模型。

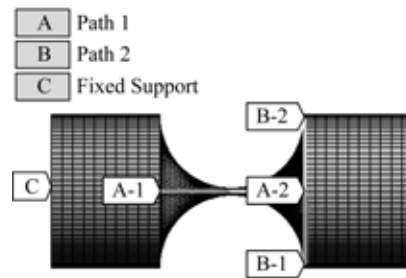


图 3 直圆柔性球铰的有限元网格划分模型

Fig. 3 Finite element mesh model of right-circular flexure spherical hinge

其中,路径 A 两端点为直圆柔性球铰两端面的几何中心,路径 B 为直圆柔性球铰右端圆截面直径,且与直圆柔性球铰自由端参考点上的局部坐标系的  $y$  轴相重合。通过有限元仿真并测量路径 A 和路径 B 两端点处的变形值并计算来确定直圆柔性球铰的各柔度矩阵子元素的仿真值。表 2 所示为直圆柔性球铰理论与仿真结果对比。从表 2 中的数据可得直圆柔性球铰各柔度计算公式误差曲线如图 4 所示。

表 2 直圆柔性球铰理论与仿真结果对比

Tab.2 Comparison of compliances between theoretical results (denoted by T) and simulated results (denoted by S)

	$C_{11}/(\text{m} \cdot \text{N}^{-1})$	$C_{22}/C_{33}/(\text{m} \cdot \text{N}^{-1})$	$C_{26}/C_{35}/(\text{m} \cdot \text{Nm}^{-1})$	$C_{44}/(\text{rad} \cdot \text{Nm}^{-1})$	$C_{53}/C_{62}/(\text{rad} \cdot \text{N}^{-1})$	$C_{55}/C_{66}/(\text{rad} \cdot \text{Nm}^{-1})$
1(T)	$4.777\ 0 \times 10^{-8}$	$4.999\ 6 \times 10^{-5}$	$4.903\ 6 \times 10^{-3}$	0.637 47	$4.903\ 6 \times 10^{-3}$	0.490 36
1(S)	$4.949\ 8 \times 10^{-8}$	$5.099\ 8 \times 10^{-5}$	$4.988\ 7 \times 10^{-3}$	0.646 04	$4.988\ 8 \times 10^{-3}$	0.498 86
2(T)	$1.638\ 4 \times 10^{-8}$	$4.465\ 8 \times 10^{-6}$	$4.300\ 5 \times 10^{-4}$	$5.590\ 6 \times 10^{-2}$	$4.300\ 5 \times 10^{-4}$	$4.300\ 5 \times 10^{-2}$
2(S)	$1.717\ 9 \times 10^{-8}$	$4.673\ 9 \times 10^{-6}$	$4.457\ 0 \times 10^{-4}$	$5.482\ 0 \times 10^{-2}$	$4.252\ 9 \times 10^{-4}$	$4.251\ 5 \times 10^{-2}$
3(T)	$8.671\ 1 \times 10^{-9}$	$1.090\ 7 \times 10^{-6}$	$1.032\ 1 \times 10^{-4}$	$1.341\ 7 \times 10^{-2}$	$1.032\ 1 \times 10^{-4}$	$1.032\ 1 \times 10^{-2}$
3(S)	$9.099\ 9 \times 10^{-9}$	$1.177\ 4 \times 10^{-6}$	$1.089\ 4 \times 10^{-4}$	$1.275\ 9 \times 10^{-2}$	$9.952\ 3 \times 10^{-5}$	$9.940\ 8 \times 10^{-3}$
4(T)	$5.485\ 8 \times 10^{-9}$	$4.019\ 9 \times 10^{-7}$	$3.740\ 2 \times 10^{-5}$	$4.862\ 2 \times 10^{-3}$	$3.740\ 2 \times 10^{-5}$	$3.740\ 2 \times 10^{-3}$
4(S)	$5.724\ 6 \times 10^{-9}$	$4.495\ 0 \times 10^{-7}$	$4.025\ 2 \times 10^{-5}$	$4.493\ 0 \times 10^{-3}$	$3.526\ 7 \times 10^{-5}$	$3.517\ 3 \times 10^{-3}$
5(T)	$3.829\ 3 \times 10^{-9}$	$1.855\ 9 \times 10^{-7}$	$1.698\ 7 \times 10^{-5}$	$2.208\ 3 \times 10^{-3}$	$1.698\ 7 \times 10^{-5}$	$1.698\ 7 \times 10^{-3}$
5(S)	$3.956\ 9 \times 10^{-9}$	$2.156\ 7 \times 10^{-7}$	$1.864\ 9 \times 10^{-5}$	$1.986\ 5 \times 10^{-3}$	$1.570\ 3 \times 10^{-5}$	$1.562\ 5 \times 10^{-3}$
6(T)	$2.845\ 4 \times 10^{-9}$	$9.880\ 3 \times 10^{-7}$	$8.899\ 0 \times 10^{-6}$	$1.156\ 9 \times 10^{-3}$	$8.899\ 0 \times 10^{-6}$	$8.899\ 0 \times 10^{-4}$
6(S)	$2.903\ 5 \times 10^{-9}$	$1.195\ 9 \times 10^{-8}$	$9.969\ 3 \times 10^{-6}$	$1.014\ 7 \times 10^{-3}$	$8.083\ 1 \times 10^{-6}$	$8.017\ 8 \times 10^{-4}$
7(T)	$2.208\ 2 \times 10^{-9}$	$5.803\ 1 \times 10^{-8}$	$5.144\ 8 \times 10^{-6}$	$6.688\ 2 \times 10^{-4}$	$5.144\ 8 \times 10^{-6}$	$5.144\ 8 \times 10^{-4}$
7(S)	$2.221\ 1 \times 10^{-9}$	$7.325\ 9 \times 10^{-8}$	$5.882\ 3 \times 10^{-6}$	$5.726\ 8 \times 10^{-4}$	$4.600\ 5 \times 10^{-6}$	$4.544\ 8 \times 10^{-4}$
8(T)	$1.769\ 4 \times 10^{-9}$	$3.662\ 8 \times 10^{-8}$	$3.196\ 8 \times 10^{-6}$	$4.155\ 9 \times 10^{-4}$	$3.196\ 8 \times 10^{-6}$	$3.196\ 8 \times 10^{-4}$
8(S)	$1.752\ 2 \times 10^{-9}$	$4.825\ 3 \times 10^{-8}$	$3.370\ 5 \times 10^{-6}$	$3.477\ 3 \times 10^{-4}$	$2.818\ 8 \times 10^{-6}$	$2.770\ 6 \times 10^{-4}$
9(T)	$1.453\ 0 \times 10^{-9}$	$2.442\ 7 \times 10^{-8}$	$2.098\ 9 \times 10^{-6}$	$2.728\ 6 \times 10^{-4}$	$2.098\ 9 \times 10^{-6}$	$2.098\ 9 \times 10^{-4}$
9(S)	$1.415\ 5 \times 10^{-9}$	$3.357\ 5 \times 10^{-8}$	$2.499\ 5 \times 10^{-6}$	$2.232\ 7 \times 10^{-4}$	$1.827\ 3 \times 10^{-6}$	$1.785\ 1 \times 10^{-4}$
10(T)	$1.216\ 6 \times 10^{-9}$	$1.701\ 3 \times 10^{-8}$	$1.439\ 4 \times 10^{-6}$	$1.871\ 2 \times 10^{-4}$	$1.439\ 4 \times 10^{-6}$	$1.439\ 4 \times 10^{-4}$
10(S)	$1.165\ 5 \times 10^{-9}$	$2.438\ 6 \times 10^{-8}$	$1.748\ 8 \times 10^{-6}$	$1.498\ 1 \times 10^{-4}$	$1.238\ 5 \times 10^{-6}$	$1.201\ 2 \times 10^{-4}$

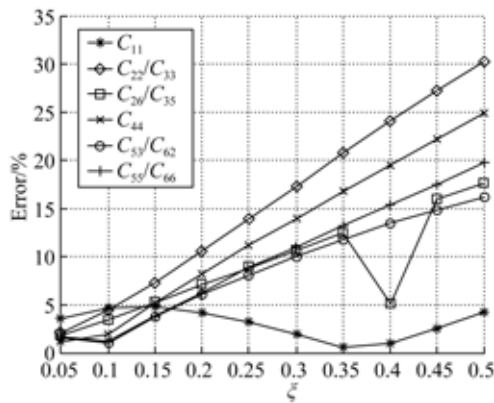


图 4 直圆柔性球铰各柔度计算公式误差曲线

Fig.4 Error curves of all compliance design formulas of right-circular flexure spherical hinge

从图 4 可看出,当比例系数  $\xi$  小于 0.2 时,直圆柔性球铰各柔度计算公式的误差在 11% 以内,随着比例系数的增加,除沿  $x$  向的拉压柔度  $C_{11}$  误差较小和耦合柔度  $C_{26}/C_{35}$  在  $\xi=0.4$  附近较小

外,其他柔度计算公式的误差近似呈线性增加的趋势。其中,沿  $y(z)$  向线位移的弯曲柔度  $C_{22}/C_{33}$  误差较大,最大误差为 30%。

### 5 结 论

本文基于线弹性和小变形假设理论得到了直圆柔性球铰的柔度矩阵各子元素的解析计算公式,并利用有限元软件确定了直圆柔性球铰尺寸参数在不同比值区间内系列柔度计算公式的误差范围,为直圆柔性球铰的设计计算和精度选择奠定了依据。仿真结果表明:当直圆柔性球铰槽口间距与切割半径倍数之比  $\xi \leq 0.2$  时,理论求解精度较高;当  $0.2 < \xi \leq 0.5$  时,除沿  $y(z)$  向线位移的弯曲柔度  $C_{22}/C_{33}$  误差较大外,其余柔度计算公式的相对误差限皆在 25% 以内。从误差曲线上来看,理论结果与仿真结果基本趋于一致,从而验证了直圆柔性球铰各柔度解析式的正确性。

## 参考文献:

- [1] 胡俊峰,张宪民. 3自由度精密定位平台的运动特性和优化设计[J]. 光学精密工程, 2012, 20(12): 2686-2695.  
HU J F, ZHANG X M. Kinematical properties and optimal design of 3-DOF precision positioning stage [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(12): 2686-2695. (in Chinese)
- [2] YONG Y K, LU T F. Kinetostatic modeling of 3-RRR compliant micro-motion stages with flexure hinges [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44: 1156-1175.
- [3] 刘庆玲. 柔性对称微位移放大机构的分析与仿真[J]. 工程力学, 2011, 28(6): 231-235.  
LIU Q L. Analysis and simulation of the compliant symmetrical micro-displacement amplification mechanism [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(6): 231-235. (in Chinese)
- [4] LIANG Q K, ZHANG D, CHI ZH ZH, et al.. Six-DOF micro-manipulator based on compliant parallel mechanism with intergrated force sensor [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2011, 27: 124-134.
- [5] 王乐峰,荣伟彬,孙立宁. 三支链六自由度并联柔性铰微动机器人的研究[J]. 光学精密工程, 2007, 15(4): 529-534.  
WANG L F, RONG W B, SUN L N. Research on a three-link six-DOF micromanipulator with flexure hinges [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(4): 529-534. (in Chinese)
- [6] LOBONTIU N. *Compliant Mechanisms: Design of Flexure Hinges* [M]. London: CRC Press, 2003.
- [7] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D. Closed-form compliance equations of filleted V-shaped flexure hinges for compliant mechanism design [J]. *Precision Engineering*, 2010, 34(3): 408-418.
- [8] 陈桂敏,刘小院,贾建援. 椭圆柔性铰链的柔度计算[J]. 机械工程学报, 2006, 42(增刊): 111-115.  
CHEN G M, LIU X Y, JIA J Y. Compliance calculation of elliptical flexure hinge [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(Suppl): 111-115. (in Chinese)
- [9] 陈桂敏,韩琪. 深切口椭圆柔性铰链[J]. 光学精密工程, 2009, 17(3): 570-575.  
GHEN G M, HAN Q. Deep-notch elliptical flexure hinges [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2009, 17(3): 570-575. (in Chinese)
- [10] 张景柱,徐诚,赵彦峻. 新型柔性铰链的柔度计算[J]. 工程力学, 2008, 25(11): 27-32.  
ZHANG J ZH, XU CH, ZHAO Y J. Compliance calculation of a novel flexure hinge [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(11): 27-32. (in Chinese)
- [11] 曹锋,焦宗夏. 双轴椭圆柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学, 2007, 24(4): 178-182.  
CAO F, JIAO Z X. Design of double-axis elliptical flexure hinges [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 27(7): 178-182. (in Chinese)
- [12] 王纪武,陈恳,李嘉. 典型柔性铰链的结构参数对其刚度性能影响的研究[J]. 机器人, 2001, 23(1): 51-57.  
WANG J W, CHEN K, LI J. Study of geometrical parameters of typical flexible hinges' influence on its rigidity [J]. *Robot*, 2001, 23(1): 51-57. (in Chinese)
- [13] 朱仁胜,沈建,谢祖强,等. 双轴柔性铰链柔度的设计计算[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版, 2009, 32(9): 1370-1373.  
ZHU R SH, SHEN J, XIE Z Q, et al.. Design calculation of double-axis flexure hinges [J]. *Journal of Heifei University of technology*, 2009, 32(9): 1370-1373. (in Chinese)

## 作者简介:



姚建涛(1980—),男,河北保定人,博士,副教授,硕士生导师,2004年、2009年于燕山大学分别获得学士、博士学位,主要研究方向为多维力传感器技术、机器人技术、并联机构理论及应用。  
E-mail: jtyao@ysu.edu.cn



赵永生(1962—),男,吉林龙井人,教授,博士生导师,1983年、1987年于东北重型机械学院分别获得学士、硕士学位,1999年于燕山大学获得博士学位,主要研究方向为并联机构理论及应用、力传感器、数控技术、锻造操作提升机等。  
E-mail: yszhao@ysu.edu.cn